
微分・代数方程式で表された
非線形システムの制御

(課題番号 12650446)

平成 12 年度～平成 14 年度科学研究費補助金 (基盤研究 (C)(2))

研究成果報告書

平成 15 年 5 月

研究代表者 山下 裕

(奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教授)

はしがき

研究組織

研究代表者： 山下 裕 (奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教授)
研究分担者： 黒岡 武俊 (奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助手,
現 富山大学工学部助教授)

交付決定額 (配分額)

	直接経費	間接経費	合計
平成 12 年度	2,500 千円	0 円	2,500 千円
平成 13 年度	500 千円	0 円	500 千円
平成 14 年度	500 千円	0 円	500 千円
総計	3,500 千円	0 円	3,500 千円

研究発表

(a) 学会誌等

- [1] 山下 裕, 西谷 紘一, 島 公脩: 非線形 DAE 系に対する入出力線形化とオブザーバ, 計測自動制御学会論文集, Vol.36, No.12, pp.1101-1107, 2000

(b) 口頭発表

- [1] Yuh Yamashita, Masasuke Shima, Hirokazu Nishitani: I/O-Linearization Control with Observer for Nonlinear Systems Described by Differential-Algebraic Equations, *Proceedings of PSE Asia 2000*, pp.189-194, Kyoto, Japan, December 6-8, 2000

- [2] Nami Kidane, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: I/O-Linearizing Controller and Observer for Nonlinear DAE Systems with High Index, *SICE Annual Conference 2002*, pp.1863-1866, Osaka, August 5-7, 2002
- [3] 喜種 奈美, 山下 裕, 西谷 紘一: High Index DAE 系に対するオブザーバ設計, 第31回制御理論シンポジウム, pp.339-342, 葉山, 2002年10月28-30日
- [4] 喜種 奈美, 山下 裕, 西谷 紘一: 代数変数を含むフィードバック則による regularizing とオブザーバ設計: 第35回計測自動制御学会北海道支部学術講演会, pp.71-74, 札幌, 2003年1月23-24日
- [5] Nami Kidane, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: Observer Based I/O-linearizing Control of High Index DAE Systems, *2003 American Control Conference*, Denver, CO, USA, June 4-6, 2003 (発表予定)
- [6] Yuh Yamashita, Nami Kidane, Hirokazu Nishitani: Observer design for nonlinear systems described by differential-algebraic equations, *8th International Symposium on Process Systems Engineering*, Kunming, China, Postponed to Jan 2004 (発表予定)

(c) 出版物

特になし

研究成果による工業所有権の出願・取得状況

特になし

目次

第1章	はじめに	1
1.1	研究の背景	1
1.2	研究の目的	2
第2章	準備	3
2.1	ODE と DAE	3
2.2	インパルスモード	4
2.3	Index の定義	6
2.4	レギュラー性の定義	7
第3章	Explicit ODE への変形	9
3.1	冗長な explicit ODE への変形	9
3.2	独立な代数方程式の選択	12
3.3	微分変数と代数変数の分離	13
3.4	Kumar らの提案したレギュラー化	14
3.5	改良したレギュラー化	20
3.6	ODE 化手法とレギュラー化との比較	23
3.7	例題	24
3.7.1	入力に積分器を付加する手法	25
3.7.2	Kumar らの提案したレギュラー化	25
3.7.3	改良したレギュラー化	26
第4章	制御系設計	27
4.1	拡大系	27
4.2	厳密な入出力線形化	28
4.3	追従制御	29
第5章	オブザーバ設計	33
5.1	オブザーバ設計	33
5.2	不変多様体上のオブザーバの安定性	35
5.3	オブザーバの大域的安定性	36

第6章 制御系の安定性	39
6.1 内部状態の有界性	39
6.2 誤差ダイナミクスの安定性	41
第7章 シミュレーションによる制御系の評価	43
7.1 シミュレーション	43
7.2 考察	45
第8章 結論と今後の課題	49
参考文献	50
資料	53

第1章 はじめに

1.1 研究の背景

一般にダイナミカルシステムは、システムの動的な部分を記述する常微分方程式とシステムを構成する各要素間の関係を記述する代数方程式で表される。その2つをあわせた微分代数方程式 (DAE: Differential Algebraic Equation) は対象システムの物理変数や定数・物理構造を変えずに記述できる数式表現である。例えば、ある種の化学プラントでは、状態変数の従う微分方程式の他に状態平衡式等が拘束として現れる。また、閉リンク機構や外界との接触をもつロボットマニピュレータのモデリングでは、運動方程式が微分方程式と代数方程式から構成される。これらは皆 DAE システムとして記述される。

入力を含む DAE システムは通常の微分方程式 (ODE: Ordinary Differential Equation) で表されるシステムにはない性質をいくつか持つ。例えば、ODE とは違って、DAE は拘束条件を満たさない初期条件や滑らかなでない入力に関してインパルスモードを持つ。

DAE と ODE の違いを記述するのに用いられる概念の代表的なものとして index がある。厳密性を欠いて言うと、index とは DAE を等価な ODE に変形するために必要な最小の微分回数である。Index が 2 以上の場合を high index といい、index が 0 や 1 の場合と区別される。

定義より ODE は index 0 の系である。Index 1 の系は、代数変数に関して局所的に解くことができ、それを微分方程式に代入することによって ODE に変形することができる。すなわち、index が 0 や 1 の場合は、代数方程式を解いて微分方程式に代入し消去すると冗長でない ODE を得ることができる。しかし、非線形系の場合は代数方程式を解析的に解くことは一般に困難である。したがって、DAE で表されるシステムに対して代数方程式を陽に解くことなしに制御系を解析・設計することは重要な課題である。

また、High index DAE 系は ODE 系や index 1 の系とは異なり、微分変数に関する隠れた代数拘束式を持つ。これらの隠れた拘束は微分変数をより低次元の状態空間に制限する。このため、high index DAE はほとんど全ての初期条件に対してインパルスモードを持つ。隠れた拘束条件を満たす初期条件だけが滑らかな解を持つ。さらに、入力を持つ high index DAE 系の解は入力の導関数に依存する。

この場合、入力は十分滑らかでなければならない。

1.2 研究の目的

本研究では、high index を含む非線形 DAE 系に対して、オブザーバベースの制御系設計を行なうことを目的とする。その際、非線形代数方程式を解くこと無しに制御系を構築する。

High index DAE 系の場合は、index が 0 や 1 の場合と違って隠れた拘束条件が存在するので、それを明らかにする必要がある。ここでは、代数方程式を繰り返し微分することによって explicit ODE に変形し、隠れた拘束を導き出す。まず、状態フィードバック設計を行うが、代数方程式を無視して、ほぼ通常的设计を行う。その際、拘束条件は拡大系において不変多様体を形成しており、代数変数の初期値が拘束条件を満たしているならば拘束されたシステムに対しても制御目的は満たされている。またさらに、代数方程式から代数変数の導関数が求められるということを利用し、オブザーバの設計を行なう。このオブザーバにおいては、状態変数の推定値もまた代数方程式を満たす。

第2章では、DAE, ODE, index, 及びレギュラー性の定義と制御の基礎について簡単に説明する。第3章では、代数方程式を繰り返し微分することによって冗長な explicit ODE に変形するアルゴリズムを示し、オブザーバ設計に備えて微分変数と代数変数の分離を行なう。また、Kumar らの提案したレギュラー化の紹介と改良を行い、これらの手法を比較する。第4章では、入力に積分器を付加して拡大系を作り、すべての状態変数を含むフィードバック則を用いて厳密な入出力線形化を行う。さらに目標値に追従させるため制御則を設計する。第5章では、すべての状態変数を同時に推定する大域的に安定なオブザーバを設計する。第6章では、制御系全体の安定性について考える。さらに第7章では、提案した手法の有効性を確認するためシミュレーションを示す。

第2章 準備

ここでは、DAEとODEの違いを明らかにするため、indexやレギュラー性の定義、及びインパルスモードなどについて述べる。また、Lyapunovの安定性やLipschitz条件など制御の基礎について簡単に説明する。

2.1 ODEとDAE

一般的な非線形微分代数方程式系 (DAE系) は次のように書くことができる。

$$H(t, y, \dot{y}) = 0 \quad (2.1)$$

ここで y は状態変数、 t は時間、 $H(\cdot)$ は滑らかな関数である。また $\text{rank } \partial H / \partial \dot{y} \leq \dim y$ であり、 \dot{y} に関して式 (2.1) を解きだすことができるとは限らない。したがって、一般に式 (2.1) は微分方程式と代数方程式からなる。微分方程式と代数方程式を分けると、

$$F(t, x, \dot{x}, z) = 0 \quad (2.2)$$

$$G(t, x, z) = 0 \quad (2.3)$$

と書くことができる。ここで微分方程式に従う変数 x を微分変数、代数方程式によって決まる変数 z を代数変数とよび、 $\partial F / \partial \dot{x}$ は正則である。この特別な場合が semi-explicit DAE

$$\dot{x} = f(t, x, z) \quad (2.4)$$

$$0 = g(t, x, z) \quad (2.5)$$

である。

変数変換や微分を行なうことなく explicit ODE

$$\dot{y} = h(t, y) \quad (2.6)$$

に変形できるシステムを implicit ODE という。 $\partial H / \partial \dot{y}$ が正則ならば明らかにシステム (2.1) は implicit ODE である。一方、 $\partial H / \partial \dot{y}$ が正則でなければ、システムは基本的に ODE とは異なる性質を持つ。

2.2 インパルスモード

関数 $y(t)$ が区間 T 上で連続的に微分可能、かつすべての $t \in T$ に対して DAE(2.1) を満たすならば、 y は T 上での (2.1) の解である。解が区間 T 上で存在し、かつ唯一に定義されるとき、システムは可解であるという。ここではシステムが可解である場合に関心があるが、 y のすべての初期値が滑らかな解を持つわけではない。また、DAE 系の解は入力の変換関数に依存するため、滑らかな解を持つためには入力は十分滑らかでなければならない。

簡単のため、線形定係数 DAE 系

$$E\dot{y} = Ay + Bu(t) \quad (2.7)$$

について考える。ここで $y \in R^n$ は状態変数、 $u(t) \in R^m$ は入力、 $E, A \in R^{n \times n}$ と $B \in R^{n \times m}$ は定数行列である。 E が正則ならばこのシステムは explicit ODE

$$\dot{y} = \bar{A}y + \bar{B}u(t) \quad (2.8)$$

に変形できる。ここで $\bar{A} = E^{-1}A$, $\bar{B} = E^{-1}B$ である。 E が正則でないときシステム (2.7) は ODE とは異なり、特異システムといわれる。

システムの解の特性は行列束 $\lambda E - A$ によって決まる。ここで λ は複素数である。線形定係数システム (2.7) が可解であるための必要十分条件は、行列束 $\lambda E - A$ が正則となることである。ここで、行列束が正則であるとは、 $\det(\lambda E - A)$ が恒等的に 0 にならないことである。

行列束 $\lambda E - A$ が正則と仮定すると、 $\text{rank } E = r \leq n$ かつ $\det(\lambda E - A)$ が s ($0 \leq s \leq r$) 次の多項式ならば、

$$PEQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

を満たす正則行列 $P, Q \in R^{n \times n}$ が存在する。ここで A_1 は $s \times s$ の行列、 N は $(n-s) \times (n-s)$ の巾零性 ν の行列、すなわち N のすべての固有値は 0、かつ $N^\nu = 0$, $N^i \neq 0$ ($i \leq \nu - 1$) である。変数変換

$$y = Q \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

を用いると、システム (2.7) は標準形式

$$\dot{x} = A_1x + B_1u(t) \quad (2.9)$$

$$N\dot{z} = z + B_2u(t) \quad (2.10)$$

に変形できる。ここで $x \in R^s$, $z \in R^{n-s}$,

$$PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

である。このとき行列束は

$$P(\lambda E - A)Q = \lambda \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

となる。 $s = r$ のとき $N = 0$, $\nu = 1$ となり、 z に関するサブシステム (2.10) は純粋な代数方程式になる。一方 $s < r$ ならば、 N は Jordan 標準形式で、 $\nu (> 1)$ は最大の Jordan ブロックの大きさである。

N の中零性 ν は行列束 $\lambda E - A$ の index であり、線形定係数 DAE 系 (2.7) の index でもある。 $\nu = 2$ ならば、 z に関するサブシステム (2.10) を時間で一回微分して左から N をかけると

$$N \frac{dz}{dt} + NB_2 \frac{du(t)}{dt} = 0$$

となる。これを (2.10) 式に代入すると

$$z + B_2 u(t) + NB_2 \frac{du(t)}{dt} = 0$$

となり、 z の解は入力 $u(t)$ の導関数を含む。

x に関するサブシステム (2.9) は ODE であり、任意の初期条件 $x(0)$ と連続な入力 $u(t)$ に関して解

$$x(t) = e^{A_1 t} x(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (2.11)$$

を持つ。 $x(t)$ の解は初期条件 $x(0)$ に依存するが、 $z(t)$ の解は

$$z(t) = - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2 u^{(i)}(t), \quad t \geq 0 \quad (2.12)$$

のように入力 $u(t)$ によって一意に決まる。

このように ODE システムとは異なり、DAE 系は任意の初期条件に対して滑らかな解を持たない。 $t = 0$ で $z(0)$ が (2.12) を満たす初期条件 $y(0)$ だけが滑らかな解を持つ。さらに $\nu > 1$ のとき DAE 系の解は入力 $u(t)$ の $\nu - 1$ 階導関数に依存するので、入力は十分滑らかでなければならない。

z の解に関するインパルスモードは無限遠の極に対応する。システム (2.7) は r 個のダイナミックモードと $n - r$ 個の代数モードを持つ。ここでダイナミックモードは、有限の極に対応する s 個の有限モードと無限の極に対応する $r - s$ 個のインパルスモードを含む。システムがインパルスモードを持つための必要十分条件は $\nu > 1$ となることである。

2.3 Index の定義

Semi-explicit DAE 系 (2.4), (2.5) を考える。代数方程式を時間で一回微分すると、新しいシステム

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, z) \\ 0 &= g(t, x, z) \\ 0 &= \frac{\partial g}{\partial x} f(t, x, z) + \frac{\partial g}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial g}{\partial t} \end{aligned}$$

を得る。 $\partial g / \partial z$ が正則ならば

$$\dot{z} = - \left[\frac{\partial g}{\partial z} \right]^{-1} \left[\frac{\partial g}{\partial x} f(x, z, t) + \frac{\partial g}{\partial t} \right]$$

となるので、得られたシステムは implicit ODE である。このとき元のシステムは index 1 を持つという。 $\partial g / \partial z$ が正則でなければ、このシステムは変数変換によって (2.4), (2.5) の形式に変形することができる。さらに代数方程式の両辺を微分する。その結果得られたシステムが implicit ODE ならば、元のシステムは index 2 を持つという。そうでなければ、この操作を繰り返す。このときの微分回数が index である。

定義 1. 入力時間が時間の関数として与えられているものとする。 \dot{y} を y と t の関数として決定するために (2.1) を微分しなければならない最小の微分回数を *index* という。

定義より implicit ODE は index 0 の系である。また、index 1 の DAE 系は、代数方程式を代数変数に関して解くことができれば、その解を微分方程式に代入することによって implicit ODE に変形できる。Index が 2 以上のシステムを high index DAE 系といい、index 0 や 1 の場合と区別される。

一般の非線形 DAE 系 (2.1) について考える。(2.1) 式を時間で繰り返し微分すると、新しいシステム

$$\begin{aligned} H(t, y, \dot{y}) &= 0 \\ \frac{d}{dt} H(t, y, \dot{y}) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} H(t, y, \dot{y}) &= 0 \end{aligned}$$

を得る。これは

$$\begin{aligned} H_{[0]}(t, y, \dot{y}) &= 0 \\ H_{[1]}(t, y, \dot{y}, \ddot{y}) &= 0 \\ &\vdots \\ H_{[j-1]}(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(j-1)}, y^{(j)}) &= 0 \end{aligned}$$

のように書き直すことができる。さらに

$$y_j = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(j)} \end{pmatrix}$$

とおくと、得られた方程式は、

$$H_j(t, y, y_j) = 0, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.13)$$

と書ける。非線形 DAE 系 (2.1) の index は、 $H_{\nu+1}$ が変数 \dot{y} を t と y の関数として一意に決定するような最小の微分回数として定義される。

このように high index DAE 系は ODE とは異なり、微分変数に関する隠れた代数拘束式を持つ。これらの拘束は微分変数をより低次元の状態空間に制限する。このため、DAE はこれらの拘束条件を満たさない初期値に対してインパルスモードを持つ。さらに、入力を持つ high index DAE 系の解は入力の導関数に依存する。この場合、入力は十分滑らかでなければ、(少なくとも有界な) 解を持たない。

2.4 レギュラー性の定義

式 (2.13) に含まれる代数方程式が不変多様体になっていないのであれば、微分方程式と代数方程式の間で矛盾が生じていることになる。このような場合、元の DAE が非レギュラーであると呼ばれる。

定義 2. *Index* が有限、かつ微分変数の拘束される集合 ($\subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$) が不変多様体となるとき、系はレギュラーという。

この場合の不変多様体は状態空間 \mathbb{R}^n と時間の空間 \mathbb{R} との直積集合上で定義されることに注意する。

入力が含まれる系のレギュラー性の定義には複数の流儀が存在する。特に、high index DAE 系の場合、入力は十分滑らかと仮定する必要があった。入力を時間の関数だとみなし、「全ての“滑らかな”入力関数に対してレギュラーであれば、入

力が含まれる系はレギュラーである」というようにレギュラー性を定義することができるであろう。この定義は、入力を含まない元のレギュラー性の定義と非常によく一致し、このような定義を採用している文献もある。しかしながら、この定義に従えばレギュラーである系も、滑らかでない入力に関してインパルスモードを持ってしまうことがある。そこで、次のような定義が与えられた。

定義 3 (Kumar らのレギュラー性). $Index$ が有限、かつ微分変数の拘束される状態空間領域が、任意の入力に対して不変多様体となるとき、系はレギュラーという。

インパルスモードは持たないが、代数方程式に入力が含まれ、不連続な入力に関して状態がジャンプする場合があります。このような場合、 (y, t) の空間で拘束される集合がその時点で不連続になる。このような場合でも、可測入力であれば、拘束される集合が(縁ありの)不変多様体となる。排除したいのはインパルスモードだけであるから、本研究では、以下のようにレギュラー性を定義することにする。

定義 4 (本研究でのレギュラー性). $Index$ が有限、かつ微分変数の拘束される状態空間領域が、任意の可測入力に対して縁付き不変多様体となるとき、系はレギュラーという。

Kumar らも、本来は本研究のような意味でレギュラー性を定義するつもりであったように思える。実際、Kumar らの提案している regularize アルゴリズムは、代数方程式に入力が含まれる形までにしか系を変形しない。

第3章 Explicit ODEへの変形

High index DAE系に対して制御系の設計を行なうためには、隠れた拘束条件を明らかにし、代数変数の導関数を求める必要がある。ここでは、代数方程式を繰り返し微分することによって冗長な explicit ODEに変形するアルゴリズムを提案し、得られたシステムに対して微分変数と代数変数の分離を行なう。また、状態変数に関する無駄な拡大を行なわないようにレギュラー化を改良し、入力に積分器を付加する手法と比較する。

3.1 冗長な explicit ODEへの変形

前章で述べた index の定義において微分方程式もさらに微分していたが、これは全くの無駄であり、代数方程式のみを微分すればよい。さらに、代数方程式全てを微分する必要はない。冗長度を減らすために、どの代数方程式を微分すればよいかといった指針は、これまで明確にしめされてはいなかった。そこで本研究では、一般の場合に DAE 系を ODE 系に変換するアルゴリズムを示す。

ここでは次式で表される非線形 DAE 系を考える。

$$D(\hat{x})\dot{\hat{x}} + f(\hat{x}, u) = 0 \quad (3.1)$$

$$y = h(\hat{x}, u) \quad (3.2)$$

ここで $\hat{x} \in R^{\hat{n}}$ は状態変数、 $u \in R^{\ell}$ は入力、 $y \in R^{\ell}$ は出力である。また $\text{rank } D(\hat{x}) \leq \hat{n}$ であり、(3.1) 式は微分方程式と代数方程式からなる。 f, h は解析的であるとする。一般性を失うことなく $f(0, 0) = 0, h(0, 0) = 0$ が成立する。

冗長な explicit ODE に変形するため、次の仮定をおく。

仮定 1. システムの index ν は有限である。

仮定 2. システムは任意の滑らかな入力 u に対して解を持つ。

ここでは次の手順で非線形 DAE 系を冗長な explicit ODE に変形する。

1. 微分方程式と代数方程式を分ける。
2. ランク条件が満たされるならば終了する。

3. 代数方程式を微分する。

以下では、関係する行列のランクは一定であると仮定する。 u_i ($i = 1, \dots, \ell$) は u の成分とする。冗長な explicit ODE に変形するため、 $v_{1,i} = u_i$, $v_1 = (v_{1,1}, \dots, v_{1,\ell})^T$, $D_1(\hat{x}, v_0) = D(\hat{x})$, $f_1(\hat{x}, v_1) = f(\hat{x}, u)$ とおいて、次の反復を行なう。

アルゴリズム 1 (冗長な explicit ODE への変形).

Step 0

$s := 1$ とおく。

Step 1

$n_s = \text{rank } D_s(\hat{x}, v_{s-1})$ を計算する。

$$H_s(\hat{x}, v_{s-1})D_s(\hat{x}, v_{s-1}) = \begin{bmatrix} \bar{D}_s(\hat{x}, v_{s-1}) \\ O \end{bmatrix}$$

を満たす $\hat{n} \times \hat{n}$ の正則行列 $H_s(\hat{x}, v_{s-1})$ が存在する。ここで $\bar{D}_s(\hat{x}, v_{s-1})$ は $n_s \times \hat{n}$ の行フルランク行列である。 $D_s(\hat{x}, v_{s-1})\dot{\hat{x}} + f_s(\hat{x}, v_s) = 0$ の左から $H_s(\hat{x}, v_{s-1})$ をかけると

$$\bar{D}_s(\hat{x}, v_{s-1})\dot{\hat{x}} + f_{s1}(\hat{x}, v_s) = 0 \quad (3.3)$$

$$f_{s2}(\hat{x}, v_s) = 0 \quad (3.4)$$

を得る。ここで

$$H_s(\hat{x}, v_{s-1})f_s(\hat{x}, v_s) = \begin{pmatrix} f_{s1}(\hat{x}, v_s) \\ f_{s2}(\hat{x}, v_s) \end{pmatrix}$$

である。この操作によって微分方程式 (3.3) と代数方程式 (3.4) が分離された。

Step 2

$n_s = \hat{n}$ ならば終了する。

Step 3

代数方程式 (3.4) を時間で 1 回微分すると

$$\frac{\partial f_{s2}}{\partial \hat{x}} \dot{\hat{x}} + \frac{\partial f_{s2}}{\partial v_s} \dot{v}_s = 0 \quad (3.5)$$

となる。 $v_{s,i}$ の成分を $v_{s,i}^j$ ($j = 1, \dots, \dim v_{s,i}$) とする。 $\partial f_{s2} / \partial v_{s,i}^{\dim v_{s,i}} = 0$ ならば $v_{s+1,i} = v_{s,i}$ とおき、 $\partial f_{s2} / \partial v_{s,i}^{\dim v_{s,i}} \neq 0$ ならば $v_{s+1,i} = (v_{s,i}^T, v_{s,i}^{\dim v_{s,i}})^T$ とおく。

$$v_{s+1} = \begin{pmatrix} v_{s+1,1} \\ \vdots \\ v_{s+1,\ell} \end{pmatrix}$$

すると、 $h_s(\hat{x}, v_{s-1})$ は積 $h_s(\hat{x}, v_{s-1})D_s(\hat{x}, v_{s-1})$ の ij -要素を 0 にする正則行列となる。

□

Step 3 では、インパルスモードを避けるため入力に積分器を付加している。 $v = v_{\nu+1}$ とおくと、このアルゴリズムより冗長な explicit ODE

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{f}(\hat{x}, v) \\ 0 &= \bar{g}(\hat{x}, v)\end{aligned}$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned}\hat{f}(\hat{x}, v) &= -\bar{D}_{\nu+1}^{-1}(\hat{x}, v_{\nu})f_{\nu+1,1}(\hat{x}, v_{\nu+1}) \\ \bar{g}(\hat{x}, v) &= \begin{pmatrix} f_{1,2}(\hat{x}, v_{\nu}) \\ \vdots \\ f_{\nu+1,2}(\hat{x}, v_{\nu}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。この explicit ODE と元の DAE は、矛盾しない初期条件と滑らかな入力に対して同じ解を持つという意味で等価である。

3.2 独立な代数方程式の選択

代数方程式のうち独立なものを抜き出すため、 $r = \dim \bar{g}(\hat{x}, v)$ 、 $\bar{g}_i(\hat{x}, v)$ ($i = 1, \dots, r$) は $\bar{g}(\hat{x}, v)$ の成分、 $\hat{g}_1(\hat{x}, v) = \bar{g}_1(\hat{x}, v)$ 、 $k_1 = \text{rank } \partial \hat{g}_1 / \partial \hat{x}$ として以下の操作を行う。

アルゴリズム 2 (独立な代数方程式の選択).

Step 0

$s := 1$ とおく。

Step 1

$s = r$ ならば終了する。

Step 2

ランクを計算する。

$$k_{s+1} = \text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{g}_s}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial \bar{g}_{s+1}}{\partial \hat{x}} \end{bmatrix}$$

$k_s = k_{s+1}$ ならば $\hat{g}_{s+1}(\hat{x}, v) = \hat{g}_s(\hat{x}, v)$ とおき、 $k_s < k_{s+1}$ ならば $\hat{g}_{s+1}(\hat{x}, v) = (\hat{g}_s^T(\hat{x}, v), \bar{g}_{s+1}(\hat{x}, v))^T$ とおく。

$s := s + 1$ とおき、Step 1 に戻る。 □

アルゴリズム 2 によって、独立な代数方程式が抜き出されることを証明する。
証明

$$0 = F(\hat{g}_s, \bar{g}_{s+1})$$

を考える。両辺を \hat{x} で偏微分すると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial \hat{g}_s} \frac{\partial \hat{g}_s}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \bar{g}_{s+1}} \frac{\partial \bar{g}_{s+1}}{\partial x} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \hat{g}_s} & \frac{\partial F}{\partial \bar{g}_{s+1}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{g}_s}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{g}_{s+1}}{\partial x} \end{bmatrix} \\ &:= F_1 F_2 \end{aligned}$$

となる。 F_2 がフルランクならば $F_1 = 0$ となるので、 \hat{g}_s, \bar{g}_{s+1} は独立である。 F_2 がフルランクでなければ $F_1 = 0$ 以外にも解を持つので、 \hat{g}_s, \bar{g}_{s+1} は従属である。
□ このアルゴリズムが終了したときの $\hat{g}_r(\hat{x}, v)$ を $\hat{g}(\hat{x}, v)$ とおくと、代数方程式 $\hat{g}(\hat{x}, v) = 0$ は \hat{x} に関して互いに独立である。

3.3 微分変数と代数変数の分離

得られた ODE は冗長であり、初期値が代数方程式を満たしている限り、可制御性などを注意すれば制御系設計にそのまま用いることができる。しかし、全ての冗長な変数を用いた制御則となり、代数方程式を満たすような状態変数を推定するオブザーバが、ほぼ必須となる。代数方程式を満たすようにオブザーバを設計するとすると、代数方程式に従う変数の微分方程式は不要であり、微分変数と代数変数の分離を行なうことが必要である。

代数方程式 $\hat{g}(\hat{x}, v)$ は互いに独立なので、状態変数 \hat{x} のうち $\dim \hat{g}$ 個の変数は代数拘束により決まる。変数変換

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

によって微分変数 \bar{x} と代数変数 \bar{z} に分けられる。ただし、定数行列 R_1 と R_2 は

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{x}} R_2, \quad \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix}$$

が正則になるように選ばれる。この変数変換により、微分方程式と代数方程式は

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= f_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{z}, v) \\ \dot{\bar{z}} &= f_{\bar{z}}(\bar{x}, \bar{z}, v) \\ 0 &= g(\bar{x}, \bar{z}, v) \end{aligned} \tag{3.7}$$

のように変形される。ここで

$$\begin{aligned}\bar{g}(\hat{x}, v) &= g(\bar{x}, \bar{z}, v) \\ \dim \bar{z} &= \dim g = \text{rank} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \\ \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix}^{-1} \hat{f}(\hat{x}, v) &= \begin{pmatrix} f_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{z}, v) \\ f_{\bar{z}}(\bar{x}, \bar{z}, v) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

変数変換 $\hat{x} = [R_1, R_2](\bar{x}^T, \bar{z}^T)^T$ によって微分変数 \bar{x} と代数変数 \bar{z} に分離されることを証明する。証明 $\dim \bar{z} = \bar{m}$ とおく。 $\bar{g}(\hat{x}, v) = 0$ を時間で一回微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \hat{x}} \dot{\hat{x}} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial v} \dot{v} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \hat{x}} R_1 \dot{\hat{x}} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \hat{x}} R_2 \dot{\hat{z}} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial v} \dot{v} = 0$$

システム (4.1) は explicit ODE なので、 $\partial \bar{g} / \partial \hat{x} \cdot R_2$ は正則である。また、 $\hat{x} \rightarrow (\bar{x}^T, \bar{z}^T)^T$ は微分同相写像となるように選ばなければならないので、 $[R_1, R_2]$ も正則である。□ このようにして得られた系 (3.7) のうち、 \bar{z} に関する微分方程式を除いたものは、 index 1 の DAE 系となっており、後に述べるオブザーバでは、この系を用いている。

3.4 Kumar らの提案したレギュラー化

これまでは入力に積分器を付加することによってインパルスモードを避けてきたが、状態フィードバックを用いてレギュラー化を行なう手法もある。ここでは、Kumar らの提案したレギュラー化を紹介する。

レギュラー化の手順は以下のとおりである。

1. 代数変数か入力陽に現れるまで繰り返し代数方程式を微分することによって、index の次数を下げる。
2. 状態フィードバック則によって系がレギュラーとなるように変形する。

上記の手順 1 によって、代数変数に関して独立な拘束式の数と残りの代数方程式のうち入力に関して独立な拘束式の数をあわせたものは代数変数の次数と等しくなる。元の DAE 系がレギュラーならば、代数変数に関して独立な拘束式の数は代数変数の次数と等しくなり、残りの代数方程式には入力は現れない。手順 2 の状態フィードバック則は、これらの式が代数変数に関して独立になるように変形する。

Kumar らの提案したレギュラー化は、次式で表されるように、代数変数と入力に関して線形な DAE 系を対象としている。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + b(x)z + g(x)u \\ 0 &= k(x) + \ell(x)z + c(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (3.8)$$

一般の非線形 DAE 系もこのように変形することができる。例えば、次のような非線形 DAE 系を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, z, u) \\ 0 &= g(x, z, u) \\ y &= h(x, z, u) \end{aligned}$$

積分器を付加し、新しい微分変数 $\bar{x} = (x, z, u)^T$ と入力 $\bar{u} = (\dot{z}, \dot{u})^T$ を定義すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \begin{pmatrix} \bar{f}(\bar{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \bar{u} \\ 0 &= \bar{g}(\bar{x}) \\ y &= \bar{h}(\bar{x}) \end{aligned}$$

この系は代数変数と入力に関して線形な DAE 系となっている。

Kumar らの提案したレギュラー化は以下のとおりである。

アルゴリズム 3.

Iteration 1

(3.8) 式において、 $\text{rank } \ell(x) = p_1$, $\text{rank}[\ell(x) \ c(x)] = m_1$ である。

次式を満たす滑らかな正則行列 $E^1(x)$ が存在する。

$$E^1(x) \begin{bmatrix} \ell(x) & c(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\ell}^1(x) & \bar{c}^1(x) \\ 0 & \hat{c}^1(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで

$$\bar{\ell}^1(x), \quad \begin{bmatrix} \bar{\ell}^1(x) & \bar{c}^1(x) \\ 0 & \hat{c}^1(x) \end{bmatrix}$$

は行フルランクである。

Step 1

代数方程式の左から $E^1(x)$ をかけて

$$0 = \begin{bmatrix} \bar{k}^1(x) \\ \hat{k}^1(x) \\ k^1(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\ell}^1(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \bar{c}^1(x) \\ \hat{c}^1(x) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

を得る。ここで $\hat{c}^1(x)$ は行フルランクである。

Step 2

代数拘束 $0 = k^1(x)$ を微分すると新しい代数方程式を得る。

$$0 = \begin{bmatrix} \bar{k}^1(x) \\ \hat{k}^1(x) \\ \tilde{k}^2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\ell}^1(x) \\ 0 \\ \tilde{\ell}^2(x) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \bar{c}^1(x) \\ \hat{c}^1(x) \\ \tilde{c}^2(x) \end{bmatrix} u$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{k}^2(x) &= \left[L_f k_1^1(x) \quad \cdots \quad L_f k_{p-m_1}^1(x) \right]^T \\ \tilde{\ell}^2(x) &= \begin{bmatrix} L_{b_1} k_1^1(x) & \cdots & L_{b_p} k_1^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{b_1} k_{p-m_1}^1(x) & \cdots & L_{b_p} k_{p-m_1}^1(x) \end{bmatrix} \\ \tilde{c}^2(x) &= \begin{bmatrix} L_{g_1} k_1^1(x) & \cdots & L_{g_m} k_1^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} k_{p-m_1}^1(x) & \cdots & L_{g_m} k_{p-m_1}^1(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。

Step 3

次のランクを計算する。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\ell}^1(x) \\ \tilde{\ell}^2(x) \end{bmatrix} = p_2, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\ell}^1(x) & \bar{c}^1(x) \\ 0 & \hat{c}^1(x) \\ \tilde{\ell}^2(x) & \tilde{c}^2(x) \end{bmatrix} = m_2$$

$m_2 = p$ ならば終了する。そうでなければ次の反復に進む。 $m_1 = p$ のときアルゴリズムは Step 1 のあと収束する。

Iteration s ($s \geq 2$)

反復 $s-1$ から代数方程式

$$0 = \begin{bmatrix} \bar{k}^{s-1}(x) \\ \hat{k}^{s-1}(x) \\ \tilde{k}^s(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\ell}^{s-1}(x) \\ 0 \\ \tilde{\ell}^s(x) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \bar{c}^{s-1}(x) \\ \hat{c}^{s-1}(x) \\ \tilde{c}^s(x) \end{bmatrix} u$$

が得られているものとする。ここで

$$\begin{aligned} \text{rank } L^s(x) &= \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\ell}^{s-1}(x) \\ \tilde{\ell}^s(x) \end{bmatrix} = p_s \\ \text{rank } L^{s,e}(x) &= \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\ell}^{s-1}(x) & \bar{c}^{s-1}(x) \\ 0 & \hat{c}^{s-1}(x) \\ \tilde{\ell}^s(x) & \tilde{c}^s(x) \end{bmatrix} = m_s \end{aligned}$$

である。

すると次式を満たす正則行列 $E^{s,1}(x)$ が存在する。

$$\begin{aligned} E^{s,1}(x) &= \begin{bmatrix} I_{m_s-1} & 0 \\ R^s(x) & S^s(x) \end{bmatrix} \\ E^{s,1}(x)L^{s,e}(x) &= \begin{bmatrix} \bar{\ell}^{s-1}(x) & \bar{c}^{s-1}(x) \\ 0 & \hat{c}^{s-1}(x) \\ \ell^s(x) & c^{s,1}(x) \\ 0 & c^{s,2}(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

さらに $E^{s,1}(x)L^{s,e}(x)$ を次のように再配列する置換行列 $E^{s,2}$ が存在する。

$$E^{s,2}E^{s,1}(x)L^{s,e}(x) = \begin{bmatrix} \bar{\ell}^s(x) & \bar{c}^s(x) \\ 0 & \hat{c}^s(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで

$$\bar{c}^s(x) = \begin{bmatrix} \bar{c}^{s-1}(x) \\ c^{s,1}(x) \end{bmatrix}, \quad \hat{c}^s(x) = \begin{bmatrix} \hat{c}^{s-1}(x) \\ c^{s,2}(x) \end{bmatrix}$$

かつ

$$\bar{\ell}^s(x) = \begin{bmatrix} \bar{\ell}^{s-1}(x) \\ \ell - s(x) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{\ell}^s(x) & \bar{c}^s(x) \\ 0 & \hat{c}^s(x) \end{bmatrix}$$

は行フルランクである。 $E^s(x) = E^{s,2}E^{s,1}(x)$ と定義する。

Step 1

代数方程式の左から行列 $E^s(x)$ をかけて

$$0 = \begin{bmatrix} \bar{k}^s(x) \\ \hat{k}^s(x) \\ k^s(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\ell}^s(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \bar{c}^s(x) \\ \hat{c}^s(x) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

を得る。

Step 2

代数方程式 $0 = k^s(x)$ を微分したものを加え、

$$0 = \begin{bmatrix} \bar{k}^s(x) \\ \hat{k}^s(x) \\ \tilde{k}^{s+1}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\ell}^s(x) \\ 0 \\ \tilde{\ell}^{s+1}(x) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \bar{c}^s(x) \\ \hat{c}^s(x) \\ \tilde{c}^{s+1}(x) \end{bmatrix} u$$

を得る。

Step 3

次のランクを計算する。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\ell}^s(x) \\ \tilde{\ell}^{s+1}(x) \end{bmatrix} = p_{s+1}, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\ell}^s(x) & \bar{c}^s(x) \\ 0 & \hat{c}^s(x) \\ \tilde{\ell}^{s+1}(x) & \tilde{c}^{s+1}(x) \end{bmatrix} = m_{s+1}$$

$m_{s+1} = p$ ならば終了する。そうでなければ次の反復に進む。 \square

有限 index を持つ DAE 系に対してこのアルゴリズムは有限反復回数 \bar{s} で収束し、次の形の代数方程式を与える。

$$0 = \begin{bmatrix} \bar{k}^{\bar{s}}(x) \\ \hat{k}^{\bar{s}}(x) \\ \tilde{k}^{\bar{s}+1}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\ell}^{\bar{s}}(x) \\ 0 \\ \tilde{\ell}^{\bar{s}+1}(x) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \bar{c}^{\bar{s}}(x) \\ \hat{c}^{\bar{s}}(x) \\ \tilde{c}^{\bar{s}+1}(x) \end{bmatrix} u \quad (3.9)$$

$$\mathbf{k}(x) = \begin{bmatrix} k^1(x) \\ \vdots \\ k^{\bar{s}}(x) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

ここで

$$\text{rank } L^{\bar{s}+1}(x) = \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\ell}^{\bar{s}}(x) \\ \tilde{\ell}^{\bar{s}+1}(x) \end{bmatrix} = p_{\bar{s}+1}$$

$$\text{rank } l^{\bar{s}+1,e}(x) = \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\ell}^{\bar{s}}(x) & \bar{c}^{\bar{s}}(x) \\ 0 & \text{h}at{c}^{\bar{s}}(x) \\ \tilde{\ell}^{\bar{s}+1}(x) & \tilde{c}^{\bar{s}+1}(x) \end{bmatrix} = m_{\bar{s}+1} = p$$

である。滑らかな正則行列 $E^{\bar{s}+1}(x)$ が存在し

$$E^{\bar{s}+1}(x) E^{\bar{s}+1,e}(x) = \begin{bmatrix} \bar{\ell}(x) & \bar{c}(x) \\ 0 & \hat{c}(x) \end{bmatrix}$$

を満たす。ここで

$$\bar{\ell}(x), \quad \begin{bmatrix} \bar{\ell}(x) & \bar{c}(x) \\ 0 & \hat{c}(x) \end{bmatrix}$$

は行フルランクである。代数方程式 (3.9) の左から $E^{\bar{s}+1}(x)$ をかけると DAE 系

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + b(x)z + g(x)u \\ 0 &= \begin{bmatrix} \bar{k}(x) \\ \hat{k}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\ell}(x) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{c}(x) \\ \hat{c}(x) \end{bmatrix} u \\ 0 &= \mathbf{k}(x) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

が得られる。ここで $\hat{c}(x)$ は行フルランクである。

次に、新しい入力を持つ DAE 系がレギュラーとなるように状態フィードバック則を設計する。レギュラーでない拘束

$$0 = \hat{k}(x) + \hat{c}(x)u \quad (3.11)$$

に現れる入力 u_1 を分離するため、変数変換

$$u = M(x) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

を用いる。このとき $M(x)$ は次式を満たす正則行列として選ぶ。

$$\begin{bmatrix} \bar{c}(x) \\ \hat{c}(x) \end{bmatrix} M(x) = \begin{bmatrix} \bar{c}_1(x) & \bar{c}_2(x) \\ \hat{c}_1(x) & 0 \end{bmatrix}$$

ここで $\hat{c}_1(x)$ は正則行列である。この変数変換によって代数方程式 (3.11) は次のようになる。

$$0 = \hat{k}(x) + \hat{c}_1(x)u_1 \quad (3.12)$$

系がレギュラーとなるように変形するため、状態フィードバック則

$$\begin{aligned} \dot{w} &= v_1 \\ u &= M(x) \begin{bmatrix} (\hat{c}_1(x))^{-1}[-\hat{k}(x) + Sx + w] \\ 0 \end{bmatrix} + M(x) \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を設計する。ここで S は

$$\begin{bmatrix} Sb(x) \\ \bar{\ell}(x) \end{bmatrix}$$

が正則行列となるように選ぶ。

この状態フィードバック則によって、DAEは

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{f}(x, w) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b(x) \\ 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & \bar{g}_2(x) \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ 0 &= \begin{bmatrix} \tilde{k}(x, w) \\ Sx + w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\ell}(x) \\ 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & \bar{c}_2(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

のように変形される。これは新しい微分変数 $\bar{x} = (x^T, w^T)^T$ と新しい入力 $v = (v_1^T, v_2^T)^T$ を持つレギュラーな DAE である。

Kumar らの提案したレギュラー化は、index が任意の入力に対して一定となることを要求しないという利点がある。一方、代数変数に関して線形な系を対象としているため、代数変数に関して非線形な場合はあらかじめ状態変数の拡大を行なう必要があり、系の次数が大きくなるという欠点がある。入力に積分器を付加する場合も系の次数が大きくなるが、付加する動特性の次数の比較は単純には言えず、ケースバイケースである。

3.5 改良したレギュラー化

Kumar らの提案した手法では、代数方程式は代数変数に関して解くことができる。しかし、実際には隠れた拘束を明らかにし、代数変数の導関数を得るだけで十分である。このことを考慮して、代数変数に関して非線形な場合でも状態変数の拡大を行なうことなくレギュラー化する手法を提案する。

ここでは次式で表される代数変数に関して非線形な DAE 系を対象とする。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, z) + r(x)u \\ 0 &= p(x, z) + q(x)u \\ y &= h(x, z, u) \end{aligned} \tag{3.13}$$

ここで $x \in R^n$ は微分変数、 $z \in R^m$ は代数変数、 $u \in R^\ell$ は入力、 $y \in R^\ell$ は出力である。

代数変数 z も入力 u も含まない代数方程式だけを繰り返し微分することにより、index の次数を下げた等価な DAE 系を得ることができる。以下、関係する行列のランクは一定であると仮定して、その手順を示す。

次式を満たす滑らかな正則行列 $E(x)$ が存在する。

$$E(x) \begin{bmatrix} p(x, z) & q(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^1(x, z) & 0 \\ p_2^1(x, z) & q_2^1(x) \\ p_3^1(x, z) & q_3^1(x) \\ p_4^1(x, z) & 0 \end{bmatrix}$$

ここで

$$\begin{aligned} \text{rank } \partial p_1^1 / \partial z &= \text{rank} \begin{bmatrix} \partial p_1^1 / \partial z \\ \partial p_4^1 / \partial z \end{bmatrix} \\ \text{rank} \begin{bmatrix} \partial p_1^1 / \partial z \\ \partial p_2^1 / \partial z \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} \partial p_1^1 / \partial z \\ \partial p_2^1 / \partial z \\ \partial p_3^1 / \partial z \\ \partial p_4^1 / \partial z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{bmatrix} \partial p_1^1 / \partial z \\ \partial p_2^1 / \partial z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \partial p_1^1 / \partial z & 0 \\ \partial p_2^1 / \partial z & q_2^1(x) \\ \partial p_3^1 / \partial z & q_3^1(x) \end{bmatrix}, q_2^1(x), q_3^1(x)$$

は行フルランクである。

代数方程式 $0 = p(x, z) + q(x)u$ の左から $E(x)$ をかけて次式のように変形する。

$$0 = \begin{bmatrix} p_1^1(x, z) \\ p_2^1(x, z) \\ p_3^1(x, z) \\ p_4^1(x, z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q_2^1(x) \\ q_3^1(x) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

アルゴリズム 4.

Step 1

$s := 1$ とおく。

Step 2

$F(\hat{p}_1^s(x, z), \hat{p}_4^s(x, z)) = \hat{p}^s(x)$, $F(0, 0) = 0$, かつ $\partial F / \partial p_4^s$ がフルランクとなるような F が存在すると仮定する。代数変数に関して線形なシステムでは、当然存在する。

Step 3

次のランクを計算する。

$$m_s = \text{rank} \begin{bmatrix} \partial p_1^s(x, z) / \partial z & 0 \\ \partial p_2^s(x, z) / \partial z & q_2^s(x) \\ \partial p_3^s(x, z) / \partial z & q_3^s(x) \end{bmatrix}$$

$m_s = m$ ならば終了する。

Step 4

代数変数にも入力にも依存しない代数方程式 $0 = \hat{p}^s(x)$ を時間で一回微分すると、

$$0 = \frac{d\hat{p}^s(x)}{dx} \{f(x, z) + r(x)u\} := p_5^s(x, z) + q_5^s(x)u$$

$$0 = \begin{bmatrix} p_1^s(x, z) \\ p_2^s(x, z) \\ p_3^s(x, z) \\ p_5^s(x, z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q_2^s(x) \\ q_3^s(x) \\ q_5^s(x) \end{bmatrix} u \quad (3.14)$$

を得る。すると、次式を満たす滑らかな正則行列 $E^s(x)$ が存在する。

$$E^s(x) \begin{bmatrix} p_1^s(x, z) & 0 \\ p_2^s(x, z) & q_2^s(x) \\ p_3^s(x, z) & q_3^s(x) \\ p_5^s(x, z) & q_5^s(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^{s+1}(x, z) & 0 \\ p_2^{s+1}(x, z) & q_2^{s+1}(x) \\ p_3^{s+1}(x, z) & q_3^{s+1}(x) \\ p_4^{s+1}(x, z) & 0 \end{bmatrix}$$

ここで

$$\begin{aligned} \text{rank } \partial p_1^{s+1}/\partial z &= \text{rank} \begin{bmatrix} \partial p_1^{s+1}/\partial z \\ \partial p_4^{s+1}/\partial z \end{bmatrix} \\ \text{rank} \begin{bmatrix} \partial p_1^{s+1}/\partial z \\ \partial p_2^{s+1}/\partial z \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} \partial p_1^{s+1}/\partial z \\ \partial p_2^{s+1}/\partial z \\ \partial p_3^{s+1}/\partial z \\ \partial p_4^{s+1}/\partial z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であり、かつ

$$\begin{bmatrix} \partial p_1^{s+1}/\partial z \\ \partial p_2^{s+1}/\partial z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \partial p_1^{s+1}/\partial z & 0 \\ \partial p_2^{s+1}/\partial z & q_2^{s+1}(x) \\ \partial p_3^{s+1}/\partial z & q_3^{s+1}(x) \end{bmatrix}, q_2^{s+1}(x), q_3^{s+1}(x)$$

は行フルランクである。代数方程式 (3.14) の左から $E^s(x)$ をかけて

$$0 = \begin{bmatrix} p_1^{s+1}(x, z) \\ p_2^{s+1}(x, z) \\ p_3^{s+1}(x, z) \\ p_4^{s+1}(x, z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q_2^{s+1}(x) \\ q_3^{s+1}(x) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

と変形する。

$s := s + 1$ とおいて Step 2 に戻る。 \square

有限 index ν を持つ DAE 系に対してこのアルゴリズムは有限回数 \bar{s} で収束し、新しい DAE を与える。

$$\dot{x} = f(x, z) + r(x)u \quad (3.15)$$

$$0 = \begin{bmatrix} p_1^{\bar{s}}(x, z) \\ p_2^{\bar{s}}(x, z) \\ p_3^{\bar{s}}(x, z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q_2^{\bar{s}}(x) \\ q_3^{\bar{s}}(x) \end{bmatrix} u \quad (3.16)$$

$$0 = \hat{p}^i(x), \quad i = 1, \dots, \bar{s} \quad (3.17)$$

新しい入力を持つ DAE が正則となるように状態フィードバック補償器を設計する。
まず入力変換

$$u = M(x) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

を用いて、正則でない拘束に現れる入力 u_1 を分離する。ここで $M(x)$ は次式を満たす正則行列として選ぶ。

$$q_3^{\bar{s}}(x)M(x) = \begin{bmatrix} \hat{q}(x) & 0 \end{bmatrix}$$

但し $\hat{q}(x)$ は正則である。Index 1 の正則な DAE 系に変形するため、すべての状態変数を含むフィードバック補償器

$$u_1 = (\hat{q}(x))^{-1}(-p_3^{\bar{s}}(x, z) + Sz + v_1)$$

を設計する。ここで S は行列

$$\begin{bmatrix} S \\ \partial p_1^{\bar{s}}/\partial z \\ \partial p_2^{\bar{s}}/\partial z \end{bmatrix}$$

が正則となるように選ぶ。微分方程式 (3.15) と代数方程式 (3.16) は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{f}(x, z) + \bar{r}(x)v \\ 0 &= \bar{p}(x, z) + \bar{q}(x)v \end{aligned}$$

ここで $v = (v_1^T, u_2^T)^T$ は新しい入力ベクトルである。これは index 1 の DAE 系であり、代数方程式を時間で一回微分すると \dot{z} が得られる。 $\hat{x} = (x^T, z^T)^T$ とおくと、拡大系は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{f}(\hat{x}, v) + \hat{r}(\hat{x})w \\ \dot{v} &= w \\ \hat{g}(\hat{x}, v) &= 0 \\ y &= h(\hat{x}, v) \end{aligned}$$

ここで $\hat{f}(0, 0) = 0, \hat{g}(0, 0) = 0, h(0, 0) = 0$ である。

3.6 ODE 化手法とレギュラー化との比較

3.1~3.3 節で提案した入力に積分器を付加することによって冗長な explicit ODE に変形する手法、Kumar らの提案したレギュラー化、及び 3.5 節の改良したレギュラー化を比較する。

まず、Kumar らのレギュラー化に比べ、改良したレギュラー化は、代数変数に関しての線形性を必要としないので、余分な付加されるダイナミクスの次数が小さいという利点がある。実際、元の系が入力に関して線形であれば、改良したレギュラー化では新たなダイナミクスを付加する必要は無い。しかし、改良したレギュラー化の Step 2 において、代数方程式の一部を解く作業が必要になり、トレードオフとなっている。また、レギュラー化の最終段階のフィードバックにおいて、改良したレギュラー化は代数変数のフィードバックも許すことで、手順を簡単化している。これは、代数変数が直接観測できない場合には、障害となりうる。

3.1~3.3 節で提案した入力に積分器を付加する方法と Kumar らの方法の比較では、付加するダイナミクスの次数が問題となる。先に述べたように、この次数は場合によって異なり、どちらの手法が優れているとは一概に言えない。ただし、新たに得られた入力から何らかの出力までの相対次数は、入力に積分器を付加する方法が大きくなる場合もある(すべての場合にそうとは言えない)。また、入力に積分器を付加する方法では、代数方程式に新たな入力は含まず、新たな入力から代数変数までの直達成分はない。一方、レギュラー化では、新たな入力から代数変数までの直達成分を許容するため、代数変数の連続性(ジャンプしない)を要求する場合は、入力側に積分器を付加する必要がある。

レギュラー化の一番の問題は、状態フィードバックに基づくため、状態が直接観測できる場合に限られるという点である。非線形系であるから、レギュラー化した後のシステムを元にオブザーバを設計することは無意味であり、レギュラー化を用いる場合は、非レギュラーな方程式のままでオブザーバを構成する必要があることが一番の問題である。その場合でも、オブザーバの内部変数が真値に収束するまでの過渡状態ではインパルスモードは除去しきれていないので、指令値などの外部からの入力を滑らかなクラスに限定する必要があるであろう。

結論として、オブザーバを用いる必要がある場合は、入力に積分器を付加する方法のみが、現状では可能な手法である。状態が全て観測できる場合は、改良したレギュラー化が適用できるならば、それを用いるのが良い。その他の場合は、Kumar らの方法と入力に積分器を付加する方法のどちらでも大差なく、目的に応じた方法を選択すればよいと思われる。

3.7 例題

次式で表される非線形 DAE 系を考える。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + u_1 \\ 2x_1 + x_3 \\ 2x_4 + \sin x_4 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

ここで u_1 は入力である。

3.7.1 入力に積分器を付加する手法

代数方程式を繰り返し微分することにより、次の系が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + u_1 \\ 2x_1 + x_3 \\ 2x_4 + \sin x_4 \\ -(2x_1 + x_3 + u_2 + u_3)/(2 + \cos x_4) \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 + u_1 \\ x_2 + 2x_4 + \sin x_4 + u_1 + u_2 \end{pmatrix}$$

3.7.2 Kumar らの提案したレギュラー化

状態変数の拡大を行い、代数変数に関して線形な系に変形する。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + u_1 \\ 2x_1 + x_3 \\ 2x_4 + \sin x_4 \\ x_5 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Index を下げるアルゴリズムにより、次の代数方程式が得られる。

$$0 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 + u_1 \end{pmatrix}$$

状態フィードバック則

$$\dot{w} = v$$

$$u_1 = -x_1 - x_3 + x_4 + w$$

により、次の系が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + u_1 \\ 2x_1 + x_3 \\ 2x_4 + \sin x_4 \\ x_5 \\ v \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_4 + w \\ x_5 + v \end{pmatrix}$$

3.7.3 改良したレギュラー化

Index を下げるアルゴリズムにより、次の代数方程式が得られる。

$$0 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 + u_1 \end{pmatrix}$$

状態フィードバック則

$$u_1 = -x_1 - x_3 + x_4 + v$$

により、次の系が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + u_1 \\ 2x_1 + x_3 \\ 2x_4 + \sin x_4 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_4 + v \end{pmatrix}$$

レギュラー化では入力陽に現れるとそれ以上微分しない。また、状態フィードバック則によってレギュラーでない代数方程式はシンプルになる。Kumar らの提案したレギュラー化に比べて、改良したレギュラー化は状態変数の次数が小さくなっていることがわかる。

第4章 制御系設計

得られた ODE は入力に関して非線形な系なので、入力に積分器を付加して拡大系を作り、厳密な入出力線形化を行なう。さらに、目標値に追従させるように制御則を設計する。

4.1 拡大系

制御対象は入力に関して非線形な系なので、

$$\dot{v} = E_0 v + F_0 w, \quad (w \in R^\ell)$$

のように積分器を付加して拡大系を作る。ここで $q_i = \dim v_{\nu+1,i}$ とおくと、

$$E_0 = \text{diag.} \begin{bmatrix} E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & E_\ell \end{bmatrix}$$

$$E_i = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{q_i-1} \\ \vdots & \\ 0 & \\ \hline 0 & 0 \dots 0 \end{array} \right], \quad i = 1, \dots, \ell$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_\ell \end{bmatrix}$$

$$F_i = \begin{bmatrix} O_{(q_i-1) \times \ell} \\ 0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \ell$$

である。

拡大系は次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{f}(\hat{x}, v) \\ \dot{v} &= E_0 v + F_0 w \\ 0 &= \hat{g}(\hat{x}, v) \\ y &= h(\hat{x}, v) \end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで $\hat{f}(0,0) = 0$, $\hat{g}(0,0) = 0$, $h(0,0) = 0$ である。

4.2 厳密な入出力線形化

拡大系は入力に関して非線形な系なので、厳密な入出力線形化を行なうため、次の仮定をおく。

仮定 3. 得られた拡大系はベクトル相対次数 ρ_1, \dots, ρ_ℓ を持つ。

仮定 1-3 のもとで入出力関係を線形化する。出力 $y_i (i = 1, \dots, \ell)$ を時間で ρ_i 回微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^k y_i}{dt^k} &= \psi_{i,k}(\hat{x}, v), \quad k = 0, \dots, \rho_i - 1 \\ \frac{d^{\rho_i} y_i}{dt^{\rho_i}} &= \psi_{i,\rho_i}(\hat{x}, v) + b_i(\hat{x}, v)w \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \psi_{i,0}(\hat{x}, v) &= h_i(\hat{x}, v) \\ \psi_{i,j+1}(\hat{x}, v) &= \frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial \hat{x}} \hat{f}(\hat{x}, v) + \frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial v} E_0 v, \quad j = 0, \dots, \rho_i - 1 \\ b_i(\hat{x}, v) &= \frac{\partial \psi_{i,\rho_i-1}}{\partial v} F_0 \end{aligned}$$

である。これより

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{d^{\rho_1} y_1}{dt^{\rho_1}} \\ \vdots \\ \frac{d^{\rho_\ell} y_\ell}{dt^{\rho_\ell}} \end{pmatrix} &= a(\hat{x}, v) + B(\hat{x}, v)w \\ &= \begin{pmatrix} \psi_{1,\rho_1}(\hat{x}, v) \\ \vdots \\ \psi_{\ell,\rho_\ell}(\hat{x}, v) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(\hat{x}, v) \\ \vdots \\ b_\ell(\hat{x}, v) \end{bmatrix} w \end{aligned}$$

が得られる。ベクトル相対次数を持つと仮定するので、 $B(\hat{x}, v)$ は正則である。よって、制御則

$$w = B^{-1}(\hat{x}, v) \{-a(\hat{x}, v) + \bar{w}\} \quad (4.2)$$

を用いると

$$\begin{pmatrix} \frac{d^{\rho_1} y_1}{dt^{\rho_1}} \\ \vdots \\ \frac{d^{\rho_\ell} y_\ell}{dt^{\rho_\ell}} \end{pmatrix} = \bar{w}$$

のように入出力関係が線形化される。

ここでは代数方程式を用いずに入出力線形化を行なったが、代数変数は拘束条件を満たすので、拘束されたシステムに対しても入出力線形化されているといえる。

4.3 追従制御

ある目標値関数 $y_d(t)$ に関する追従制御を行なうため、 \bar{w} に $\psi_{i,0}, \dots, \psi_{i,\rho_i-1}$ の線形フィードバック

$$\bar{w}_i = \frac{d^{\rho_i} y_{d,i}}{dt^{\rho_i}} + \alpha_{i,\rho_i-1} \left(\frac{d^{\rho_i-1} y_{d,i}}{dt^{\rho_i-1}} - \psi_{i,\rho_i-1} \right) + \dots + \alpha_{i,0} (y_{d,i} - \psi_{i,0}) \quad (4.3)$$

を用いる。但し、

$$s^{\rho_i} + \alpha_{i,\rho_i-1} s^{\rho_i-1} + \dots + \alpha_{i,1} s + \alpha_{i,0}$$

は Hurwitz 多項式である。

拡大系を以下のように書き直す。

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{1,0} &= \psi_{1,1} \\ &\vdots \\ \dot{\psi}_{1,\rho_1-1} &= \bar{a}_1(\psi, \eta) + \bar{b}_1(\psi, \eta)w \\ &\vdots \\ \dot{\psi}_{\ell,0} &= \psi_{\ell,1} \\ &\vdots \\ \dot{\psi}_{\ell,\rho_\ell-1} &= \bar{a}_\ell(\psi, \eta) + \bar{b}_\ell(\psi, \eta)w \\ \dot{\eta} &= s(\psi, \eta) \end{aligned}$$

ここで $\psi_{i,k} = \psi_{i,k}(\bar{x}, \bar{z}, v)$, かつ $\eta = \eta(\bar{x}, v)$ は $(\bar{x}^T, v^T)^T \rightarrow (\psi^T, \eta^T)^T$ が微分同相写像となるように選ばれる。

閉ループ系は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_{1,0} &= \xi_{1,1} \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{1,\rho_1-1} &= -(\alpha_{1,\rho_1-1}\xi_{1,\rho_1-1} + \cdots + \alpha_{1,0}\xi_{1,0}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{\ell,0} &= \xi_{\ell,1} \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{\ell,\rho_\ell-1} &= -(\alpha_{\ell,\rho_\ell-1}\xi_{\ell,\rho_\ell-1} + \cdots + \alpha_{\ell,0}\xi_{\ell,0}) \\
 \dot{\eta} &= s_0(\eta) + s_1(\xi, \eta, \bar{y}_d(t))(\xi + \bar{y}_d(t))
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 s_0(\eta) &= s(0, \eta) \\
 \xi_{i,k} &= \psi_{i,k} - \frac{d^k y_{d,i}}{dt^k} \\
 \bar{y}_d(t) &= \begin{pmatrix} y_{d,1} \\ \frac{dy_{d,1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{\rho_1-1} y_{d,1}}{dt^{\rho_1-1}} \\ \vdots \\ y_{d,\ell} \\ \frac{dy_{d,\ell}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{\rho_\ell-1} y_{d,\ell}}{dt^{\rho_\ell-1}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

である。

内部状態の有界性を保証するためには、少なくとも系が最小位相系でなければならない。そこで次の仮定をおく。

仮定 4. ゼロダイナミクス $\dot{\eta} = s_0(\eta)$ は大域的指数安定である。

仮定 5. $\bar{y}_d(t)$ は有界であると仮定し、そのとき $s_1(\xi, \eta, \bar{y}_d(t))$ も有界であると仮定する。

定理 1. 仮定 1-5 が成り立つとき、誤差システムの状態変数 ξ は 0 に漸近し、残りの状態変数 η も有界となる。

証明は文献 [6] 参照。

第5章 オブザーバ設計

状態フィードバック則 (4.2), (4.3) は微分変数 \bar{x} だけでなく代数変数 \bar{z} も含む。そのため \bar{x} , \bar{z} を同時に推定するオブザーバが必要である。ここではある観測量 $c(\bar{x}, \bar{z}, v)$ をもとに \bar{x} , \bar{z} , v の推定値 \tilde{x} , \tilde{z} , \tilde{v} を同時に求めるオブザーバを考える。

5.1 オブザーバ設計

まず始めに考えられるオブザーバは次のようなものである。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{v}) \\ f_{\tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{v}) \\ E_0 \tilde{v} + F_0 w \end{pmatrix} + G_1(c(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{v}) - c(\bar{x}, \bar{z}, \tilde{v})) + G_2 g(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{v}) \quad (5.1)$$

誤差ダイナミクスの非線形性をポリトープで覆い、LMI を解くことによってオブザーバゲイン G_1 , G_2 を求める手法を考える。しかし、非線形性はもともとポリトープで覆えるとは限らない。また、ポリトープで覆えたとしても、行列の大きさが大きいと LMI の解が存在しないかもしれない。このオブザーバでは、ポリトープで覆わなければならない行列の大きさが大きく、非常に厳しい条件になってしまう。

そこで、次に、代数変数を有限時間内に不変多様体上に持っていくことによって、その後のダイナミクスの次数を減らすようなオブザーバを考えたい。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{v}) \\ E_0 \tilde{v} + F_0 w \end{pmatrix} + G(c(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{v}) - c(\bar{x}, \bar{z}, \tilde{v})) \\ \frac{d\tilde{z}}{dt} &= - \left[\frac{\partial g(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{v})}{\partial \tilde{z}} \right]^{-1} \left\{ \frac{\partial g(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{v})}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{d\tilde{x}}{dt} + \frac{\partial g(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{v})}{\partial \tilde{v}} \cdot \frac{d\tilde{v}}{dt} \right. \\ &\quad \left. + Kg(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{v}) + \epsilon \sqrt[3]{g(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{v})} \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

ところで、新たな入力 v だけではなく、真の入力 u や v もコントローラ内の変数であるから、直接観測できるとしてかまわないであろう。つまり、 v の推定値の \tilde{v} を v と一致させることで、オブザーバを低次元化できる。そのことを考慮して、

オブザーバ

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= f_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{z}, v) + G(c(\tilde{x}, \tilde{z}, v) - c(\bar{x}, \bar{z}, v)) \\ \frac{d\tilde{z}}{dt} &= - \left[\frac{\partial g(\tilde{x}, \tilde{z}, v)}{\partial \tilde{z}} \right]^{-1} \left\{ \frac{\partial g(\tilde{x}, \tilde{z}, v)}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{d\tilde{x}}{dt} + \frac{\partial g(\tilde{x}, \tilde{z}, v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} \right. \\ &\quad \left. + Kg(\tilde{x}, \tilde{z}, v) + \epsilon \sqrt[3]{g(\tilde{x}, \tilde{z}, v)} \right\}\end{aligned}\quad (5.3)$$

を提案する。ここで G は後で決定する定数行列、 K は正定な対角行列、 ϵ は正の定数、 $\sqrt[3]{\cdot}$ はベクトルの各要素に3乗根が作用してできたベクトルとする。以下では、このオブザーバに対して安定性の議論を進める。

\bar{x} の推定誤差を $e_{\bar{x}} = \bar{x} - \tilde{x}$ とし、 $e_g = g(\tilde{x}, \tilde{z}, v)$ と定義する。 $g(\bar{x}, \bar{z}, v) = a$ を \bar{z} に関して解いた式を $\bar{z} = \Phi_0(\bar{x}, v, a)$ とおくと、推定誤差は次式に従う。

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\bar{x}} &= f_{\tilde{x}}(\tilde{x} + e_{\bar{x}}, \Phi_0(\tilde{x} + e_{\bar{x}}, v, 0), v) + Gc(\tilde{x} + e_{\bar{x}}, \Phi_0(\tilde{x} + e_{\bar{x}}, v, 0), v) \\ &\quad - \{f_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \Phi_0(\tilde{x}, v, e_g), v) + Gc(\tilde{x}, \Phi_0(\tilde{x}, v, e_g), v)\}\end{aligned}\quad (5.4)$$

$$\dot{e}_g = -Ke_g - \epsilon \sqrt[3]{e_g} \quad (5.5)$$

また、以下のように展開できる。

$$\begin{aligned}f_{\tilde{x}}(\tilde{x} + e_{\bar{x}}, \Phi_0(\tilde{x} + e_{\bar{x}}, v, 0), v) &= f_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \Phi_0(\tilde{x}, v, 0), v) + A_1(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}})e_{\bar{x}} \\ f_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \Phi_0(\tilde{x}, v, e_g), v) &= f_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \Phi_0(\tilde{x}, v, 0), v) - A_2(\tilde{x}, v, e_g)e_g \\ c(\tilde{x} + e_{\bar{x}}, \Phi_0(\tilde{x} + e_{\bar{x}}, v, 0), v) &= c(\tilde{x}, \Phi_0(\tilde{x}, v, 0), v) + C_1(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}})e_{\bar{x}} \\ c(\tilde{x}, \Phi_0(\tilde{x}, v, e_g), v) &= c(\tilde{x}, \Phi_0(\tilde{x}, v, 0), v) - C_2(\tilde{x}, v, e_g)e_g\end{aligned}\quad (5.6)$$

ここで A_1 は次のように求めることができる。

$$A_1(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}}) = \int_C \frac{\partial f_{\tilde{x}}}{\partial e_{\bar{x}}}(x, s_1 y_1, \dots, s_\ell y_\ell) ds, \quad C : (0, \dots, 0) \rightarrow (1, \dots, 1)$$

A_2, C_1, C_2 も同様にして得られる。このため、 $f_{\tilde{x}}, c$ は少なくとも一回微分可能でなければならない。

(5.6) 式を (5.4) 式に代入すると、

$$\dot{e}_{\bar{x}} = (A_1(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}}) + GC_1(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}}))e_{\bar{x}} + (A_2(\tilde{x}, v, e_g) + GC_2(\tilde{x}, v, e_g))e_g \quad (5.7)$$

となる。

定理 2. e_g は有限時間内に必ず 0 に収束し、かつ大域的漸近安定である。

証明 $d|e_{g,i}|/dt \leq -\epsilon \sqrt[3]{|e_{g,i}|}$ から、 e_g は有限時間内に必ず 0 に収束する。また $d|e_{g,i}|/dt \leq -K|e_{g,i}|$ から、 e_g は大域的漸近安定である。□

5.2 不変多様体上のオブザーバの安定性

(5.5) 式の右辺で局所 Lipschitz 条件が成り立たず、微分方程式の解の一意性が保証されない。実際 (5.5) 式の負の時間方向の解は一意ではないが、正の時間方向の解は唯一に存在する。 e_g は 0 に収束するので、まず $e_g = 0$ のときの誤差ダイナミクス

$$\dot{e}_{\bar{x}} = (A_1(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}}) + GC_1(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}}))e_{\bar{x}} \quad (5.8)$$

について考える。ここでは A_1, C_1 があるポリトープに含まれると仮定し、二次形式の Lyapunov 関数だけを考慮して、行列不等式の考え方を用いて (5.8) 式を安定化する G を求める。

仮定 6. A_1, C_1 はあるポリトープに含まれる。すなわち、ポリトープの頂点集合を (\bar{A}_i, \bar{C}_i) ($i = 1, \dots, N$) とすると、次式を満たす。

$$(A_1(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}}), C_1(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}})) \in \left\{ \sum_{i=1}^N p_i (\bar{A}_i, \bar{C}_i) \mid \sum_{i=1}^N p_i = 1, p_i \geq 0 \right\} \\ \text{for } \forall \tilde{x} \in R^n, \forall e_{\bar{x}} \in R^n$$

A_1, C_1 の選び方には自由度があるが、この仮定はある (A_1, C_1) について成立すればよい。

仮定 7. ある $(\hat{n} - \bar{m}) \times (\hat{n} - \bar{m})$ の正方行列 Q に対して、LMI

$$\text{diag.}[-P_1, P_1 \bar{A}_1 + \bar{A}_1^T P_1 + J \bar{C}_1 + \bar{C}_1^T J^T + Q, \dots, \\ P_1 \bar{A}_N + \bar{A}_N^T P_1 + J \bar{C}_N + \bar{C}_N^T J^T + Q] < 0$$

の解 (P_1, J) が存在する。

定理 3. 仮定 1-7 のもとでオブザーバゲインは $G = P_1^{-1} J$ と得られ、そのとき Lyapunov 関数 $V_0(e_{\bar{x}}) = e_{\bar{x}}^T P_1 e_{\bar{x}}$ の $e_g = 0$ における時間微分は $\dot{V}_0 \leq -e_{\bar{x}}^T Q e_{\bar{x}}$ となる。

証明 V_0 の時間微分を実際に計算すると

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(e_{\bar{x}}) &= \dot{e}_{\bar{x}}^T P_1 e_{\bar{x}} + e_{\bar{x}}^T P_1 \dot{e}_{\bar{x}} \\ &= e_{\bar{x}}^T (A_1^T(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}}) + C_1^T(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}}) G^T) P_1 e_{\bar{x}} \\ &\quad + e_{\bar{x}}^T P_1 (A_1(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}}) + GC_1(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}})) e_{\bar{x}} \\ &= e_{\bar{x}}^T (P_1 A_1(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}}) + A_1^T(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}}) P_1 + J C_1(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}}) + C_1^T(\tilde{x}, v, e_{\bar{x}}) J^T) e_{\bar{x}} \\ &\leq -e_{\bar{x}}^T Q e_{\bar{x}} \end{aligned}$$

となり、自明。 □

もともと非線形性はポリトープで覆えるかどうかわからない。また、ポリトープで覆うべき行列の大きさが大きくなると LMI の解が存在するという条件は厳しくなる。そのため、ポリトープで覆うべき行列は小さいほうがよい。この意味で、式 5.1 あるいは 5.2 のオブザーバより、提案するオブザーバの方が設計の条件が緩和されている。

5.3 オブザーバの大域的安定性

提案したオブザーバの局所安定性は自明であるが、大域的に安定であるかどうかは保証できない。すなわち、ピーキング現象によって e_g が 0 に収束する前に $e_{\tilde{x}}$ が発散する、すなわち finite escape time の存在を否定できないため、定理 2, 3 だけではオブザーバの安定性は保証できないこととなる。そこで次の仮定をおく。

仮定 8. 正の関数 $A_0(e_g)$, $C_0(e_g)$ が存在し、 A_2 および C_2 のノルムは次式を満たす。

$$\begin{aligned}\|A_2(\tilde{x}, e_{\tilde{x}}, e_g)\| &\leq A_0(e_g) \\ \|C_2(\tilde{x}, e_{\tilde{x}}, e_g)\| &\leq C_0(e_g)\end{aligned}$$

ここで $\|\cdot\|$ はベクトルに対してはユークリッドノルム、行列に対してはグラム行列の最大固有値の平方根を表す。

定理 4. $e_{\tilde{z}} = \tilde{z} - \bar{z}$, $e = (e_{\tilde{x}}^T, e_{\tilde{z}}^T)^T$ とおく。仮定 1-8 のもとで $M_0(e(0)) > 0$, $k_0 > 0$ が存在して、 e は

$$\|e\| \leq M_0(e(0)) \exp(-k_0 t)$$

のように大域的漸近安定かつ局所指数安定である。

証明 式 (5.7) のもとで V_0 を時間で一回微分する。

$$\dot{V}_0 \leq -e_{\tilde{x}}^T Q e_{\tilde{x}} + 2\|e_{\tilde{x}}^T P_1\| (A_0(e_g) + \|G\| C_0(e_g)) \|e_g\|$$

$\max \lambda_i(K)$, $\min \lambda_i(K)$ はそれぞれ K の最大、最小の固有値を表すとする。 $k_1 = \min \lambda_i(K)$ とおくと、定理 2 より

$$\|e_g\| \leq M_1 \|e_g(0)\| \exp(-k_1 t) \tag{5.9}$$

が得られる。これより $M_2(e_g(0))$ が存在し、

$$\dot{V}_0 \leq \|e_{\tilde{x}}^T P_1\| M_2(e_g(0)) \exp(-k_1 t) - e_{\tilde{x}}^T Q e_{\tilde{x}}$$

と書ける。 $\|e_{\bar{x}}\| \geq 1$ の領域では次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &\leq (M_3(e_g(0)) \exp(-k_1 t) - M_4) V_0 \\ V_0 &\leq \exp \left\{ -\frac{M_3(e_g(0))}{k_1} (\exp(-k_1 t) - 1) - M_4 t \right\} \cdot V_0(e_{\bar{x}}(0)), \quad \|e_{\bar{x}}\| \geq 1 \end{aligned}$$

明らかに V_0 は有界なので、 $e_{\bar{x}}$ も有界である。 e は有限時間で 0 に収束し、それまでの間 $e_{\bar{x}}$ は有界であることが証明された。また、ある時間以降の $e_{\bar{x}}$ の動特性は式 (5.8) となり、定理 3 より大域的指数安定である。よって $e_{\bar{x}}$ は大域的漸近安定かつ局所指数安定で、

$$\|e_{\bar{x}}(t)\| \leq M_5(e_{\bar{x}}(0), e_g(0)) \exp(-k_2 t) \quad (5.10)$$

となる。ヤコビ行列

$$\frac{\partial \Phi_0(\tilde{x}, v, e_g)}{\partial e_g} = \left[\frac{\partial g(\tilde{x}, \tilde{z}, v)}{\partial \tilde{z}} \right]^{-1}$$

が正則であり、かつ e_g が大域的指数安定なので、 $\tilde{z} - \Phi(\tilde{x}, \tilde{v})$ も大域的漸近安定かつ局所指数安定である。さらに式 (5.10) を考慮すると、 \tilde{z} の推定誤差 $e_{\bar{z}}$ も大域的漸近安定かつ局所指数安定で、

$$\|e_{\bar{z}}(t)\| \leq M_6(e_{\bar{x}}(0), e_g(0)) \exp(-k_3 t) \quad (5.11)$$

と書ける。式 (5.9), (5.10), (5.11) より定理 4 が証明された。 \square

第6章 制御系の安定性

非線形系の場合、オブザーバの大域的安定性が示されても制御系全体が大域的に安定とは限らない。ここでは、ある仮定のもとで大域的に追従誤差が0に漸近しかつ系全体の挙動が有界であることを示す。

6.1 内部状態の有界性

(4.2), (4.3) をあわせて $w = \gamma(\bar{x}, \bar{z}, v, \bar{y}_d)$ とおく。推定値を用いた制御則 $\tilde{w} = \gamma(\tilde{x}, \tilde{z}, v, \bar{y}_d)$ のもとで閉ループ系は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{1,0} &= \xi_{1,1} \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{1,\rho_1-1} &= -(\alpha_{1,\rho_1-1}\xi_{1,\rho_1-1} + \cdots + \alpha_{1,0}\xi_{1,0}) + \zeta_1(\xi, \eta, \bar{y}_d, e)e \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\ell,0} &= \xi_{\ell,1} \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\ell,\rho_\ell-1} &= -(\alpha_{\ell,\rho_\ell-1}\xi_{\ell,\rho_\ell-1} + \cdots + \alpha_{\ell,0}\xi_{\ell,0}) + \zeta_\ell(\xi, \eta, \bar{y}_d, e)e \\ \dot{\eta} &= s_0(\eta) + s_1(\xi, \eta, \bar{y}_d(t))(\xi + \bar{y}_d(t)) \end{aligned}$$

これを簡単に

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_0\xi + \zeta(\xi, \eta, \bar{y}_d, e)e \\ \dot{\eta} &= s_0(\eta) + s_1(\xi, \eta, \bar{y}_d(t))(\xi + \bar{y}_d(t)) \end{aligned}$$

と書く。Lyapunov 方程式

$$P_2 A_0 + A_0^T P_2 = -I$$

の正定値解を P_2 とすると、真値を用いた制御則のもとでの閉ループ系の ξ に関する Lyapunov 関数を $V_1(\xi) = \xi^T P_2 \xi$ と取ることができる。

またゼロダイナミクスは大域的漸近安定なので、次式を満たす Lyapunov 関数 $V_2(\eta)$ が存在する。

$$\begin{aligned} a_1 \|\eta\|^2 &\leq V_2(\eta) \leq a_2 \|\eta\|^2, \quad a_1 > 0, a_2 > 0 \\ \frac{\partial V_2}{\partial \eta} s_0(\eta) &\leq -a_3 \|\eta\|^2, \quad a_3 > 0 \\ \left\| \frac{\partial V_2}{\partial \eta} \right\| &\leq a_4 \|\eta\|, \quad a_4 > 0 \end{aligned}$$

推定誤差の干渉項 ζ に関して、以下の仮定をおく。

仮定 9. $\zeta(\xi, \eta, \bar{y}_d, e)$ は $(\xi^T, \eta^T)^T$ に関して *linear growth* である。すなわち、次式を満たす L_1, L_2 が存在する。

$$\|\zeta(\xi, \eta, \bar{y}_d, e)\| \leq L_1(\bar{y}_d, e) + L_2(\bar{y}_d, e) \left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\|$$

定理 5. 仮定 1-9 のもとでは、 ξ, η は有界である。

証明 2つの Lyapunov 関数の和 $W_0(\xi, \eta) = k_4 V_1(\xi) + V_2(\eta)$ を考える。これを時間で一回微分すると

$$\begin{aligned} \dot{W}_0 &\leq -k_4 \|\xi\|^2 - a_3 \|\eta\|^2 + a_4 M_7 \|\eta\| (\|\xi\| + y_{d,\max}) \\ &\quad + 2k_4 \|\xi\| \max \lambda_i(P_2) \left(L_1(\bar{y}_d, e) + L_2(\bar{y}_d, e) \left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\| \right) e \end{aligned}$$

となる。但し M_7 は $\|s_1\| \leq M_7$ となる定数で、 $y_{d,\max} = \sup \|\bar{y}_d(t)\| > 0$ である。 $k_4 > (a_4 M_7)^2 / 4a_3$ のように k_4 をとると、次のようになる。

$$\begin{aligned} &-k_4 \|\xi\|^2 - a_3 \|\eta\|^2 + a_4 M_7 \|\eta\| (\|\xi\| + y_{d,\max}) \\ &= -k_4 \left(\|\xi\| - \frac{a_4 M_7}{2k_4} \|\eta\| \right)^2 - \frac{4a_3 k_4 - (a_4 M_7)^2}{4k_4} \|\eta\|^2 + a_4 M_7 y_{d,\max} \|\eta\| \\ &\leq 0 \\ \text{for } \|\eta\| &\geq \frac{4k_4 a_4 M_7 y_{d,\max}}{4a_3 k_4 - (a_4 M_7)^2} \end{aligned}$$

また定理4より $M_8 > 0$ が存在して、以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \dot{W}_0 &\leq M_8(e(0), y_{d,\max}) \exp(k_0 t) \|\xi\| \left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\|, \quad \text{for } \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in X \\ X &= \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mid \|\eta\| \geq \frac{4k_4 a_4 M_7 y_{d,\max}}{4a_3 k_4 - (a_4 M_7)^2}, \left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\| \geq 1 \right\} \\ \|\xi\| \left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\| &\leq \left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &\leq \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 \\ &\leq \max \left(\frac{1}{k_4 \min \lambda_i(P_2)}, \frac{1}{a_1} \right) W_0(\xi, \eta) \\ &\leq k_5 W_0(\xi, \eta) \end{aligned}$$

よって、次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{W}_0 &\leq M_8 k_5 W_0 \exp(-k_0 t), \quad \text{for } \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in X \\ W_0 &\leq \exp \left\{ \frac{k_5}{k_0} M_8 (1 - \exp(-k_0 t)) \right\} \cdot W_0(\xi(0), \eta(0)) \end{aligned}$$

$W_0(\xi(t), \eta(t))$ は有界なので、 ξ, η も有界である。 □

6.2 誤差ダイナミクスの安定性

誤差ダイナミクスの安定性について考える。

定理 6. 仮定 1-9 のもとでは、 ξ は大域的に 0 に漸近する。

証明 別の Lyapunov 関数 W_1 を考える。

$$W_1(\xi, \eta, e) = V_1(\xi) + \Psi(\xi, \eta, e) + V_0(e_{\bar{x}}) + \|e_g\|^2 \quad (6.1)$$

$$\Psi(\xi, \eta, e) = 2 \int_t^\infty \xi^T P_2 \zeta(\xi, \eta, \bar{y}_d, e) e d\tau \quad (6.2)$$

証明の過程では \bar{y}_d は既に与えられるものとするが、オブザーバを設計する段階では、 \bar{y}_d の情報は有界であるという仮定を除けば不要である。 W_1 は \bar{y}_d の汎関数だが、 t の関数ではない。

定理4及び ξ, η, \bar{y}_d の有界性より $M_9 > 0$ が存在して、次式が得られる。

$$\begin{aligned} |\Psi(\xi(0), \eta(0), e(0))| &\leq \int_0^\infty M_9(\xi(0), \eta(0), \bar{y}_d, e(0)) \exp(-k_0 t) dt \\ &= \frac{M_9}{k_0} \end{aligned}$$

これより、(6.2)式の積分可能性は示される。また、 $\xi(0), \eta(0), e(0)$ に関する軌道の連続性より Ψ の連続性を示すことができる。

$$\begin{aligned} V_1(\xi(t)) + \int_0^t \xi^T(\tau)\xi(\tau)d\tau &= V_1(\xi(0)) + 2 \int_0^t \xi^T P_2 \zeta e d\tau \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left(V_1(\xi(t)) + \int_0^t \xi^T(\tau)\xi(\tau)d\tau \right) &= V_1(\xi(0)) + \Psi(\xi(0), \eta(0), e(0)) \end{aligned}$$

これより明らかに $W_1 \geq 0$ である。 $W_1 = 0$ ならば $e = 0, \xi = 0$ となるので、 W_1 は e, ξ に関して正定である。 $e \rightarrow \infty$ のとき $W_1 \rightarrow \infty$ となるのは $V_1 + \Psi \geq 0$ より明らかであるが、 $\xi \rightarrow \infty$ のとき $W_1 \rightarrow \infty$ となることは自明ではない。

定理4, 仮定9及び η, \bar{y}_d の有界性より M_{10}, M_{11} が存在し、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 + \|\xi\|^2 &\geq -2\|\xi\| \cdot \|P_2\| \left(L_1(\bar{y}_d, e) + L_2(\bar{y}_d, e) \left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\| \right) \\ &\quad \cdot M_0(e(0)) \exp(-k_0 t) \\ &\geq -\|\xi\| (M_{10}(\eta(0), y_{d,\max}, e(0)) \|\xi\| \\ &\quad + M_{11}(\eta(0), y_{d,\max}, e(0))) \exp(-k_0 t) \\ &\geq \left(-\frac{2M_{10}V_1}{\min \lambda_i(P_2)} - \frac{M_{11}^2}{4M_{10}} \right) \exp(-k_0 t) \\ &\geq -(M_{12}(\eta(0), y_{d,\max}, e(0))V_1 \\ &\quad + M_{13}(\eta(0), y_{d,\max}, e(0))) \exp(-k_0 t) \\ V_1(\xi(t)) + \int_0^t \xi^T(\tau)\xi(\tau)d\tau &\geq \exp\left(-\frac{M_{12}}{k_0}\right) \cdot V_1(\xi(0)) - \frac{M_{13}}{k_0} \end{aligned}$$

$t \rightarrow \infty$ とすると

$$V_1(\xi(0)) + \Psi(\xi(0), \eta(0), e(0)) \geq \exp\left(-\frac{M_{12}}{k_0}\right) \cdot V_1(\xi(0)) - \frac{M_{13}}{k_0}$$

となり、 W_1 が ξ に関して放射状に非有界であることがわかる。また W_1 を時間で微分すると

$$\dot{W}_1 \leq -\|\xi\|^2 - e_x^T Q e_x - 2e_g^T K e_g$$

となり、 ξ が大域的に0に漸近することが証明された。 □

第7章 シミュレーションによる制御系の評価

提案した手法の有効性を確認するため、シミュレーションを示す。

7.1 シミュレーション

次式で表される非線形 DAE 系を考える。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + u_1 \\ 2x_1 + x_3 \\ 2x_4 + \sin x_4 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$y = 2x_4 + \sin x_4$$

$$c = x_3$$

ここで u_1 は入力、 y は制御したい出力、 c は観測量とする。この系は仮定 1, 2 を満たし、index は 3 である。

アルゴリズムより、次の拡大系が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + u_1 \\ 2x_1 + x_3 \\ 2x_4 + \sin x_4 \\ -(2x_1 + x_3 + u_2 + u_3)/(2 + \cos x_4) \\ u_2 \\ u_3 \\ w \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 + u_1 \\ x_2 + 2x_4 + \sin x_4 + u_1 + u_2 \end{pmatrix}$$

拡大系は仮定 3 を満たし、相対次数は 2 である。またゼロダイナミクスは存在しないので仮定 4, 5 も自動的に満たされる。

出力を w の項が現れるまで微分する。

$$\begin{aligned} y &= 2x_4 + \sin x_4 = \psi_0 \\ \dot{y} &= -(2x_1 + x_3 + u_2 + u_3) = \psi_1 \\ \ddot{y} &= -(2x_2 + 2x_4 + \sin x_4 + 2u_1 + u_3 + w) = \psi_2 + Bw \end{aligned}$$

閉ループ系の極を -1 (重根) とする。

$$\begin{aligned} 0 &= (s+1)^2(y_d - y) \\ &= (s^2 + 2s + 1)(y_d - y) \\ &= \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt} + 1 \right) (y_d - y) \end{aligned}$$

入出力線形化及び目標値に追従させるための状態フィードバック則は、(4.2), (4.3) より

$$\begin{aligned} w &= B^{-1}\{-(\psi_2 + 2\psi_1 + \psi_0) + (\dot{y}_d + 2\ddot{y}_d + y_d)\} \\ &= -(4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2u_1 + 2u_2 + 3u_3) - (\dot{y}_d + 2\ddot{y}_d + y_d) \end{aligned}$$

となる。

(5.3) 式よりオブザーバを構成する。

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} &= \tilde{x}_2 + u_1 + G(\tilde{x}_3 - x_3) \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -(d\tilde{x}_1/dt + K_1 e_{g_1} + \epsilon\sqrt[3]{e_{g_1}}) \\ -(d\tilde{x}_1/dt + u_2 + K_2 e_{g_2} + \epsilon\sqrt[3]{e_{g_2}}) \\ \{(d\tilde{x}_1/dt + K_1 e_{g_1} + \epsilon\sqrt[3]{e_{g_1}}) - (u_2 + u_3 + K_3 e_{g_3} + \epsilon\sqrt[3]{e_{g_3}})\} \\ / (2 + \cos \tilde{x}_4) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

代数方程式から次式が得られる。

$$\begin{aligned} x_2 &= -\tilde{x}_1 - e_{x_1} \\ \tilde{x}_2 &= -\tilde{x}_1 + e_{g_1} \end{aligned}$$

これより $f_{\tilde{x}}$, c は以下のように展開できる。

$$\begin{aligned} f_{\tilde{x}}(\tilde{x} + e_{\tilde{x}}, \Phi_0(\tilde{x} + e_{\tilde{x}}, v, 0), v) &= -\tilde{x}_1 + u_1 - e_{\tilde{x}} \\ f_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \Phi_0(\tilde{x}, v, e_g), v) &= -\tilde{x}_1 + u_1 - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} e_g \\ c(\tilde{x} + e_{\tilde{x}}, \Phi_0(\tilde{x} + e_{\tilde{x}}, v, 0), v) &= -\tilde{x}_1 - u_1 - e_{\tilde{x}} \\ c(\tilde{x}, \Phi_0(\tilde{x}, v, e_g), v) &= -\tilde{x}_1 - u_1 \end{aligned}$$

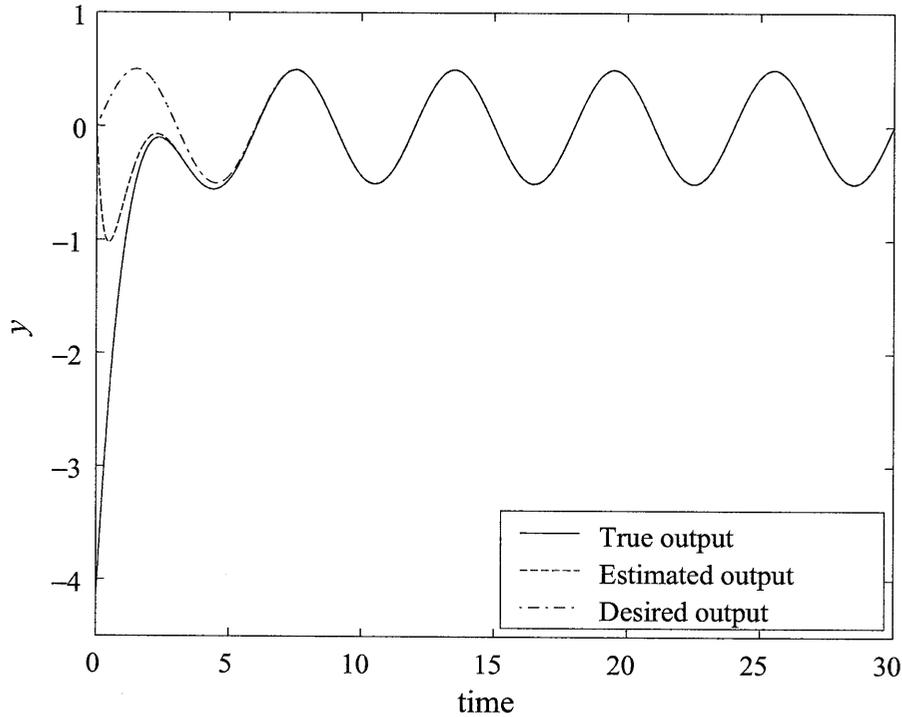


図 7.1: Response of output.

明らかに仮定 6,8 は満たされる。仮定 7 における LMI の解の一つより、オブザーバゲイン $G = 1$ が得られる。

制御系の安定性を保証するため、仮定 9 を確認する。推定誤差の干渉項は次のようになる。

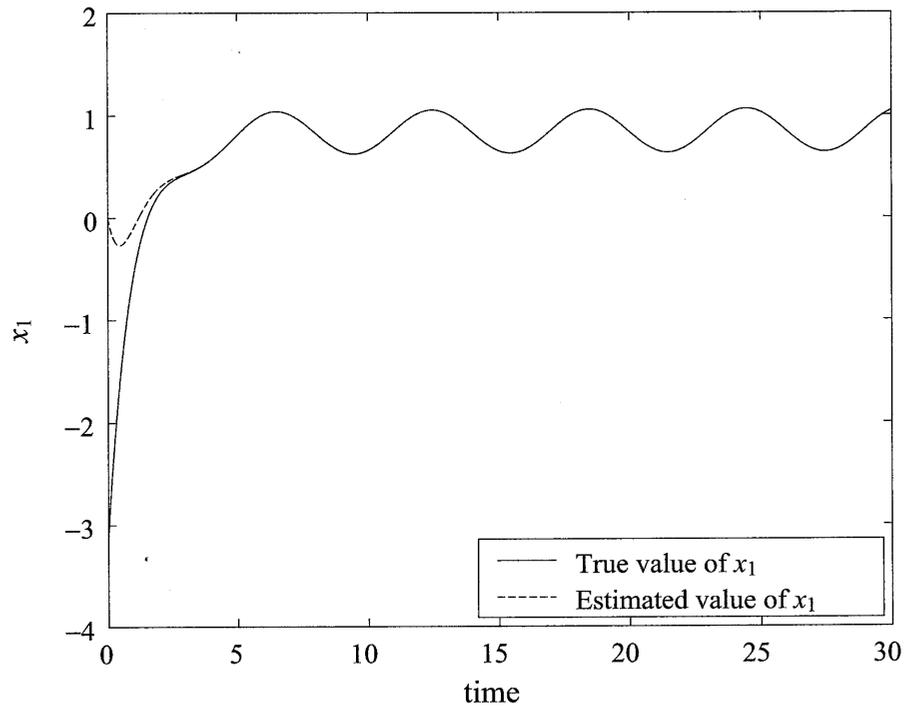
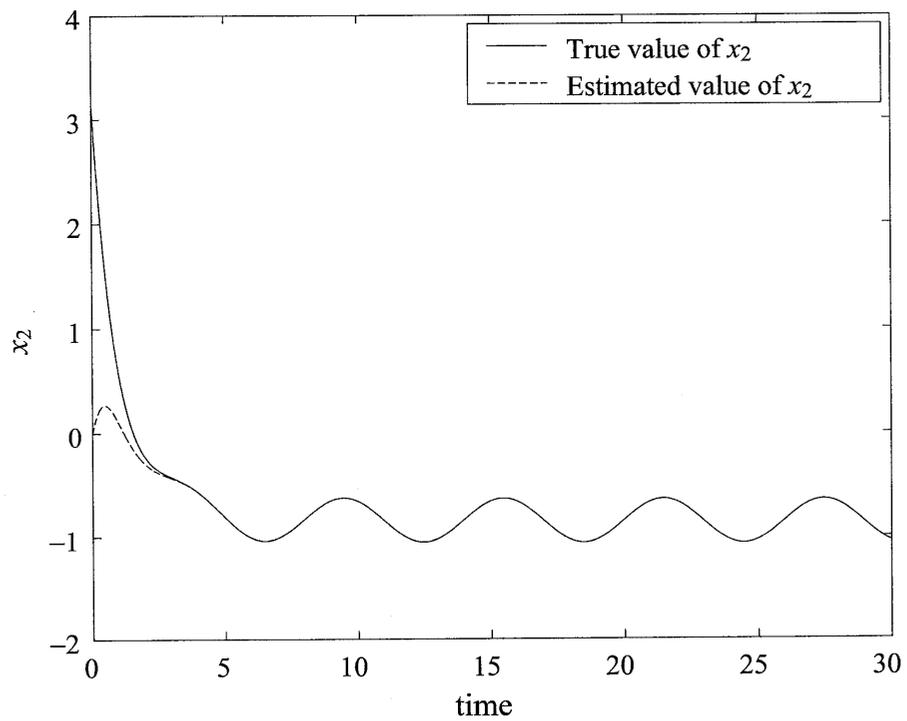
$$\zeta(\bar{x}, \bar{z}, v, \bar{y}_d, e)e = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} e$$

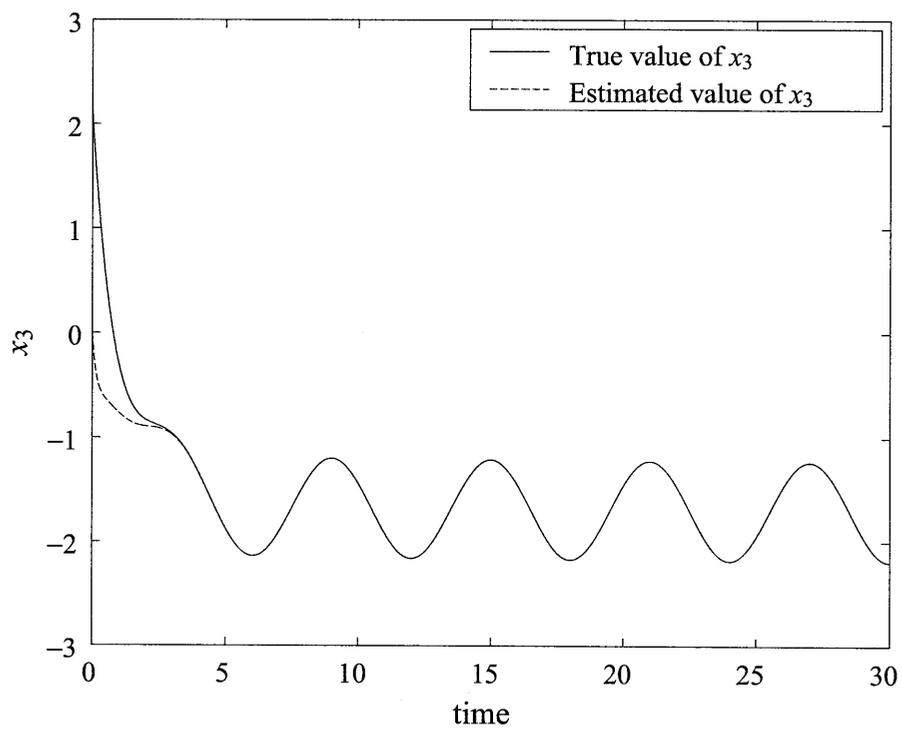
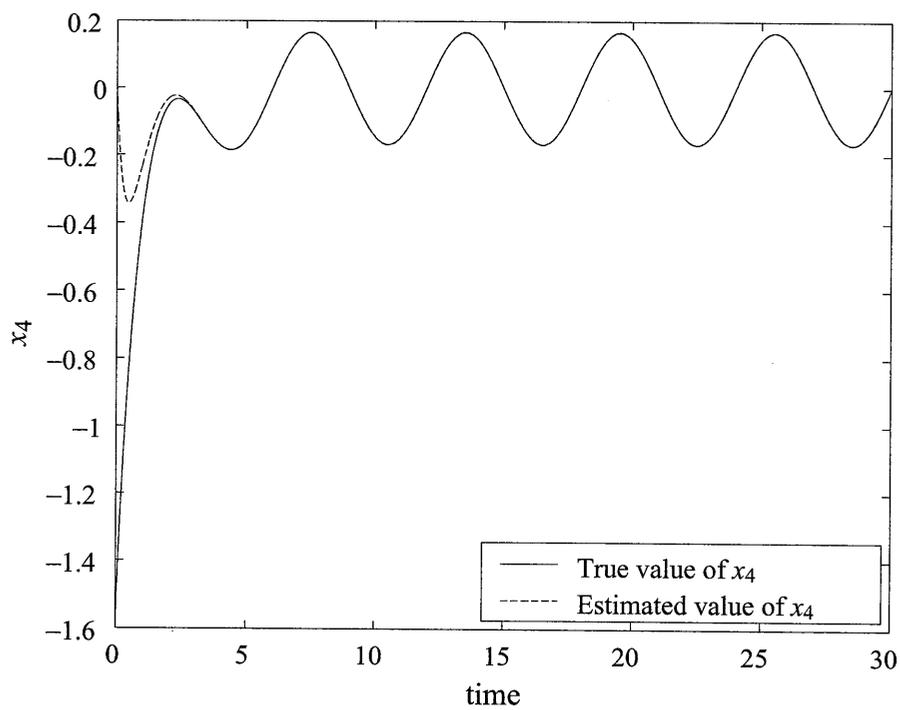
明らかに仮定 9 は満たされる。よって、有界な \bar{y}_d に対して推定誤差と追従誤差が大域的に 0 に漸近することが保証された。

$K = \text{diag}\{5, 5, 5\}$, $\epsilon = 0.1$, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) = (-\pi, \pi, \pi - 1, -\pi/2)$, $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) = (0, 0, 0, 0)$, $(u_1, u_2, u_3) = (1, 0, 0)$ とおいて正弦波 $y = (\sin(\pi t/3))/2$ に追従させたときの軌道を図 7.1~7.5 に示す。

7.2 考察

図 4 から状態変数の推定誤差はすべて 0 に収束していることがわかる。また、図 5 から出力の推定誤差及も 0 に収束し、その後、追従誤差も 0 に収束していることがわかる。これによって提案した手法の有効性は確認された。

図 7.2: Trajectory of x_1 .図 7.3: Trajectory of x_2 .

図 7.4: Trajectory of x_3 .図 7.5: Trajectory of x_4 .

第8章 結論と今後の課題

本研究では、high index の場合を含む非線形微分・代数方程式系を冗長な explicit ODE に変形するアルゴリズムを示し、厳密な入出力線形化とオブザーバ設計を行った。また、シミュレーションによって提案した手法の有効性を確認した。

実際の複雑な非線形系の中には相当数の DAE 系が含まれていると考えられる。線形のディスクリプタ系と異なり、行列演算だけで冗長度のない ODE 系にすることは困難であり、DAE 系を直接扱う本研究のような手法が今後求められていくと思われる。当初の課題の1つに DAE 系のハミルトンヤコビ方程式の導出を掲げていたが、力学系の分野にて拘束系の研究が相当行われており、Dirac bracket, Lie 垂代数などを用いた研究が進みつつあることが判明したため、本研究での範囲には含めなかった。

また、ここではインパルスモードを避けるため入力に積分器を付加したが、high index DAE 系に取り組むもう一つの手法としてレギュラー化がある。レギュラー化のために用いるフィードバック則の誤差を考慮して制御系全体の安定性を保証することが今後の課題である。

参考文献

- [1] 山下 裕, 西谷紘一, 島 公脩: 非線形 DAE 系に対する入出力線形化とオブザーバ, 計測自動制御学会論文集, Vol.36, No.12, 1101/1107 (2000)
- [2] A. Kumar, P. Daoutidis: *Control of nonlinear differential algebraic equation systems*, CHAPMAN & HALL/CRC Statistics and Mathematics, London (1999)
- [3] K. E. Brenan, S. L. Campbell, L. R. Petzold: *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, SIAM, Philadelphia (1996)
- [4] H. K. Khalil: *Nonlinear Systems*, 2nd ed., Prentice-Hall (1996)
- [5] J. Descusse, C. H. Moog: Decoupling with dynamic compensation for strong invertible affine non-linear systems, *Int. J. Control* Vol. 42, No. 6, 1387/1398 (1985)
- [6] S. Sastry: *Nonlinear Systems-Analysis, Stability, and Control-*, Springer, London (1999)

資料

1. 山下 裕, 西谷 紘一, 島 公脩: 非線形 DAE 系に対する入出力線形化とオブザーバ, 計測自動制御学会論文集, Vol.36, No.12, pp.1101-1107, 2000
2. Yuh Yamashita, Masasuke Shima, Hirokazu Nishitani: I/O-Linearization Control with Observer for Nonlinear Systems Described by Differential-Algebraic Equations, *Proceedings of PSE Asia 2000*, pp.189-194, Kyoto, Japan, December 6-8, 2000
3. Nami Kidane, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: I/O-Linearizing Controller and Observer for Nonlinear DAE Systems with High Index, *SICE Annual Conference 2002*, pp.1863-1866, Osaka, August 5-7, 2002
4. 喜種 奈美, 山下 裕, 西谷 紘一: High Index DAE 系に対するオブザーバ設計, 第 31 回制御理論シンポジウム, pp.339-342, 葉山, 2002 年 10 月 28-30 日
5. 喜種 奈美, 山下 裕, 西谷 紘一: 代数変数を含むフィードバック則による regularizing とオブザーバ設計: 第 35 回計測自動制御学会北海道支部学術講演会, pp.71-74, 札幌, 2003 年 1 月 23-24 日
6. Nami Kidane, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: Observer Based I/O-linearizing Control of High Index DAE Systems, *2003 American Control Conference*, Denver, CO, USA, June 4-6, 2003 (accepted)
7. Yuh Yamashita, Nami Kidane, Hirokazu Nishitani: Observer design for nonlinear systems described by differential-algebraic equations, *8th International Symposium on Process Systems Engineering*, Kunming, China, Postponed to Jan 2004(accepted)

以下の頁は、著作権者の許諾を得ていないため、
電子化していません。