

NAIST-IS-MT0151033

修士論文

人工衛星の姿勢制御における
大域的角速度オブザーバの設計

鎌田 圭

2003年02月07日

奈良先端科学技術大学院大学
情報科学研究科 情報システム学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に
修士(工学) 授与の要件として提出した修士論文である。

鎌田 圭

審査委員： 西谷 紘一 教授
杉本 謙二 教授
山下 裕 助教授

人工衛星の姿勢制御における 大域的角速度オブザーバの設計*

鎌田 圭

内容梗概

人工衛星の姿勢制御において、近年スタートラッカの高精度化、高速化が進んだことや、コスト削減の要求、ジャイロ故障時の冗長性確保の必要などから、ジャイロを用いずにスタートラッカによる基準ベクトル観測値のみを用いて角速度推定する手法が提案されてきた。この場合、基準ベクトル観測値による位置の差分から角速度を近似する方法が考えられるが、差分から得られた速度情報にはノイズの影響が非常に大きく誤差が大きい。

そこで本研究では、人工衛星の姿勢制御における大域的角速度オブザーバの新しい手法を提案する。はじめに人工衛星の姿勢を回転行列ではなく大域的漸近安定性を可能とする四元数を用いて表現する。姿勢の真値から姿勢の推定値までの回転を表現する四元数と角運動量の差分によって記述される誤差システムを構築し、オブザーバの補正項はリアプノフ安定解析によって決定する。

キーワード

角速度，四元数，オブザーバ，リアプノフ関数，大域的漸近安定解析

* 奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報システム学専攻 修士論文, NAIST-IS-MT0151033, 2003年02月07日.

Global angular velocity observer design for attitude control of satellite*

kei kamata

Abstract

In satellite attitude control, the mechanism of estimating angular velocity with only observed value of standard vector by star tracker without using gyro has been proposed in many papers, because a star tracker has become high precision and high speed, and there is the request of abridgement cost, the necessity of securement redundancy when gyro is broken. In this case, the method of approximation angular velocity by the difference of position from the observed value of standard vector can be considered. However the angular velocity outputs that is gotten from the difference is that the influence of the noise is great and the error is large.

In this study, we propose a new design method of a global angular velocity observer in a satellite attitude control. We express the attitude with a quaternion instead of a rotation matrix, which enables globally asymptotically stable dynamics. We construct an error system that is described by the quaternion expressing the rotation from the actual attitude to the estimated attitude and the difference of the angular momentums. Correction terms of the observer are determined via Lyapunov analysis.

* Master's Thesis, Department of Information Systems, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, NAIST-IS-MT0151033, February 07, 2003.

Keywords:

angular velocity, quaternion, observer, Lyapunov analysis, globally asymptotically stable.

目次

1. はじめに	1
2. 同次性の定義と特性	3
3. 四元数による人工衛星の運動方程式	7
3.1 人工衛星の運動方程式	7
3.2 四元数による表現	7
4. 角速度オブザーバの設計	10
4.1 1軸の場合	10
4.1.1 運動方程式	10
4.1.2 オブザーバの構成	10
4.1.3 リアプノフ関数	12
4.2 3軸で主慣性モーメントが同じ場合	14
4.2.1 運動方程式	14
4.2.2 角速度オブザーバの構成	15
4.2.3 リアプノフ関数	18
4.3 3軸で主慣性モーメントが同じでない場合	20
4.3.1 運動方程式	20
4.3.2 角速度オブザーバの構成	21
4.3.3 リアプノフ関数	23
5. 数値シミュレーション	25
5.1 1軸における角速度オブザーバ	25
5.1.1 モデル	25
5.1.2 モデル	26
5.2 3軸で主慣性モーメントが全て同じ場合	27
5.2.1 モデル	27
5.2.2 モデル	28

5.3	3軸で主慣性モーメントが全て同じでない場合	29
5.3.1	モデル	29
5.3.2	モデル	32
5.3.3	モデル	32
5.3.4	モデル	34
5.4	姿勢制御則と組み合わせた場合	36
6.	おわりに	40
	謝辞	41
	参考文献	42

目 次

1	1 軸における e_{ω_1} (モデル)	25
2	1 軸における e_{ω_1} (モデル)	26
3	3 軸で主慣性モーメントが全て同じ場合の e_{ω} (モデル)	27
4	3 軸で主慣性モーメントが全て同じ場合の e_{ω} (モデル)	28
5	3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の ω_1 (モデル)	30
6	3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の $\tilde{\omega}_1$ (モデル)	30
7	3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の $\omega_1, \tilde{\omega}_1$ (モデル)	31
8	3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の e_{ω_1} (モデル)	31
9	3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の e_{ω} (モデル)	31
10	3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の e_{ω} (モデル)	32
11	3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の e_{ω} (モデル)	33
12	3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の e_{ω} (モデル)	34
13	姿勢制御則と組み合わせた場合の e_{ω} (モデル)	38
14	姿勢制御則と組み合わせた場合の q (モデル)	38
15	姿勢制御則と組み合わせた場合の e_{ω} (モデル)	39
16	姿勢制御則と組み合わせた場合の q (モデル)	39

1. はじめに

3軸姿勢制御衛星の姿勢検出には通常，地球センサやスタートラッカなどある基準ベクトルを観測する姿勢センサとジャイロなど慣性系に対する衛星の姿勢角速度を得るためのセンサが併用される．しかし，近年はスタートラッカの高精度化，高速化が進んだことや，コスト削減の要求，ジャイロ故障時の冗長性確保の必要などから，ジャイロは用いずにスタートラッカによる基準ベクトル観測値のみを用いて角速度推定する手法が検討されるようになってきた．この場合，基準ベクトル観測値による位置の差分から角速度を近似する方法が考えられるが，差分から得られた速度情報にはノイズの影響が非常に大きく誤差が大きい．このような問題を回避するためには，位置情報から角速度を推定する非線形オブザーバを構成する方法が考えられる．[1][2]しかし，これらの報告は，大域的安定性を示せていないのが現状である．

以上を踏まえ本研究では，位置情報のみから大域的に人工衛星の角速度を推定する非線形オブザーバを提案する．本手法では，人工衛星の運動方程式を回転行列 R ではなく四元数による方法で表現する．それは，4個の変数で姿勢を表現するため，冗長度は1ですみ，3軸を等価に扱っており，運動方程式が簡単であること．さらに，運動方程式自体には，特異点が現れないこと．このような理由から四元数を用いた姿勢表現を採用することにする．また，同次なシステムにおいては必ず同次リアプノフ関数が存在し，リアプノフ関数の設計が容易であるという特性があるため1軸でのオブザーバを設計する際に同次性の概念を用いる．この1軸のオブザーバを参考に3軸の角速度オブザーバを設計する．この際，角速度の偏差をとるのではなく，運動量の偏差をとることによって慣性モーメントの主慣性モーメントが全て違う形でも偏差系のダイナミクスを構成でき，リアプノフ関数を用いることによって角速度オブザーバの大域的安定性が保証されることを示す．

本論文は次のような構成になっている．

2章では，同次性の概念について述べる．

3章では，人工衛星の運動方程式を四元数によって表現する．

4章では，角速度オブザーバの設計と大域的安定性を示す．

5章では，数値シミュレーションと考察を示す．
最後に6章で，本論文の結論を述べる．

2. 同次性の定義と特性

本研究では1軸の角速度オブザーバを設計する際に同次性の概念を用いている。本章では、その同次性に関する定義の説明をし、最後に特性を述べる。

はじめに同次性に関する定義を簡単に述べる。この同次性は Rothschild ら [3] により準楕円型偏微分作用素の解析のために初めて提案され、後年その概念は Hermes[4][5] により非線形制御理論に導入された。

まずその定義を記す。

定義 1 (拡大付同次性の定義) 次式と同相写像 $\Delta_\varepsilon^r : R^n \rightarrow R^n$ は拡大係数 $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in (R^+)^n$ に関する拡大であるという。

$$\Delta_\varepsilon^r = (\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n), \quad \forall \varepsilon \in R^+ \quad (1)$$

ここで、 $x = (x_1, \dots, x_n)$ は R^n 上の固定した座標系とする。

定義 2 (同次関数) 関数 $V : [0, +\infty) \times R^n \rightarrow R$ は次式を満たすとき m 次の Δ^r -同次であるという。

$$V(\Delta_\varepsilon^r(x)) = \varepsilon^m V(x), \quad \forall t \in [0, +\infty), \forall x \in R^n, \forall \varepsilon \in R^+ \quad (2)$$

定義 3 (同次ベクトル場) ベクトル場 $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ は次式を満たすとき k 次の Δ^r -同次であるという。

$$f_i(\Delta_\varepsilon^r(x)) = \varepsilon^{k+r_i} f_i(x), \quad \forall x \in R^n, \forall \varepsilon \in R^+ \quad (3)$$

微分方程式系 $\dot{x} = f(x)$ を考えるとき、 $f(x)$ が Δ^r -同次であるとき、 Δ^r -同次システムと呼ぶ。

このように Δ^r -同次性を定義するが, $r_1 = \cdots = r_n = 1$ が成立するときにはこれは古典的な意味での同次性の定義になり, これをトリビアルな同次と呼ぶ. トリビアルな同次と Δ^r -同次を結びつけるものとして, 次の命題が成立する.

命題 1 システム $\dot{x} = f(x)$ が Δ^r -同次であるとき, 座標変換 $|\xi_i|^{r_i} \operatorname{sgn} \xi_i = x_i$ ($1 \leq i \leq n$) を行うことにより得られたシステム $\dot{\xi} = \tilde{f}(\xi)$ はトリビアルな同次である.

証明は代入して整理するだけであるので割愛する. この命題により, Δ^r -同次システムは「べき乗の座標変換により古典的な同次系になるようなシステム」と認識することができる.

このような同次な微分方程式系を考えると, 重要な定理として以下のものが成立する.

定理 1 (同次システムにおける Lyapunov の逆定理)

システム $\dot{x} = f(x)$ の原点は平衡点であり局所的に漸近安定かつ, $(t, x) \in [0, +\infty) \times R^n$ に関して $f(t, x)$ は局所的に有界であり, Lebesgue 可測な k 次の時不変 Δ^r -同次ベクトル場であると仮定する.

このとき, システムは大域的に漸近安定であり, Δ^r -同次 Lyapunov 関数が存在する.

この定理について詳しく述べることにする.

Lyapunov の逆定理

以下のような一般的な微分方程式を考える.

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (4)$$

ここで, $x \in R, t \in [0, +\infty)$ であり, $f: R^{n+1} \rightarrow R^n$ とする. このとき, Lyapunov の逆定理としてこれまで Kurzweil によって得られた以下のものが知られていた.

定理 2 (Kurzweil の Lyapunov の逆定理)

(4) の原点は平衡点であり, $(t, x) \in [0, +\infty) \times R^n$ に関しては右辺は連続であると仮定する.

このとき, もし (4) が原点に局所一様漸近安定であるならば, クラス C^∞ の局所狭義 *Lyapunov* 関数が存在する. さらに, 原点に大域的に一様漸近安定であれば, クラス C^∞ の大域的な狭義 *Lyapunov* 関数が存在する. また, $f(t, x)$ が t に関して周期的であるならば, *Lyapunov* 関数も周期的であり, 時不変であれば *Lyapunov* 関数も時不変である.

これに対し, 近年 Rosier[6][7] により以下のようなより条件を緩和した *Lyapunov* の逆定理が証明された.

定理 3 (Rosier の *Lyapunov* の逆定理)

(4) の原点は平衡点であり, $(t, x) \in [0, +\infty) \times R^n$ に関しては右辺は局所的に有界であり, *Lebesgue* 可測であると仮定する.

このとき, もし (4) が原点に局所一様漸近安定であるならば, *Lipschitz* 連続な局所狭義 *Lyapunov* 関数が存在する. さらに, 原点に大域的に一様漸近安定であるならば, *Lipschitz* 連続な大域的な狭義 *Lyapunov* 関数が存在する. また, $f(t, x)$ が時不変であれば, *Lyapunov* 関数も時不変である.

$f(t, x)$ が *Lebesgue* 可測な関数でなければ, *Lipschitz*, *Peano*, *Caratheodory* あるいは *Filippov* のあらゆる意味で, 微分方程式の解は局所一意性すら保証できない. したがって, 制御工学で用いる範囲においては, Rosier の定理によりほぼ逆定理は得られたものことになる.

以上のようなことから同次なシステムでは以下の特性が挙げられる。

特性

- 同次システムにおいては、必ず同次リアプノフ関数が存在する。そのため、リアプノフ関数の設計がしやすい。
- 同次の拡大の定義より、局所的安定性を示すだけで大域的安定性を示すことができる。
- 非線形の式から直観的に収束性能を推測可能である。

3. 四元数による人工衛星の運動方程式

3.1 人工衛星の運動方程式

機体系 Q の座標を機体の主慣性軸方向にとる．基準慣性系 I を機体系 Q に変換する回転行列を $R \in SO(3)$ とする．ただし，慣性系 I と機体系 Q はともに人工衛星の重心に原点をとるものとする． $J \triangleq \text{diag}(j_1, j_2, j_3)$ を機体の慣性モーメント， $\omega \triangleq \text{col}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ を機体系 Q における機体の角速度とすると，

$$\dot{R} = S(\omega)R \quad (5)$$

$$J\dot{\omega} = S(\omega)J\omega + \tau \quad (6)$$

ここで τ は衛星全体へ加えられる入力トルクである．また， $S(\omega)$ は以下のように定義する．

$$S(\omega) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

である．

3.2 四元数による表現

3次元空間における剛体の姿勢を表わす方法としては，上記の回転行列 R による方法のほかに，オイラー角による方法，四元数による方法などがある．回転行列を用いる方法は， $SO(3)$ をそのまま用いるため， $SO(3)$ の位相を損なわず，運動方程式も簡単になるが，3個の独立変数を9個の変数で表わすために冗長度が大きい．オイラー角を用いる方法は，3個の独立変数のみで表現できる点で有利であるが， xyz 軸を等価に扱っておらず，運動方程式に特異点が現れ，三角関数が運動方程式に含まれるために複雑な計算を必要とする．四元数による方法は，4個の変数で姿勢を表わすため，冗長度は1ですむ．また，3軸を等価に扱っており，運動方程式は簡単である．さらに，運動方程式自体には，特異的な点は現

れない．このように各表現方法を比較した結果，四元数を採用することにする．
四元数 q をつぎのように定義する．

$$q \triangleq iq_1 + jq_2 + kq_3 + q_4 \triangleq (q_1, q_2, q_3, q_4)^T \quad (8)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (9)$$

$$ij = -ji = k \quad (10)$$

$$jk = -kj = i \quad (11)$$

$$ki = -ik = j \quad (12)$$

すると，四元数どうしの乗算が定義できる．ここで，四元数のノルムを，

$$\|q\| \triangleq \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \quad (13)$$

と定義する．ノルム 1 の複素数が平面での回転を表現できるのと同様に，ノルム 1 の四元数は 3 次元の回転を表現できる．すなわち，ある単位ベクトル $e = (e_1, e_2, e_3)$ を軸として $\theta(rad)$ 回転した姿勢を

$$\begin{aligned} q_1 &= e_1 \sin(\theta/2) \\ q_2 &= e_2 \sin(\theta/2) \\ q_3 &= e_3 \sin(\theta/2) \\ q_4 &= \cos(\theta/2) \end{aligned} \quad (14)$$

で表現する．(14) 式を見てもわかるように q_1, \dots, q_4 の符号をすべて同時に反転させても同じ姿勢を表わす．それは例えば， $q = [0, 0, 0, 1]^T$ になるのは $\theta = 0, 4\pi, 8\pi, \dots$ のときであるが， $q = [0, 0, 0, -1]^T$ になるのは $\theta = 2\pi, 6\pi, 10\pi, \dots$ であることから符号を全て反転させると同じ姿勢になることがわかる．また，四元数どうしの乗算は回転の合成を意味する．四元数 q と回転行列 $R = [r_{ij}]$ には，

$$\begin{aligned} r_{11} &= q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \\ r_{12} &= 2(q_1q_2 + q_3q_4) \\ r_{13} &= 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ r_{21} &= 2(q_1q_2 - q_3q_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{22} &= -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \\
r_{23} &= 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\
r_{31} &= 2(q_1q_3 + q_2q_4) \\
r_{32} &= 2(q_2q_2 - q_1q_4) \\
r_{33} &= -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2
\end{aligned} \tag{15}$$

の関係が成り立つ．逆に回転行列 R を四元数 q に変換する関係式はいろいろと考えられるが，たとえば $q_4 \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
q_4 &= \pm\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}/2 \\
q_1 &= (r_{23} - r_{32})/4q_4 \\
q_2 &= (r_{31} - r_{13})/4q_4 \\
q_3 &= (r_{12} - r_{21})/4q_4
\end{aligned} \tag{16}$$

となる．この式の両辺を微分して，(5) を代入すると，次式が得られる．よって，人工衛星の姿勢を回転行列 R ではなく，四元数 q を用いて表現することができた．これによって特異点を避けることができる．

$$\dot{q} \triangleq \Sigma(q)\omega = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

4章において角速度オブザーバを設計する際にこの回転行列 R を用いることが多いので改めてここに記しておく．(15) より，

$$R = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

また R に関して以下のことが成り立ち，(80)(81)(82) の計算に用いる．

$$R^T S(\omega) R = S(R^T \omega) \|q\|^2 \tag{19}$$

$$R^T S(\omega) \|q\|^2 = S(R^T \omega) R^T \tag{20}$$

$$\dot{R}^T = -R^T S(\omega) \tag{21}$$

4. 角速度オブザーバの設計

4.1 1軸の場合

本研究の目的は角速度オブザーバの設計であるのだが、3軸でのオブザーバはリアプノフ関数を設計することが容易ではない。そこで、まず1軸においての角速度オブザーバの設計を試みることにした。

4.1.1 運動方程式

xy平面における ω_1 のみ考える。yz平面, zx平面は考えない。このとき, $\omega_2 = 0, \omega_3 = 0, \dot{q}_2 = 0, \dot{q}_3 = 0, \ddot{q}_2 = 0, \ddot{q}_3 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0$ となる。 q の微分の(17)は(22)のようになり, ω の微分は(6)であるが(23)のようになる。よって人工衛星の運動方程式は以下のように(22)(23)のような状態方程式となる。

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 \omega_1 \\ -q_1 \omega_1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_1 = J^{-1} \tau \quad (23)$$

q : 姿勢を表す四元数 (観測可能) . $\|q\| = 1$

ω : 角速度 (観測不可能)

4.1.2 オブザーバの構成

以下のように q, ω の推定値を定義する。

\tilde{q} : q の推定値 (設計可能).

$\tilde{\omega}$: ω の推定値 (設計可能).

$$e_\omega = \tilde{\omega} - \omega \rightarrow 0 \quad (24)$$

$$e_q = \tilde{q} - q \rightarrow 0 \quad (25)$$

(24)(25) 式のようにオブザーバで制御するのが目的である．ここで，1 軸においては q, q^{-1} は，(14) より

$$q = iq_1 + q_4 \quad (26)$$

$$q^{-1} = -iq_1 + q_4 \quad (27)$$

である．(25) 式は $q\tilde{q}^{-1} = (0, 1)^T$ と同等であるから，1 軸において $q\tilde{q}^{-1}$ を計算すると

$$\begin{aligned} q\tilde{q}^{-1} &= (-q_4\tilde{q}_1 + q_1\tilde{q}_4)i + (q_1\tilde{q}_1 + q_4\tilde{q}_4) \\ &\triangleq Q'_1 i + Q'_4 \end{aligned} \quad (28)$$

ノルム 1 の複素数が平面での回転を表現できるのと同様に，ノルム 1 の四元数は 3 次元の回転を表現できる．よって， q のノルムには $\|q\| = 1$ という拘束条件を与える．すると，1 軸において q のノルムは

$$\|q\|^2 = q_1^2 + q_4^2 = 1 \quad (29)$$

一方， q の推定値 \tilde{q} にも同様の拘束条件を与え， \tilde{q} のノルムは

$$\|\tilde{q}\|^2 = \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_4^2 = 1 \quad (30)$$

(30) より $\frac{d}{dt}\|\tilde{q}\|^2 = 0$ であり，その条件を満たす $\dot{\tilde{q}}$ は，必ず (31) のようになる．

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{q}_4 \omega'_1 \\ -\tilde{q}_1 \omega'_1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\omega'_1 \triangleq \tilde{\omega}_1 + f_1 \quad (32)$$

(31) において ω'_1 は設計可能な変数なので (32) のように定義する．(32) において f_1 は補正項で $q = \tilde{q}$ のときすなわち q が正しく推定できているとき $f_1 = 0$ となるように設計する．

$$\dot{\omega} = J^{-1}\tau \quad (33)$$

$$\dot{\tilde{\omega}} = J^{-1}\tau + f_2 \quad (34)$$

$$e_{\omega} = \dot{\tilde{\omega}} - \dot{\omega} = f_2 \quad (35)$$

f_2 は補正項で $e_q = 0$ のとき $f_2 = 0$ である .

$q\tilde{q}^{-1}$ の微分は

$$\frac{d}{dt}(q\tilde{q}^{-1}) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Q'_1 \\ Q'_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -Q'_4 \\ Q'_1 \end{bmatrix} e_\omega + f_1 \quad (36)$$

(36) のように Q'_1, Q'_4 の微分が Q'_1, Q'_4 を用いて容易に表現できる . よって偏差系のダイナミクスを構成することができた .

偏差系のダイナミクス

偏差系のダイナミクスは (37)(38)(39) のようになる .

$$\dot{Q}'_1 = -\frac{1}{2}Q'_4 e_\omega + f_1 \quad (37)$$

$$\dot{Q}'_4 = \frac{1}{2}Q'_1 e_\omega + f_1 \quad (38)$$

$$\dot{e}_\omega = f_2 \quad (39)$$

ここで , 補正項を設計するためにリアプノフ関数を選ぶこととする . 3 軸では容易にリアプノフ関数を設計できないことを記したが 1 軸の回転では偏差系のダイナミクスが比較的単純な構造であること . また , q ではなく Q で考えた時に f_1 を 1 次 , f_2 を 2 次になるように設計すれば , 偏差系のダイナミクスが同次なシステムであるために同次なシステムではリアプノフ関数が必ず存在するという利点から容易にリアプノフ関数を設計できる . 次節よりリアプノフ関数を用いてこのダイナミクスが大域的に安定であることを証明する . また , 次節でシステムが安定となるような f_1, f_2 を設計する .

4.1.3 リアプノフ関数

リアプノフ関数の候補を

$$V = (\sqrt{Q'^2_1 + Q'^2_4} - Q'_4) + \frac{1}{4k_2} e_\omega^2 > 0 \quad (40)$$

とする．ただし， $k_1, k_2 > 0$ ．その微分は

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\frac{1}{2}(Q_1'^2 + Q_4'^2)(2Q_1'\dot{Q}_1 + 2Q_4'\dot{Q}_4) - \dot{Q}_4 + \frac{1}{2k_2}e_\omega\dot{e}_\omega \\ &= -\frac{1}{2}Q_1'e_\omega - \frac{1}{2}Q_1'f_1 + \frac{1}{2k_2}e_\omega f_2\end{aligned}\quad (41)$$

$\dot{V} \leq 0$ となればいいので f_1, f_2 を以下のように選ぶ．

$$f_1 = k_1 \text{sgn}(Q_1')(\sqrt{Q_1'^2 + Q_4'^2} - Q_4') \quad (42)$$

$$f_2 = k_2 Q_1' \|Q\| \quad (43)$$

f_1, f_2 を (42)(43) のようにすると $V > 0, \dot{V} \leq 0$ となる．このような f_1, f_2 と構成することによってこのシステムは安定ということが出来る． f_1 は 1 次， f_2 は 2 次になっているのでこのシステムは同次である．

ただし， $\dot{V} = 0$ となるのは， $Q' = [0, 1]^T$ となる．このとき $\dot{Q}' = [0, 0]^T$ になる．(36) においてこのことが成り立つためには $\omega = \tilde{\omega}$ でなければならない．一方，(32) において $Q' = [0, 1]^T$ ならば $\omega' = \tilde{\omega}$ となる．よって $\tilde{\omega} = \omega$ となる．これは角速度が正しく推定できていることになる．この結果から，ラサールの定理によって 1 軸におけるの偏差系のダイナミクスは大域的に安定とすることができる．

角速度オブサーバ

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{q}} &= \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ -\dot{q}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\Sigma'(\tilde{q})(\tilde{\omega}_1 + f_1) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 \\ -q_1 \end{bmatrix} \{\tilde{\omega}_1 + k_1 \text{sgn}(Q_1')(\sqrt{Q_1'^2 + Q_4'^2} - Q_4')\}\end{aligned}\quad (44)$$

$$\tilde{\omega}_1 = J^{-1}\tau + k_2 Q_1' \|Q'\| \quad (45)$$

(44)(45) は ω 以外の q, Q' (Q' は q で構成されている)， $\tilde{\omega}_1$ で構成されている．よって 1 軸における大域的な角速度オブサーバを設計することができた．

4.2 3軸で主慣性モーメントが同じ場合

1軸でのオブザーバを参考にして3軸でのオブザーバを構成する．ここでは，慣性モーメントを $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ のように主慣性モーメントが全て同じ形であるとする．主慣性モーメントが全て同じであるということは，人工衛星が立方体や球のような形状に限られる．

4.2.1 運動方程式

人工衛星の運動方程式は (17)(6) となるので，改めてまとめて記すと

$$\dot{q} = \Sigma(q)\omega = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\dot{\omega} = J^{-1}S(\omega)J\omega + J^{-1}\tau \quad (47)$$

ここで，1軸の場合と同様に観測不能なのは ω のみである．

3軸の場合においても1軸の場合と同様に $q\tilde{q}^{-1}$ を計算すると

$$\begin{aligned} q\tilde{q}^{-1} &= (-q_4\tilde{q}_1 + q_3\tilde{q}_2 - q_2\tilde{q}_3 + q_1\tilde{q}_4)i \\ &+ (-q_3\tilde{q}_1 - q_4\tilde{q}_2 + q_1\tilde{q}_3 + q_2\tilde{q}_4)j \\ &+ (q_2\tilde{q}_1 - q_1\tilde{q}_2 - q_4\tilde{q}_3 + q_3\tilde{q}_4)k \\ &+ (q_1\tilde{q}_1 + q_2\tilde{q}_2 + q_3\tilde{q}_3 + q_4\tilde{q}_4) \\ &\triangleq Q_1i + Q_2j + Q_3k + Q_4 \end{aligned} \quad (48)$$

ここで q のノルムには $\|q\| = 1$ という拘束条件を与えているので， q のノルムは

$$\|q\|^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (49)$$

一方， q の推定値 \tilde{q} にも同様の拘束条件を与え， \tilde{q} のノルムは

$$\|\tilde{q}\|^2 = \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2 + \tilde{q}_4^2 = 1 \quad (50)$$

(50) より $\frac{d}{dt}\|\tilde{q}\|^2 = 0$ であり，その条件を満たす $\dot{\tilde{q}}$ は，必ず (51) のようになる．

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{q}_4 & -\tilde{q}_3 & \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 & \tilde{q}_4 & -\tilde{q}_1 \\ -\tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 & \tilde{q}_4 \\ -\tilde{q}_1 & -\tilde{q}_2 & -\tilde{q}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{bmatrix} = \Sigma(\tilde{q})\omega' \quad (51)$$

ここで， ω' は設計可能な変数である．

4.2.2 角速度オブザーバの構成

$\tilde{\omega}$ を真値に漸近追従させるような角速度オブザーバを設計するために偏差系のダイナミクスを構成する．偏差系のダイナミクスは，慣性モーメント J が主慣性モーメントが全て同じであれば q, ω で構成できる．まず角速度 ω の偏差をとることにする．(47) において，主慣性モーメントが全て同じであることと， $S(\omega)\omega = 0$ であることから，

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\omega}} &= J^{-1}S(\omega)J\omega + J^{-1}\tau \\ &= J^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + J^{-1}\tau \\ &= J^{-1}\tau \end{aligned} \quad (52)$$

ω の推定値の微分は f_2 を補正項とすると，例えば以下の形が考えられる．

$$\dot{\tilde{\omega}} = J^{-1}\tau + f_2 \quad (53)$$

偏差をとると

$$e_\omega \triangleq \tilde{\omega} - \omega \quad (54)$$

$$\dot{e}_\omega = f_2 \quad (55)$$

となる .

次に q の偏差をとることにするが , 1 軸の場合と同様に $\tilde{q} - q$ ではなくて , $q\tilde{q}^{-1}$ をとることにする . (56)(57) のように制御するのがオブザーバの目的である .

$$e_\omega = \tilde{\omega} - \omega \rightarrow 0 \quad (56)$$

$$e_q = \tilde{q} - q \rightarrow 0 \quad (57)$$

$q = \tilde{q}$ は $q\tilde{q}^{-1} = (0, 0, 0, 1)^T$ と同等である . そこで偏差ダイナミクスにおいて位置の誤差を $q - \tilde{q}$ のような差ではなく $q\tilde{q}^{-1}$ のような比で考えることにする . また , $q\tilde{q}^{-1} \triangleq Q$ のように定義する .

$$q\tilde{q}^{-1} \triangleq Q \quad (58)$$

$$\begin{aligned} Q &= (-q_4\tilde{q}_1 + q_3\tilde{q}_2 - q_2\tilde{q}_3 + q_1\tilde{q}_4)i \\ &+ (-q_3\tilde{q}_1 - q_4\tilde{q}_2 + q_1\tilde{q}_3 + q_2\tilde{q}_4)j \\ &+ (q_2\tilde{q}_1 - q_1\tilde{q}_2 - q_4\tilde{q}_3 + q_3\tilde{q}_4)k \\ &+ (q_1\tilde{q}_1 + q_2\tilde{q}_2 + q_3\tilde{q}_3 + q_4\tilde{q}_4) \\ &\triangleq Q_1i + Q_2j + Q_3k + Q_4 \end{aligned} \quad (59)$$

(59) で $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)^T = (0, 0, 0, 1)^T$ とするのがオブザーバの目的である . ここで , 回転行列 R は (18) より

$$R = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (60)$$

であるので回転行列 R の推定値 \tilde{R} は

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_3^2 + \tilde{q}_4^2 & 2(\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \tilde{q}_3\tilde{q}_4) & 2(\tilde{q}_1\tilde{q}_3 - \tilde{q}_2\tilde{q}_4) \\ 2(\tilde{q}_1\tilde{q}_2 - \tilde{q}_3\tilde{q}_4) & -\tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_3^2 + \tilde{q}_4^2 & 2(\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_1\tilde{q}_4) \\ 2(\tilde{q}_1\tilde{q}_3 + \tilde{q}_2\tilde{q}_4) & 2(\tilde{q}_2\tilde{q}_3 - \tilde{q}_1\tilde{q}_4) & -\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2 + \tilde{q}_4^2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

である．ここで Q の微分は以下のように回転行列 \tilde{R} を利用することによって (46)(51) のように Σ を用いた形で表わすことができる．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Q) &= \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{Q}_3 \\ \dot{Q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q_4 & -Q_3 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 & -Q_1 \\ -Q_2 & Q_1 & Q_4 \\ -Q_1 & -Q_2 & -Q_3 \end{bmatrix} (-\tilde{R}^T)(\omega - \omega') \\ &= \Sigma(Q)(-\tilde{R}^T)(\omega - \omega') \end{aligned} \quad (62)$$

ここで ω' は設計可能な変数なので，

$$\omega' = \tilde{\omega} - f_1 \quad (63)$$

とする．ここで， f_1 は補正項である．すると，(62) は

$$\frac{d}{dt}(Q) = \Sigma(Q)\tilde{R}^T(e_\omega + f_1) \quad (64)$$

\tilde{R} によって容易に Q の微分を $\Sigma(Q)$ を用いて表わすことができた． Q の偏差を e_ω で表わすことができればオブザーバは容易に構成できるので，これによりオブザーバを構成することができる．

偏差系のダイナミクスは (62)(55) より以下のようなになる .

偏差系のダイナミクス

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(Q) &= \Sigma(Q)\tilde{R}^T(e_\omega + f_1) \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q_4 & -Q_3 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 & -Q_1 \\ -Q_2 & Q_1 & Q_4 \\ -Q_1 & -Q_2 & -Q_3 \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} -\tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2 - \tilde{q}_4^2 & 2(\tilde{q}_3\tilde{q}_4 - \tilde{q}_1\tilde{q}_2) & -2(\tilde{q}_2\tilde{q}_4 + \tilde{q}_1\tilde{q}_3) \\ -2(\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \tilde{q}_3\tilde{q}_4) & \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2 - \tilde{q}_4^2 & 2(\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_1\tilde{q}_4) \\ 2(\tilde{q}_2\tilde{q}_4 - \tilde{q}_1\tilde{q}_3) & -2(\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_1\tilde{q}_4) & \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_3^2 - \tilde{q}_4^2 \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot (e_\omega + f_1) \tag{65}
\end{aligned}$$

$$e_\omega = f_2 \tag{66}$$

4.2.3 リアプノフ関数

リアプノフ関数の候補を 1 軸でのシステムにおけるリアプノフ関数を参考に以下のように選ぶ .

$$V = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4^2} + \frac{1}{4}e_\omega^T e_\omega > 0 \tag{67}$$

その微分は

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4^2)(2Q_1\dot{Q}_1 + 2Q_2\dot{Q}_2 + 2Q_3\dot{Q}_3 + 2Q_4\dot{Q}_4) \\
&\quad - \dot{Q}_4 + \frac{1}{2}e_\omega^T e_\omega \\
&= \frac{1}{2}(-Q_1, -Q_2, -Q_3)R^T(e_\omega + f_1) + \frac{1}{2}e_\omega^T f_2 \\
&= \frac{1}{2}(-Q_1, -Q_2, -Q_3)R^T e_\omega + \frac{1}{2}e_\omega^T f_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(-Q_1, -Q_2, -Q_3)R^T f_1 \tag{68}
\end{aligned}$$

となる． $\dot{V} \leq 0$ となればよいので， f_1, f_2 を以下のように選ぶ．

$$f_1 = k_1 \tilde{R}(Q_1, Q_2, Q_3)^T \quad (69)$$

$$f_2 = k_2 \tilde{R}^T(Q_1, Q_2, Q_3)^T \quad (70)$$

k_1, k_2 はゲインで， $k_1 > 0, k_2 > 0$ とする．ここで補正項 f_1, f_2 は， $q = \tilde{q}$ のときに $f_1 = 0, f_2 = 0$ となっている．このように f_1, f_2 を構成することによって $V > 0, \dot{V} \leq 0$ を言うことができる．ここで， $\dot{V} = 0$ のとき $Q = [0, 0, 0, 1]^T$ となる，このとき $\dot{Q} = [0, 0, 0, 0]^T$ になる．(62)においてこのことが成り立つためには $\tilde{R}^T(\omega - \omega') = 0$ にならなければならない． \tilde{R}^T は正則であるので $\omega = \omega'$ となる．一方(63)において $Q = [0, 0, 0, 1]^T$ ならば $\omega' = \tilde{\omega}$ となる．よって， $\omega = \tilde{\omega}$ となる．これは角速度 ω が正しく推定できていることになる．この結果からラサールの定理によって偏差系のダイナミクスは大域的に安定なシステムと言うことができる．

角速度オブザーバ

(51)(53)(63)(69)(70) をまとめると，

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= \Sigma(\tilde{q})\omega' \\ &= \Sigma(\tilde{q})(\tilde{\omega} + f_1) \\ &= \Sigma(\tilde{q})(\tilde{\omega} + k_1 \tilde{R}(Q_1, Q_2, Q_3)^T) \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\omega}} &= J^{-1}\tau + f_2 \\ &= J^{-1}\tau + k_2 \tilde{R}^T(Q_1, Q_2, Q_3)^T \end{aligned} \quad (72)$$

(71)(72) は ω 以外の q, Q (Q は q で構成されている)， \tilde{q}, \tilde{R} (\tilde{R} は \tilde{q} で構成されている回転行列)， $\tilde{\omega}$ で構成されている．よって主慣性モーメントが全て同じ場合の3軸における大域的な角速度オブザーバを設計することができた．

4.3 3軸で主慣性モーメントが同じでない場合

本節では, (17)(6) を合わせたシステムに対して ω の推定値 $\tilde{\omega}$ と q の推定値 \tilde{q} が真値に近づくようなオブザーバを設計する. 前節では慣性モーメントが $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ のように人工衛星が立方体や球のような形状と限って主慣性モーメントが全て同じ場合のオブザーバを設計した. 本節では ω の偏差をとるのではなく一般化運動量 $R^T J \omega$ の偏差をとることによって慣性モーメントが $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ のように人工衛星がどのような形状でも ω を推定できるオブザーバを設計する.

4.3.1 運動方程式

(17)(6) をまとめると次式が得られる.

$$\dot{q} = \Sigma(q)\omega \quad (73)$$

$$\dot{\omega} = J^{-1}S(\omega)J\omega + J^{-1}\tau \quad (74)$$

q : 姿勢を表す四元数 (観測可能)

ω : 角速度 (観測不可能)

q のノルムに $\|q\| = 1$ という拘束条件与えているので, q のノルムは

$$\|q\|^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (75)$$

一方, q の推定値 \tilde{q} にも同様の拘束条件を与え, \tilde{q} のノルムは

$$\|\tilde{q}\|^2 = \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2 + \tilde{q}_4^2 = 1 \quad (76)$$

(76) より $\frac{d}{dt}\|\tilde{q}\|^2 = 0$ であり, その条件を満たす $\dot{\tilde{q}}$ は, 必ず (77) のような形に書くことができる.

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{q}_4 & -\tilde{q}_3 & \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 & \tilde{q}_4 & -\tilde{q}_1 \\ -\tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 & \tilde{q}_4 \\ -\tilde{q}_1 & -\tilde{q}_2 & -\tilde{q}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{bmatrix} = \Sigma(\tilde{q})\omega' \quad (77)$$

ここで, ω' は設計可能な変数であり, ω' の設計は次節で行う.

4.3.2 角速度オブザーバの構成

$\tilde{\omega}$ を真値に漸近追従させるような角速度オブザーバを設計するために偏差系のダイナミクスを構成する. 偏差系のダイナミクスは q, ω について構成すると, ω の偏差をとったときに慣性モーメント J が残り, J の主慣性モーメントが全て同じでない場合の角速度オブザーバを設計することが非常に困難である. そこで本研究では一般化運動量 $p = R^T J \omega$ のような運動量の偏差をとり, 偏差系のダイナミクスを p, q について構成することにした. まず, 一般化運動量 p, \tilde{p} を以下のように定義する.

$$p = R^T J \omega \quad (78)$$

$$\tilde{p} = \tilde{R}^T J \tilde{\omega} \quad (79)$$

ここで, (79) における $\tilde{\omega}$ の微分を以下のように選ぶ.

$$\dot{\tilde{\omega}} = J^{-1} S(\omega') J \tilde{\omega} + J^{-1} \tilde{R} R^T \tau + J^{-1} \tilde{R} f_2 \quad (80)$$

(80) において f_2 は補正項であり, $q = \tilde{q}$ のとき $f_2 = 0$ となるように構成する. $\dot{p}, \dot{\tilde{p}}$ は以下ようになる.

$$\dot{p} = \frac{d}{dt}(R^T J \omega) = R^T \tau \quad (81)$$

$$\dot{\tilde{p}} = \frac{d}{dt}(\tilde{R}^T J \tilde{\omega}) = R^T \tau + f_2 \quad (82)$$

e_p を (83) のように定義すると, \dot{e}_p は (84) のようになる.

$$e_p = p - \tilde{p} = R^T J \omega - \tilde{R}^T J \tilde{\omega} \quad (83)$$

$$\dot{e}_p = \frac{d}{dt}(R^T J \omega - \tilde{R}^T J \tilde{\omega}) = -f_2 \quad (84)$$

よって, (80) のように $\tilde{\omega}$ を選ぶと \dot{e}_p は (84) のようになる. (80) の誤差補正項以外にも R を含んでいるが, R は直接観測可能な衛星の姿勢行列なので問題はない. 以上のように運動量 p の偏差をとることによって慣性モーメント J が含まれない式になるので, 主慣性モーメントが全て同じでない場合でも角速度オブザーバを設計することができる.

次に q について考える. (85)(86) のように制御するのがオブザーバの目的である.

$$e_\omega = \tilde{\omega} - \omega \rightarrow 0 \quad (85)$$

$$e_q = \tilde{q} - q \rightarrow 0 \quad (86)$$

$q = \tilde{q}$ は $q\tilde{q}^{-1} = (0, 0, 0, 1)^T$ と同等である. そこで偏差ダイナミクスにおいて位置の誤差を $q - \tilde{q}$ のような差ではなく $q\tilde{q}^{-1}$ のような比で考えることにする.

$$\begin{aligned} q\tilde{q}^{-1} &= (-q_4\tilde{q}_1 + q_3\tilde{q}_2 - q_2\tilde{q}_3 + q_1\tilde{q}_4)i \\ &+ (-q_3\tilde{q}_1 - q_4\tilde{q}_2 + q_1\tilde{q}_3 + q_2\tilde{q}_4)j \\ &+ (q_2\tilde{q}_1 - q_1\tilde{q}_2 - q_4\tilde{q}_3 + q_3\tilde{q}_4)k \\ &+ (q_1\tilde{q}_1 + q_2\tilde{q}_2 + q_3\tilde{q}_3 + q_4\tilde{q}_4) \\ &\triangleq Q_1i + Q_2j + Q_3k + Q_4 \end{aligned} \quad (87)$$

(87) で $q\tilde{q}^{-1} = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)^T = (0, 0, 0, 1)^T$ とするのがオブザーバの目的である. ここで $q\tilde{q}^{-1}$ の微分は以下のように (17)(77) のように Σ を用いた形で表わすことができる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q\tilde{q}^{-1}) &= \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 & \dot{Q}_2 & \dot{Q}_3 & \dot{Q}_4 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q_4 & -Q_3 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 & -Q_1 \\ -Q_2 & Q_1 & Q_4 \\ -Q_1 & -Q_2 & -Q_3 \end{bmatrix} (\tilde{R}^T(\omega - \omega')) \end{aligned}$$

$$= \Sigma(q\tilde{q}^{-1})(\tilde{R}^T(\omega - \omega')) \quad (88)$$

(88)において ω' は設計可能な変数であることから $q\tilde{q}^{-1}$ の微分の式に $e_p = R^T J\omega - \tilde{R}^T J\tilde{\omega}$ という項が入るようにすると(89)のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q\tilde{q}^{-1}) &= \Sigma(q\tilde{q}^{-1})(\tilde{R}^T J^{-1}R(R^T J\omega - \tilde{R}^T J\tilde{\omega}) + f_1) \\ &= \Sigma(q\tilde{q}^{-1})(\tilde{R}^T J^{-1}R e_p + f_1) \end{aligned} \quad (89)$$

(88)が(89)になるように ω' を構成すると

$$\omega' = J^{-1}R\tilde{R}^T J\tilde{\omega} - \tilde{R}f_1 \quad (90)$$

ここで f_1 は補正項であり, $q = \tilde{q}$ のとき $f_1 = 0$ となるように構成する。よって, q についての偏差系ダイナミクスは(89)になる。 R は観測可能な q で構成され, e_p に関しては $\tilde{\omega}$ が設計可能であるために(83)より設計可能である。よって,(89)の $\frac{d}{dt}(q\tilde{q}^{-1})$ は設計可能である..

(88)(90)(84)より偏差系のダイナミクスは以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q\tilde{q}^{-1}) &= \Sigma(q\tilde{q}^{-1})(\tilde{R}^T J^{-1}R e_p + f_1) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q_4 & -Q_3 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 & -Q_1 \\ -Q_2 & Q_1 & Q_4 \\ -Q_1 & -Q_2 & -Q_3 \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot (\tilde{R}^T J^{-1}R e_p + f_1) \\ \frac{d}{dt}e_p &= -f_2 \end{aligned} \quad (91)$$

4.3.3 リアプノフ関数

この章ではリアプノフ関数を用いて f_1, f_2 を設計する。リアプノフ関数の候補は

$$\begin{aligned} V &= (\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4^2} - Q_4) \\ &+ \frac{1}{4k_2} e_p^T e_p \geq 0 \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -\dot{Q}_4 + \frac{1}{2k_2} \dot{e}_p^T e_p \\
&= \frac{1}{2} (Q_1, Q_2, Q_3) (\tilde{R}^T J^{-1} R e_p + f_1) \\
&\quad - \frac{1}{2k_2} f_2^T e_p
\end{aligned} \tag{93}$$

$\dot{V} \leq 0$ となればよいので f_1, f_2 を以下のように選ぶ .

$$f_1 = -k_1 (Q_1, Q_2, Q_3)^T \tag{94}$$

$$f_2 = k_2 ((Q_1, Q_2, Q_3) \tilde{R}^T J^{-1} R)^T \tag{95}$$

このとき k_1, k_2 はゲインで , $k_1 > 0, k_2 > 0$ とする . ここで補正項 f_1, f_2 は , $q = \tilde{q}$ のときに $f_1 = 0, f_2 = 0$ となっている . このように f_1, f_2 を構成することによって $V > 0, \dot{V} \leq 0$ を言うことができる . ここで , $\dot{V} = 0$ のとき $Q = [0, 0, 0, 1]^T$ となる . このとき $\dot{Q} = [0, 0, 0, 0]^T$ になる . (88) においてこのことが成り立つためには $\tilde{R}^T (\omega - \omega') = 0$ にならなければならない . \tilde{R}^T は正則であるので $\omega = \omega'$ となる . 一方 (90) において $Q = [0, 0, 0, 1]^T$ ならば $\omega' = \tilde{\omega}$ となる . よって , $\omega = \tilde{\omega}$ となる . これは角速度 ω が正しく推定できていることになる . この結果から , ラサールの定理によって偏差系のダイナミクスは大域的に安定なシステムとすることができる . [5]

(77)(80)(90)(94)(95) より角速度オブザーバは以下のようなになる .

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{q}} &= \Sigma(\tilde{q}) \omega' \\
&= \Sigma(\tilde{q}) (J^{-1} R \tilde{R}^T J \tilde{\omega} - \tilde{R} f_1) \\
&= \Sigma(\tilde{q}) (J^{-1} R \tilde{R}^T J \tilde{\omega} + k_1 R (Q_1, Q_2, Q_3)^T)
\end{aligned} \tag{96}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\omega}} &= J^{-1} S(\omega') J \tilde{\omega} + J^{-1} \tilde{R} R \tau + J^{-1} \tilde{R} f_2 \\
&= J^{-1} S (J^{-1} R \tilde{R}^T J \tilde{\omega} + k_1 R (Q_1, Q_2, Q_3)^T) J \tilde{\omega} + J^{-1} \tilde{R} R^T \tau \\
&\quad + k_2 J^{-1} \tilde{R} ((Q_1, Q_2, Q_3) \tilde{R}^T J^{-1} R)^T
\end{aligned} \tag{97}$$

(96)(97) は ω 以外の q, Q (Q は q で構成されている) , \tilde{q}, R, \tilde{R} (R は q, \tilde{R} は \tilde{q} で構成されている回転行列) , $\tilde{\omega}$ で構成されている . よって主慣性モーメントが全て違う場合の 3 軸における大域的な角速度オブザーバを設計することができた .

5. 数値シミュレーション

本章では角速度オブザーバの有効性を数値シミュレーションで確認する。

5.1 1軸における角速度オブザーバ

5.1.1 モデル

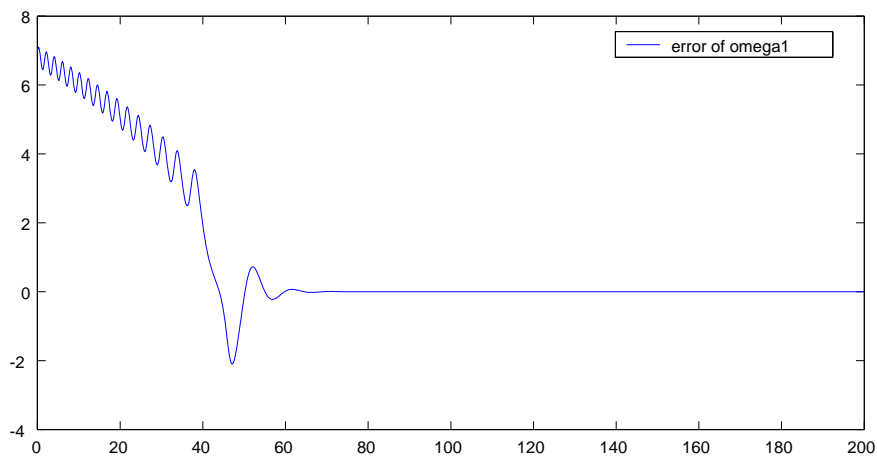


図 1 1軸における e_{ω_1} (モデル)

$$\text{ゲイン} \begin{cases} k_1 = 1.0 \\ k_2 = 1.0 \end{cases}, \quad \text{慣性モーメント } J = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

入力トルク $\tau = 0$

$q, \tilde{q}, \omega, \tilde{\omega}$ の初期値を以下のようにした。

$$q(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}(0) = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix} \quad \omega(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \tilde{\omega}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

5.1.2 モデル

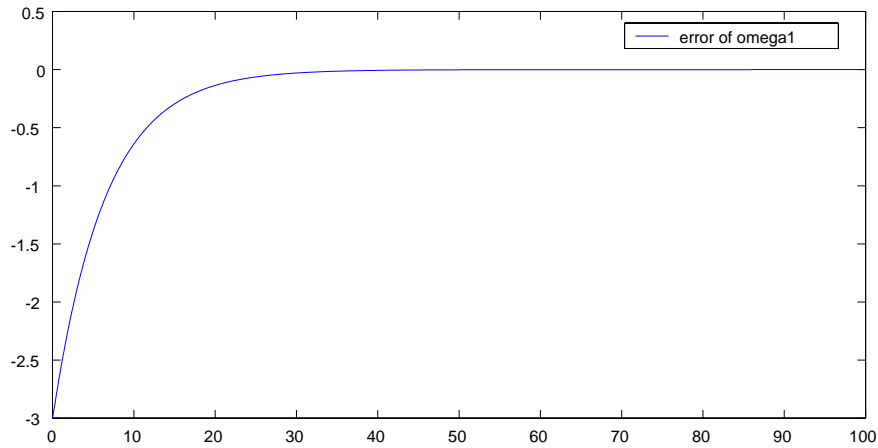


図 2 1 軸における e_{ω_1} (モデル)

$$\text{ゲイン} \begin{cases} k_1 = 10.0 \\ k_2 = 6.0 \end{cases}, \quad \text{慣性モーメント } J = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

入力トルク $\tau = 0$

$q, \tilde{q}, \omega, \tilde{\omega}$ の初期値を以下のようにした .

$$q(0) = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}(0) = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix} \quad \omega(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\omega}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

考察

理論においては 1 軸に関する角速度オブザーバの大域的安定性が証明できたが , シミュレーションにおいても図 1 , 図 2 からわかるように誤差がゼロに収束していることがわかる .

図 1 においては , ゲインを $k_1 = 1.0, k_2 = 1.0$ としたために収束するのに時間が

かかっている．グラフではわかりにくいですが100秒あたりではまだ振動しているが，150秒あたりで振動しなくなり完全に $\omega = \tilde{\omega}$ となっている．また図2においては，慣性モーメントを全て違うようにしたが0に収束していることがわかる．図1と図2を比べるとゲインの影響で図2では最初から振動せずに収束していることがわかる．

5.2 3軸で主慣性モーメントが全て同じ場合

5.2.1 モデル

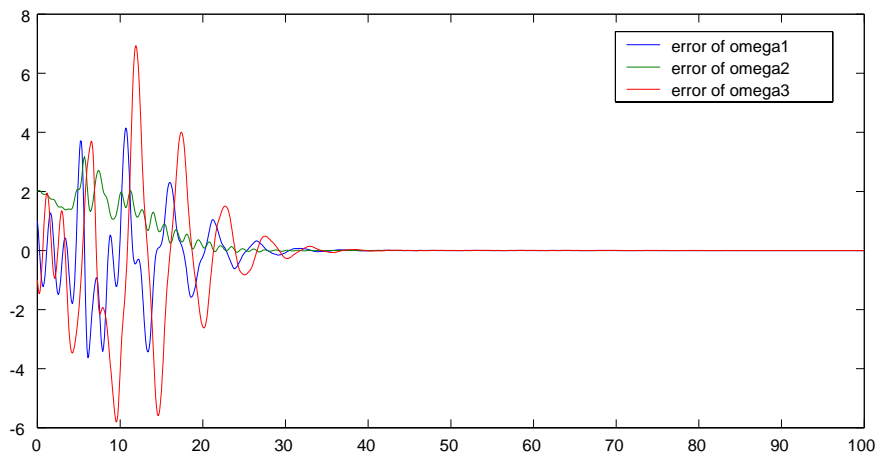


図3 3軸で主慣性モーメントが全て同じ場合の e_ω (モデル)

$$\text{ゲイン} \begin{cases} k_1 = 1.0 \\ k_2 = 1.0 \end{cases}, \quad \text{慣性モーメント } J = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

入力トルク $\tau = 0$

$q, \tilde{q}, \omega, \tilde{\omega}$ の初期値を以下のようにした .

$$q(0) = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}(0) = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix} \quad \omega(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\omega}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

5.2.2 モデル

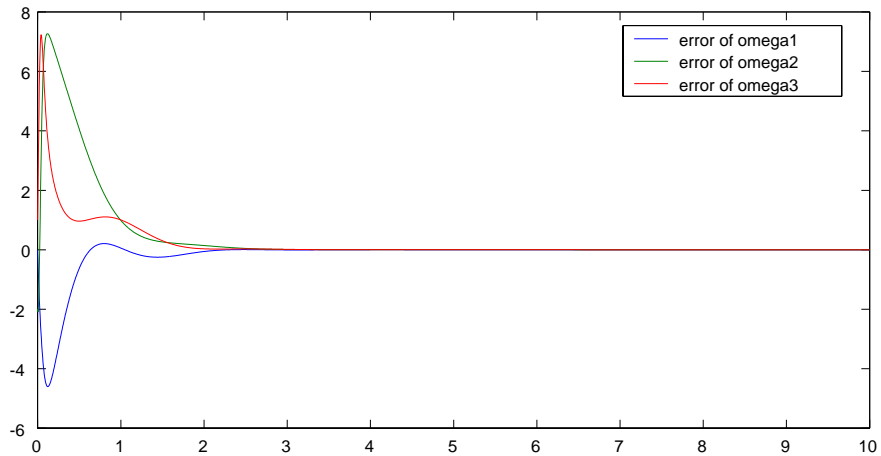


図 4 3軸で主慣性モーメントが全て同じ場合の e_ω (モデル)

ゲイン $\begin{cases} k_1 = 5.0 \\ k_2 = 10.0 \end{cases}$, 慣性モーメント $J = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$

入力トルク $\tau = 0$

$q, \tilde{q}, \omega, \tilde{\omega}$ の初期値を以下のようにした .

$$q(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \omega(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \tilde{\omega}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

考察

理論においては3軸で主慣性モーメントが全て同じ場合に関する角速度オブザーバの大域的安定性が証明できたが、シミュレーションにおいても図3、図4からわかるように誤差がゼロに収束していることがわかる。

図3、図4の結果を比べると1軸よりも顕著にゲインの影響が出ていることがわかる。ゲインの影響で収束時間が明らかに違うことがわかる。さらに、最初の挙動を比べると図3では激しく振動しているが、図4では最初に振動しているがすぐに収束に向かっている。この結果から慣性モーメントが全て同じ場合では、ある程度ゲインが大きくないと収束するのに時間がかかることがわかる。

5.3 3軸で主慣性モーメントが全て同じでない場合

本研究の主題は3軸で主慣性モーメントが全て同じ場合の角速度オブザーバの設計であるので、それについて特に細かくシミュレーションを行い、その結果を示す。

5.3.1 モデル

$$\text{ゲイン} \begin{cases} k_1 = 7.0 \\ k_2 = 10.0 \end{cases}, \quad \text{慣性モーメント } J = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

入力トルク $\tau = 0$

$q, \tilde{q}, \omega, \tilde{\omega}$ の初期値を以下のようにした。

$$q(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \omega(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\omega}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

図5は3軸のオブザーバについての ω_1 の挙動を示したものである。図6はその際の ω_1 の推定値である $\tilde{\omega}_1$ の挙動である。図5を見てわかるように入力を0とし

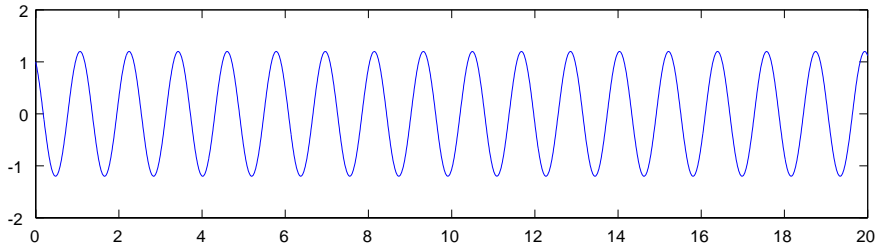


図 5 3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の ω_1 (モデル)

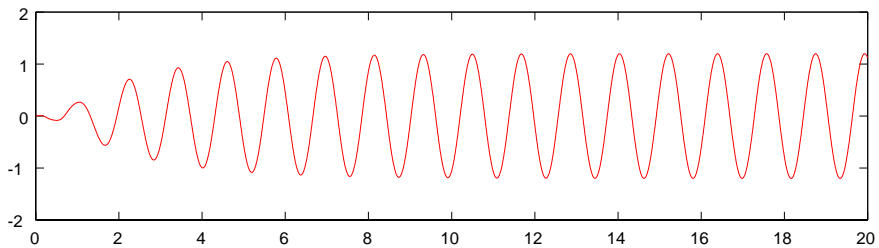


図 6 3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の $\tilde{\omega}_1$ (モデル)

ているために ω は自由回転をしていることがわかる．また，図 5 と図 6 を比較すると $\tilde{\omega}_1$ は滑らかに ω_1 に追従している． ω_1 と $\tilde{\omega}_1$ の図を重ねたものを図 7 に示し，図 8 に ω_1 と $\tilde{\omega}_1$ の誤差すなわち $\tilde{\omega}_1 - \omega_1$ を示す．図 8 で誤差が 0 に収束するまでに振動しているのは図 5，図 6 からわかるように推定値 $\tilde{\omega}_1$ が滑らかに真値 ω_1 に近づいているためである．

最後に図 9 に e_{ω_1} のみでなく同じ初期値での e_ω を示す．

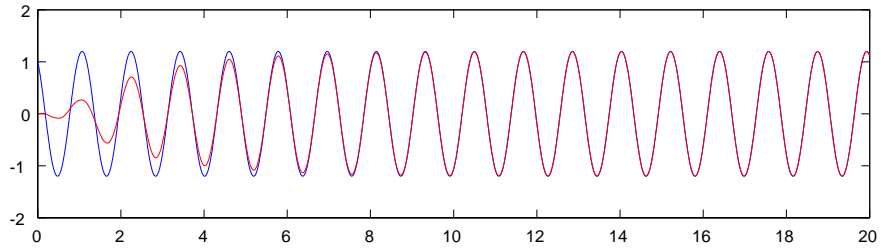


図 7 3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の $\omega_1, \tilde{\omega}_1$ (モデル)

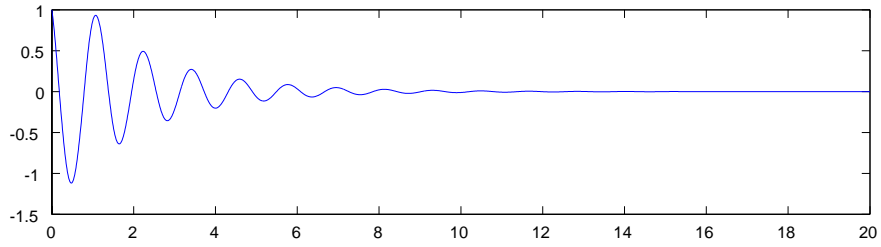


図 8 3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の e_{ω_1} (モデル)

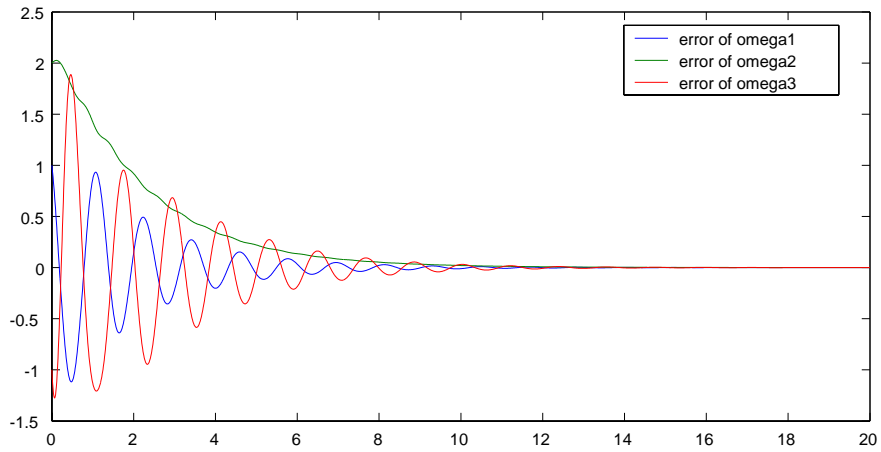


図 9 3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の e_{ω} (モデル)

5.3.2 モデル

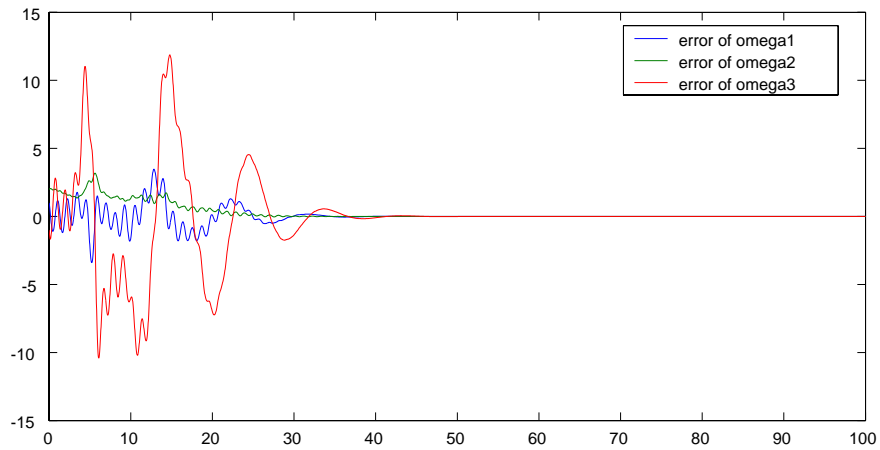


図 10 3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の e_ω (モデル)

$$\text{ゲイン} \begin{cases} k_1 = 1.0 \\ k_2 = 1.0 \end{cases}, \quad \text{慣性モーメント } J = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

入力トルク $\tau = 0$

$q, \tilde{q}, \omega, \tilde{\omega}$ の初期値を以下のようにした .

$$q(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \omega(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\omega}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.3.3 モデル

ゲイン以外をモデル と同様の初期値でシミュレーションを行った .

$$\text{ゲイン} \begin{cases} k_1 = 10.0 \\ k_2 = 7.0 \end{cases}$$

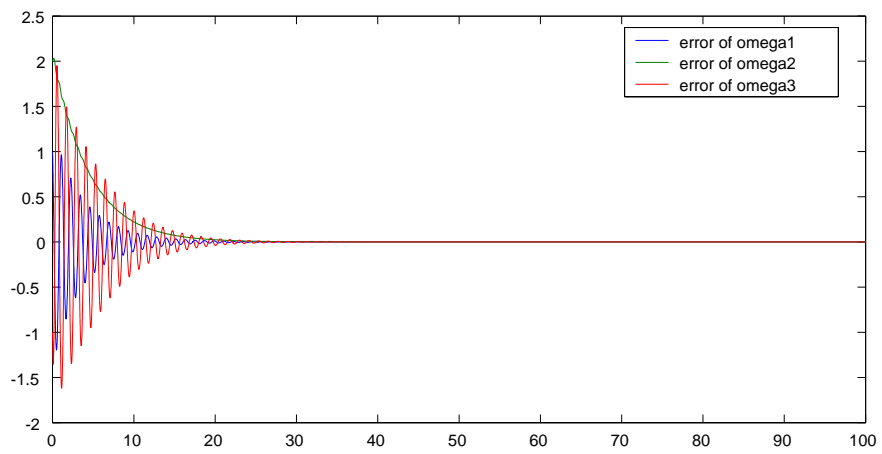


図 11 3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の e_ω (モデル)

5.3.4 モデル

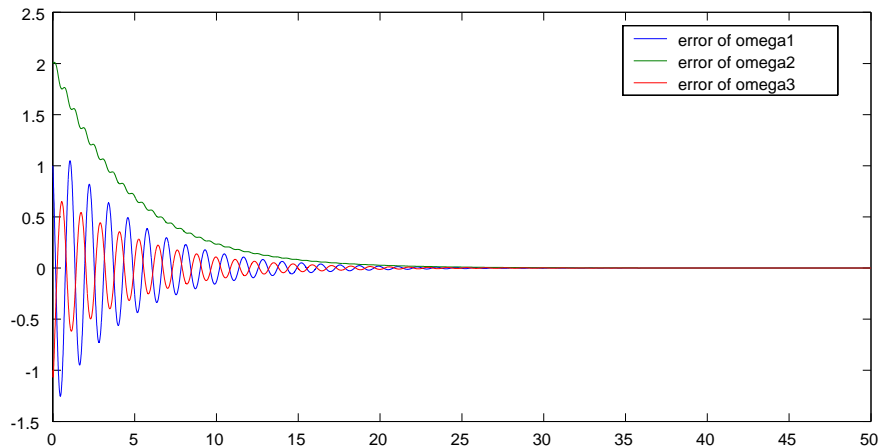


図 12 3 軸で主慣性モーメントが全て違う場合の e_ω (モデル)

ゲイン以外をモデルと同様の初期値でシミュレーションを行った。

$$\text{ゲイン} \begin{cases} k_1 = 100.0 \\ k_2 = 70.0 \end{cases}$$

考察

理論においては3軸で主慣性モーメントが全て違う場合に関する角速度オブザーバの大域的安定性が証明できた。シミュレーションにおいても図10, 図11, 図12からわかるように誤差がゼロに収束していることがわかる。

図10と図11を比べると, 収束時間はほぼ変わらないものの最初の挙動が違ってくる。図10では不規則に振動しているが, 図11では激しく振動している。それはオブザーバが原因ではなくて入力を0としているため自由回転しているためである。一方, 図11と図12を比べるとグラフではわかりにくい。図11では80秒あたりまで少し振動しているのに対して図12では, 40秒あたりで収束していることがわかる。

この結果と前節の主慣性モーメントが全て同じ場合と比べると収束時間という

点で慣性モーメントが同じ場合と比べるとゲインがかなり大きくないと早く収束しないことがわかる。

5.4 姿勢制御則と組み合わせた場合

本論文では、主慣性モーメントが全て違っていても、大域的に角速度を推定する非線形オブザーバを設計した。本研究では、角速度を推定することが目的であるが、人工衛星の姿勢制御を行う際に角速度オブザーバを用いて姿勢制御を行う手法が考えられる。そこで本節では、コントローラを (100) とし、角速度オブザーバと組み合わせたときのガスジェット方式による場合の姿勢制御シミュレーションを示す。

ガスジェット方式による場合の人工衛星の運動方程式は (98)(99) である。

$$\dot{R} = S(\omega)R \quad (98)$$

$$J\dot{\omega} = S(\omega)J\omega + \tau \quad (99)$$

コントローラを (100) のようにしたのは角速度オブザーバを用いて角速度を正しく推定すると $e_\omega = \tilde{\omega} - \omega \rightarrow 0$ となる。このとき (99) において $S(\omega)J\omega$ をキャンセルしてコントローラで (100) の第二項のみが残るようにしたかったからである。

$$\tau = -S(\tilde{\omega})J\tilde{\omega} + J \left[-\alpha_0 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{pmatrix} \right] \quad (100)$$

ただし、 $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0$ 。

モデル

$$\text{ゲイン} \begin{cases} k_1 = 5.0 \\ k_2 = 10.0 \\ \alpha_0 = 4.0 \\ \alpha_1 = 2.0 \end{cases}, \quad \text{慣性モーメント } J = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.25 \end{bmatrix}$$

入力トルク τ は (100) と同じ。

$q, \tilde{q}, \omega, \tilde{\omega}$ の初期値を以下のようにした .

$$q(0) = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \omega(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \tilde{\omega}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

モデル

$$\text{ゲイン} \begin{cases} k_1 = 10.0 \\ k_2 = 20.0 \\ \alpha_0 = 10.0 \\ \alpha_1 = 5.0 \end{cases}, \quad \text{慣性モーメント } J = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.0 \end{bmatrix}$$

入力トルク τ は (100) と同じ .

$q, \tilde{q}, \omega, \tilde{\omega}$ の初期値を以下のようにした .

$$q(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \omega(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\omega}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

考察

モデル の図 15 より 5 秒あたりで e_ω が 0 に収束していることがわかる . $e_\omega \rightarrow 0$ となるとコントローラの第二項だけが残るので図 16 より $q = [0, 0, 0, 1]^T$ に収束し , これにより姿勢制御できていることがわかる .

モデル の図 13 では 25 秒あたりに e_ω が 0 に収束していることがわかる . 図 14 では同じく 25 秒あたりで姿勢制御できていることがわかる .

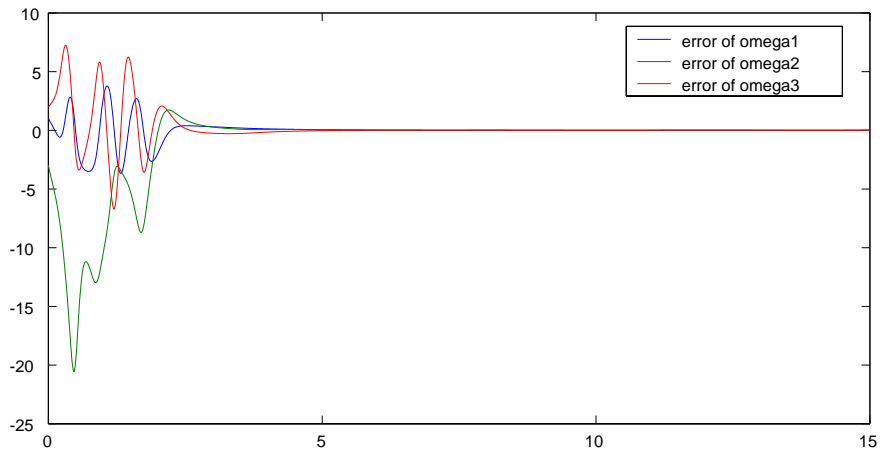


図 13 姿勢制御則と組み合わせた場合の e_ω (モデル)

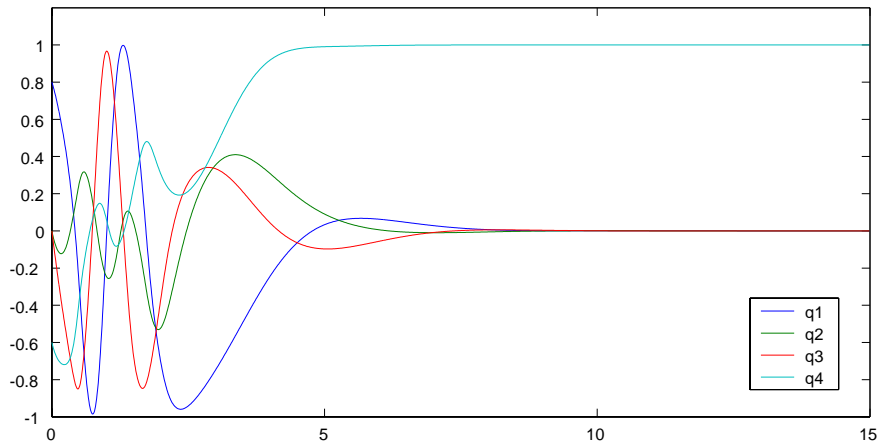


図 14 姿勢制御則と組み合わせた場合の q (モデル)

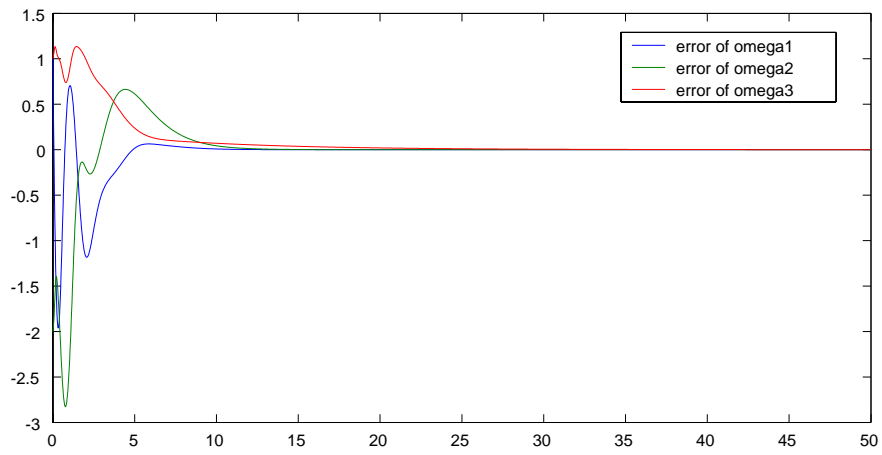


図 15 姿勢制御則と組み合わせた場合の e_ω (モデル)

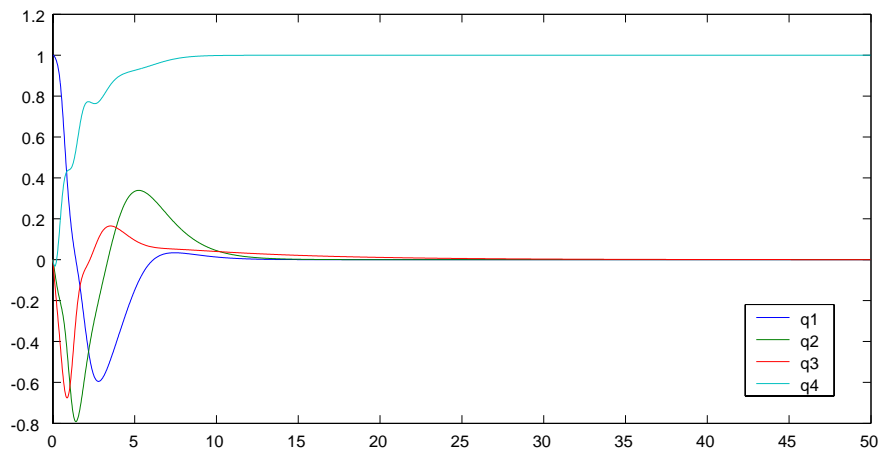


図 16 姿勢制御則と組み合わせた場合の q (モデル)

6. おわりに

本研究では，同次性の概念を用いて，人工衛星の姿勢を回転行列 R を用いるのではなく四元数 q を用いて表現し，姿勢を表わす四元数と運動量の偏差をとることによってダイナミクスを構成し，主慣性モーメントが全て違う場合でも大域的な角速度オブザーバを設計した．また，この理論の有効性を確認した．しかしながら，角速度オブザーバと姿勢制御と組み合わせた場合はシミュレーションで姿勢制御できていることは示したが大域的安定性にはふれていない．今後は角速度オブザーバと姿勢制御則を組み合わせた場合の大域的安定性を研究課題として扱っていきたい．

謝辞

本研究を行う機会を与えて下さり、本研究を進めるにあたっては、主指導教官として暖かいご指導を下さいました奈良先端科学技術大学院大学システム制御・管理講座の西谷 紘一教授に深く感謝致します。

お忙しい中、副指導教官になって下さり、また、研究に対する様々なご意見を頂きました応用システム科学講座の杉本 謙二教授に深く感謝致します。

本研究を進めるにあたり、研究内容や研究の方針に関して多大な御指導、貴重な御助言を頂きましたシステム制御・管理講座の山下 裕助教授に深く感謝致します。

研究内容に関して、貴重な御意見を頂きましたシステム制御・管理講座の黒岡 武俊元助手、今福 啓助手に深く感謝致します。

研究活動や学校生活を暖かく支えて下さいましたシステム制御・管理講座の青盛 まどか秘書、河 弘子元秘書に深く感謝致します。

研究内容に関して、数多くのアドバイスを頂いた中村 文一氏に深く感謝致します。

公私にわたり御世話になりましたシステム制御・管理講座の皆様に深く感謝致します。

参考文献

- [1] 鈴木, 渡邊, 坂本: n 次元剛体の運動に対するオブザーバの設計, 第2回制御部門大会資料, 71/74(2002)
- [2] Salcudean, S.: A Globally Convergent Angular Velocity Observer for Rigid Body Motion, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.36, No.12, 1493/1497(1991)
- [3] L.P.Rothschild, E.M.Stein: Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, Acta Math, Vol.137, 247/320(1976)
- [4] H. Hermes: Homogenous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls, Stability and Control (S. Elaydi ed.), Dekker, 249/260(1991)
- [5] H. Hermes: Nilpotent and high-order approximations of vector field systems, SIAM Review, Vol.33, 249/260(1991)
- [6] Lionel Rosier: Smooth Lyapunov functions for discontinuous stable systems, Set-Valued Analysis, Vol.7, 375/405(1999)
- [7] A.Bacciotti, Lionel Rosier: Lyapunov functions and stability in control theory, Lecture notes in control and information sciences 267(Springer-Verlag, London, 2001)
- [8] 細川, 山下, 島: 四元数による表現を用いた飛行体の大角度姿勢制御, 計測自動制御学会論文集, 26-4, 467/473(1990)
- [9] Lionel Rosier: Homogenous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field, System & Control, Letters 19, 467/473(1992)
- [10] Hassan K.Khalil: Nonlinear Systems third edition, Prentice Hall, 128(2002)
- [11] 谷脇, 狼, : 人工衛星のジャイロレス姿勢推定フィルタ, 計測自動制御学会論文集, vol.39, No.1, 43/50(2003)

- [12] 中村, 山下, 西谷: 同次ディファレンシャル・インクルージョンに対する同次 Lyapunov 関数を用いたロバスト性の解析, 第 35 回 SICE 北海道支部会学術講演会, 81/82(2003)
- [13] 長谷川 律雄, 回転の表現, 計測と制御, 第 41 巻, 第 9 号, 2002 年 9 月号