

NAIST-IS-DD0861005

博士論文

入力制約と局所最適性を考慮した非線形制御系設計

佐藤 康之

2012年6月4日

奈良先端科学技術大学院大学
情報科学研究科 情報システム学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に
博士(工学) 授与の要件として提出した博士論文である。

佐藤 康之

審査委員：

杉本 謙二 教授 (主指導教員)

湊 小太郎 教授 (副指導教員)

野田 賢 教授 (福岡大学)

中村 文一 講師 (東京理科大学)

入力制約と局所最適性を考慮した非線形制御系設計*

佐藤 康之

内容梗概

制御 Lyapunov 関数 (Control Lyapunov Function: CLF) は, 非線形制御理論において重要な役割を果たす関数である. 入力制約を考慮した漸近安定化制御則や, ある評価関数を最小化する逆最適制御則を設計できることが知られている.

本論文では, 制御 Lyapunov 関数を用いた制御系設計において, 二つの制御系設計法を提案する.

第一に, 入力が凸空間に拘束される (凸入力制約を持つ) 非線形システムに対して, 漸近安定化制御則を提案する. 提案法は, 二つのステップから構成される. まず, 凸最適化理論を用いて, 入力制約下で局所制御 Lyapunov 関数の時間微分を最小化する入力を導出する. その後, 最小化入力を連続な関数に変形することで, 連続な漸近安定化制御則を設計する.

第二に, 厳密線形化可能な非線形システムに対して, 局所的に LQ 最適制御則と一致する大域逆最適制御則を提案する. 提案制御則は, 状態に関して滑らかな関数であり, ゲイン余裕 $(1/2, \infty)$ を持つことを示す. さらに, 提案制御則は線形近似系に対する LQ 最適制御則から変換可能であることを明らかにする.

提案制御則の有効性は, コンピュータシミュレーションと磁気浮上系による実機実験で検証する.

キーワード

非線形システム, 制御 Lyapunov 関数 (CLF), 入力制約, 局所最適性, 凸最適化

* 奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報システム学専攻 博士論文, NAIST-IS-DD0861005, 2012年6月4日.

Nonlinear Control Systems Design under Input Constraints and Local Optimality Matching *

Yasuyuki Sato

Abstract

Control Lyapunov functions (CLFs) play important roles in nonlinear control theory. By using CLFs, asymptotically stabilizing controllers for nonlinear systems with input constraints and inverse optimal controllers which minimize meaningful cost functions can be designed systematically. In this dissertation, CLF based two control design methods are proposed.

Firstly, an asymptotically stabilizing controller design method for nonlinear control systems with convex input constraints is proposed. The proposed method consists of two steps. In the first step, an input which minimizes the time derivative of a local control Lyapunov function is obtained by convex optimization. Then, in the second step, the continuous asymptotically stabilizing controller is constructed by transforming the obtained minimizing input to a continuous function. A robust controller that guarantees a sector margin is also designed.

Secondly, a local LQ optimal and globally inverse optimal controller design method for feedback linearizable nonlinear control systems is proposed. The advantages of the method are smoothness with respect to the state and is guaranteed the gain margin $(1/2, \infty)$. The proposed controller is easily transformed from LQ optimal controllers.

* Doctoral Dissertation, Department of Information Systems, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, NAIST-IS-DD0861005, June 4, 2012.

Proposed methods are applied to a magnetic levitation system and their effectiveness is confirmed by computer simulation and experiments.

Keywords:

Nonlinear systems, Control Lyapunov function(CLF), Input constraint, Local optimality, Convex optimization

目次

1. 緒言	1
1.1 本論文の背景	1
1.2 制御 Lyapunov 関数を用いた非線形制御系設計	1
1.3 本論文の目的	3
1.4 本論文の構成	4
2. 数学的準備	6
2.1 用語と記号の定義	6
2.2 非線形システムと制御 Lyapunov 関数	7
2.3 凸最適化	9
第I部 凸入力制約を持つ非線形システムに対する制御系設計	15
3. 制御 Lyapunov 関数と入力制約	15
3.1 ノルム制約を持つ非線形システムの制御	15
3.2 問題設定	18
4. 凸入力制約下で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する入力	20
4.1 最小化入力の存在性と必要十分条件	20
4.2 最小化入力の一意性と連続性	22
4.3 最小化入力と漸近安定化可能領域の関係	26
4.4 例題 (中心のずれたノルム制約)	31
5. 連続な漸近安定化制御則とロバスト制御則の設計	33
5.1 基本的な考え方	33
5.2 連続な漸近安定化制御則	34
5.3 ロバスト制御則	36
5.4 数値例	38
5.5 磁気浮上系への適用	43

6. 第 I 部まとめ	51
第 II 部 厳密線形化可能な非線形システムに対する局所 LQ 最適性を持つ大域的逆最適制御則	52
7. 非線形システムと局所 LQ 最適性	52
7.1 非線形システムの厳密線形化	52
7.2 ロバスト厳密線形化	53
7.3 線形システムと LQ 最適制御	54
7.4 問題設定	54
8. 局所 LQ 最適性を持つ大域的漸近安定化制御則	56
8.1 制御系設計	56
8.2 逆最適性とゲイン余裕	61
8.3 LQR から提案制御則への変換	64
8.4 磁気浮上系への適用	65
9. 第 II 部まとめ	73
10. 結言	74
10.1 本論文の結論	74
10.2 今後の課題	75
謝辞	76
参考文献	78
付録	82
A. 研究業績	82
B. 磁気浮上系の局所制御 Lyapunov 関数	85

圖目次

1	$(u_1+0.5)^2+u_2^2-1 < 0$	39
2	$u_1^2+u_2^2-0.5^2 < 0$	39
3	Responses of state and input with controller (126)	41
4	Responses of state and input with controller (127)	42
5	Magnetic Levitation System	44
6	System Setting	45
7	Experimental Result of Controller (149).	49
8	Experimental Result of Controller (150).	50
9	Domain of Attraction of LQ Optimal Controller	67
10	Simulation Result: LQR State	68
11	Simulation Result: LQR State	68
12	Simulation Result: Inverse Optimal State	69
13	Experimental Result: Inverse Optimal State	71
14	Experimental Result: Inverse Optimal Input	71
15	Experimental Result: LQR State	72
16	Experimental Result: LQR Input	72

表目次

1	Identified Parameters	45
2	Comparison of Controllers	70

1. 緒言

1.1 本論文の背景

現実に存在するシステムのほとんどは、本質的に何らかの非線形性を有する非線形システムである。非線形システムを制御する際、最も基本的な考え方は、元の非線形システムの線形近似系を考え、線形制御理論を適用することで局所的な漸近安定化を行う、というものである。

これに対し、線形近似を用いず、非線形システムに対してそのまま制御系設計を行うのが非線形制御理論である。非線形制御理論を用いることで、システムを大域的に漸近安定化できる、高精度な制御系設計が行える、といった大きな利点があり、様々な設計法が提案されている [13, 19, 23, 24, 25, 26, 27]。

その一方で、しばしば非線形制御理論は実際のシステムに対して適用しづらいという批判を受ける。理由としては、まず、数学的に高度であり制御系設計プロセスが複雑になってしまうことが挙げられる。また、非線形モデル予測制御 [27] など、オンラインで制御入力を数値的に計算する方法では、数値計算量が多くなる、という問題点がある。さらに、線形制御則から非線形制御則への変更を行う際に、局所的な制御性能が変わってしまうことも大きな要因であると考えられる。

よって、実際のシステムを制御する際には、上述の問題点を考慮した非線形制御系設計法を用いることが望ましいといえる。

1.2 制御 Lyapunov 関数を用いた非線形制御系設計

前節で述べた問題点を考慮できる制御系設計法として、制御 Lyapunov 関数を用いた制御系設計法が注目されている。制御 Lyapunov 関数 (CLF: Control Lyapunov Function) は、閉ループ系の Lyapunov 関数の候補となる関数であり、近年の非線形制御系設計において中心的な役割を果たしている。CLF を用いた制御系設計は、厳密線形化 [19] やバックステッピング [26] で CLF を設計し、得られた CLF を用いて実際の制御則を設計するという 2 段階からなる設計法である。

得られた CLF の値を減少させるような入力をシステムティックに設計することで漸近安定化制御則が得られるため，制御系設計のプロセスは容易であり，数値計算量も少ない．また，CLF を用いることで，非線形 H_∞ 制御や適応制御など，目的に応じた様々な制御系設計が可能である [20, 22, 23, 24, 25]．さらに，CLF を用いる大きなメリットとして，以下の二つをあげることができる．

- 入力制約を考慮した制御系設計が可能である
- ある評価関数を最小化する逆最適制御則を設計できる

しかしながら，以降で詳しく述べるように，CLF を用いた設計法には，実際のシステムに適用するために理論的に解決しなければならない問題が残されている．

1.2.1 入力制約を考慮した制御系設計

制御 Lyapunov 関数を用いた制御系設計では，特に入力の一般化ノルムに制約がある場合について研究が進められており，多数の制御則設計法が提案されている [4, 5, 6, 7, 10, 11]．その一方で，現実の制御問題では，入力制約をノルムに関する制約として記述できない場合も多い．たとえばサーボ問題を考える場合，制御目標状態は一般的に自律系の平衡状態ではない．マニピュレータ制御において計算トルク法 [33] として良く知られるように，このような場合には制御入力を安定化入力とフィードバックに分ける方法がよく用いられる．しかしながら，このように制御入力を分解して考える場合には，制御入力全体に対する制約がノルム制約として与えられるものであっても，安定化入力部分に対する制約はノルム制約として記述できなくなってしまう [18]．

一方で，制御入力全体がノルム制約で与えられる場合には，制御入力を分解しても，安定化入力部分はかならず凸集合に制約される．また，制御入力全体が凸集合に制約される場合においても，安定化入力部分は凸集合に制約される．このような，入力が凸集合に制約される「凸入力制約」を考慮した非線形制御系設計は，Sontag が文献 [21] において提起したように非線形制御理論における重要な未解決問題である．これまでに，凸入力制約を考慮した非線形制御系設計に関してはほとんど研究が進められていない．Suárez ら [8] は有界な凸入力制約を考慮し

た漸近安定化問題を検討しているものの，具体的な制御系設計法は提案されていない．

1.2.2 局所的に線形最適制御則と一致する大域逆最適制御則

線形制御則から非線形制御則への変更を行う場合，局所的には線形制御則の性能を維持したまま，大域漸近安定化制御則に移行するのが理想的である．

このような，観点から，局所的には線形最適制御則と一致する大域漸近安定化制御則の設計法 [14, 15] が提案されている．これらの方法は，非線形最適制御問題に現れる Hamilton-Jacobi 方程式の近似解を求めるアプローチを取っている．

それに対して，制御 Lyapunov 関数を用いた制御系設計では，ある評価関数を最小化する逆最適制御則を，システムティックに設計できることが知られており [23, 24, 25]，入力の一般化ノルムが制約されるシステムに対しても制御則が提案されている [11]．逆最適制御則の中でも特に重要な役割を果たすのが，Sontag の universal control formula [3] である．universal control formula は，大域的に逆最適制御則であるが，原点近傍では線形近似系に対する最適制御則とは異なっていることに注意が必要である．

局所的に線形最適制御則と一致する大域逆最適制御則は，文献 [16] において提案されている．しかしながら，文献 [16] の方法は，厳密線形化可能な 1 入出力システムに対してしか有効でない．さらに，バックステッピングを拡張した方法であるため，設計プロセスが複雑であるという問題点がある (文献 [16], Table I を参照)．

1.3 本論文の目的

前節の議論から，制御 Lyapunov 関数を用いた制御系設計では，

- 凸入力制約を考慮した制御系設計法
- 局所的な最適性が保証され，多入出力系に適用可能な制御系設計法

の二つが未解決の重要な課題であると言える。本論文では、この二つの課題に対して、それぞれ以下のような制御系設計法を提案することを目的とする。

凸入力制約を持つ非線形システムに対する制御系設計法

制御 Lyapunov 関数が既知である入力アファインな非線形システムに対して、凸入力制約を考慮した漸近安定化制御則の開発を行う。まず、与えられた入力制約のもとで、局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する入力 (最小化入力) を凸最適化理論により導出する。次に、この入力を連続な関数に変形することで、連続な漸近安定化制御則を設計する。これは、喜種ら [10] のノルム制約を考慮した制御系設計法の凸入力制約への拡張である。

局所 LQ 最適性を持つ大域逆最適制御則

厳密線形化可能な多入力非線形システムに対して、局所的に LQ 最適制御則と一致する、大域逆最適制御則を提案する。制御系設計には、ロバスト厳密線形化の座標変換と入力変換を用いる。提案する制御則は状態に関して滑らかであり、さらに線形近似系に対する LQ 最適制御則から変換可能であることを示す。

1.4 本論文の構成

本論文は、全 10 章から構成される。第 1 章では、本論文の背景と本研究の目的について述べた。第 2 章では以降の章で必要となる数学的事項について述べる。第 3 章以降は第 I 部と第 II 部に分かれる。

第 I 部では、入力が凸空間に拘束される (凸入力制約を持つ) 非線形システムに対する制御系設計法について考える。第 3 章ではまず、従来研究のノルム制約を持つ非線形システムに対する制御系設計法を紹介する。その後、第 I 部で扱う問題の定式化を行う。第 4 章では、凸入力制約を持つ非線形システムに対して、与えられた入力制約のもとで局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する入力 (最小化入力) を導出する。最小化入力の必要十分条件が、凸最適化理論における KKT

条件で与えられることを示す。また，最小化入力の連続性，最小化入力と漸近安定化可能領域の関係についても議論する。第5章では，第4章で導出した最小化入力を元に，連続な漸近安定化制御則とロバスト制御則を提案する。提案制御則の有効性は，コンピュータシミュレーションと磁気浮上系による実機実験で検証する。第6章で第I部のまとめについて述べる。

第II部では，厳密線形化可能な非線形システムに対して，局所的にLQ最適制御則と一致し，大域的には非線形逆最適制御則であるような大域漸近安定化制御則を設計する。第7章では，非線形システムに対する厳密線形化とロバスト厳密線形化について述べた後，第II部の問題設定を行う。第8章では，第7章で定式化した問題に対して制御系設計を行う。第I部と同様，提案制御則の有効性はコンピュータシミュレーションと，磁気浮上系での実機実験で確認する。第9章で第II部のまとめについて述べる。

最後に，第10章で本論文の結論を述べる。

2. 数学的準備

本章では，次章以降の議論のための準備事項について述べる．2.1 節では，本文中で用いる用語と記号の定義を行う．2.2 節では，本論文で対象とする非線形システムのクラスを明らかにする．さらに，制御 Lyapunov 関数を定義し，システムの安定性との関係について述べる．2.3 節では，凸最適化の基礎について述べる．

2.1 用語と記号の定義

本論文中では， $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$ とし， $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ は \mathbb{R}^n のべき集合を表すとする．

定義 1. 集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して $\text{int } A$ は A の内部を表し， \bar{A} は A の閉包を表す．また， ∂A は A の境界を表す． □

定義 2. $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は次式で定義される関数とする．

$$\text{sgn}(y) = \begin{cases} -1 & (y < 0) \\ 0 & (y = 0) \\ 1 & (y > 0) \end{cases} \quad (1)$$
□

定義 3. $y \in \mathbb{R}^n$ ， $k \geq 1$ に対して， k -ノルム $\|y\|_k$ は次式で定義される．

$$\|y\|_k := \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^k \right)^{\frac{1}{k}} \quad (2)$$
□

定義 4. $y_0 \in \mathbb{R}^n, \epsilon > 0$ に対して，開球 $B(y_0, \epsilon)$ および閉球 $\bar{B}(y_0, \epsilon)$ を次式で定義する．

$$B(y_0, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - y_0\|_2 < \epsilon\} \quad (3)$$

$$\bar{B}(y_0, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - y_0\|_2 \leq \epsilon\} \quad (4)$$
□

定義 5. 任意の $a > 0$ に対し, 集合 $\{y \in Y \subset \mathbb{R}^n | V(y) \leq a\}$ がコンパクトであるとき, 関数 $V : Y \rightarrow \mathbb{R}$ はプロパーであるという. \square

2.2 非線形システムと制御 Lyapunov 関数

本論文では, 制御対象として次式の入力アファインな非線形システムを考える.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (5)$$

ここで $x \in \mathbb{R}^n$ は状態変数, $u \in U(x) \subset \mathbb{R}^m$ は制御入力であり, $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ は入力空間である. また, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ は連続な写像であり, $f(0) = 0$ が満たされるとする. 本論文では, システム (5) の原点 $x = 0$ を大域的 (局所的) に漸近安定化する問題を考える.

システム (5) に対して, (局所) 制御 Lyapunov 関数 $V(x)$ を次のように定義する.

定義 6 ((局所) 制御 Lyapunov 関数). $0 \in X$ を満たす開集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義され, すべての $x \in X \setminus \{0\}$ に対して

$$\inf_{u \in U} \{L_f V(x) + L_g V(x) \cdot u\} < 0 \quad (6)$$

を満たすプロパーな C^1 級正定関数 $V : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ をシステム (5) の局所制御 Lyapunov 関数 (局所 CLF) という. 特に, $X = \mathbb{R}^n$ のとき $V(x)$ をシステム (5) の制御 Lyapunov 関数 (CLF) という. \square

ここで, $L_f V(x)$, $L_g V(x)$ はそれぞれ $f(x)$, $g(x)$ に関する $V(x)$ の Lie 微分であり, 次式のように定義される.

$$L_f V(x) := \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (7)$$

$$L_g V(x) := \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \quad (8)$$

入力制約がない場合 ($U \equiv \mathbb{R}^m$), プロパーで滑らかな正定関数 $V(x)$ が制御 Lyapunov 関数であるための必要十分条件は,

$$L_g V = 0 \Rightarrow L_f V < 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (9)$$

を満たすことである。CLF を用いた制御系設計では、次の小入力特性が重要な役割を果たす。

定義 7 (小入力特性). 任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$0 \neq \|x\| < \delta \Rightarrow \exists \|u\| < \epsilon \text{ s.t. } L_f V(x) + L_g V(x) \cdot u < 0 \quad (10)$$

を満たす $\delta > 0$ が存在するとき、システム (5) の (局所)CLF $V(x)$ は小入力特性 (*small control property*) を満たすという。□

(局所) 制御 Lyapunov 関数の存在性とシステムの漸近安定化可能性について、次の定理が知られている [22]。

定理 1. 非線形システム (5) の原点 $x = 0$ が、原点以外で連続な制御則 $u(x)$ で大域的 (局所的) に漸近安定化できるための必要十分条件は、(局所) 制御 Lyapunov 関数が存在することである。□

定理 2. 非線形システム (5) の原点 $x = 0$ が、連続な制御則 $u(x)$ で大域的 (局所的) に漸近安定化できるための必要十分条件は、小入力特性を満たす (局所) 制御 Lyapunov 関数が存在することである。□

(局所) 制御 Lyapunov 関数が存在するとき、システム (5) の漸近安定化可能領域は以下の補題で与えられる。

補題 1. 非線形システム (5) を考える。 $V(x)$ はシステムの局所制御 Lyapunov 関数、 $a > 0$ はすべての $x \in W := \{x | V(x) < a\} \setminus \{0\}$ に対して

$$\inf_{u \in U} \{L_f V + L_g V \cdot u\} < 0 \quad (11)$$

を満たす最大の定数とすると、 W は漸近安定化可能領域である。

もし $a = \infty$ ならば $V(x)$ は制御 Lyapunov 関数であり、漸近安定化可能領域は全領域 \mathbb{R}^n となる。□

制御系設計では、設計した漸近安定化入力 u がシステム (5) の不確かさやパラメータ誤差に対してロバスト性を持つかを評価することが重要である。本論文では、非線形制御理論で標準的に用いられるセクタ余裕とゲイン余裕をロバスト性の指標として考える。

定義 8 (セクタ型非線形要素). 局所 *Lipschitz* 連続で

$$\begin{aligned}\alpha u^T u < u^T \phi(u) < \beta u^T u, \quad u \neq 0 \\ \phi(0) = 0\end{aligned}\tag{12}$$

を満たす $\phi(u) \in \mathbb{R}^m$ を $u \in \mathbb{R}^m$ に関する (α, β) のセクタ型非線形要素という. \square

定義 9 (セクタ余裕). $u \in \mathbb{R}^m$ に関する (α, β) の任意のセクタ型非線形要素 $\phi(u)$ に対して,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(u)\tag{13}$$

の原点が漸近安定になるならば, システム (5) は制御入力 u に対してセクタ余裕 (α, β) を持つという. \square

定義 10 (ゲイン余裕). 任意の $\kappa \in (\alpha, \beta)$ に対して,

$$\dot{x} = f(x) + \kappa g(x)u\tag{14}$$

の原点が漸近安定になるとき, システム (5) は制御入力 u に対してゲイン余裕 (α, β) を持つという. \square

定義から明らかなように, セクタ余裕において $\phi(u) = \kappa u$ の特別な場合がゲイン余裕である. 従って, セクタ余裕が保証されるならばゲイン余裕も保証される.

2.3 凸最適化

本論文の第 I 部では, 入力が凸空間に拘束される (凸入力制約を持つ) 非線形システムに対して制御系設計を行う. その際, 与えられた入力制約の下で制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する入力 (最小化入力) を導出する必要がある. 本節では, 最小化入力を導出するための基礎となる凸最適化理論について述べる.

まず, 以下のように定義される凸集合と凸関数を考える.

定義 11 (凸集合). 集合 $T \subset \mathbb{R}^n$ を考える. 任意の $y, z \in T, \mu \in [0, 1]$ に対して次式が成り立つとき, T は凸集合であるという.

$$(1 - \mu)y + \mu z \in T\tag{15}$$

\square

定義 12 (凸関数). $T \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とする . 任意の $y, z \in T, \mu \in [0, 1]$ に対して次式を満たすような関数 $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ を凸関数という .

$$f((1 - \mu)y + \mu z) \leq (1 - \mu)f(y) + \mu f(z) \quad (16)$$

□

目的関数が凸関数で実行可能領域が凸集合であるような最適化問題を , 凸最適化問題という . 凸最適化問題は , 局所最適解は必ず大域最適解になる , という非常に良い性質を持つ .

凸集合・凸関数の特別なクラスとして , 以下の狭義凸集合と狭義凸関数を定義する .

定義 13 (狭義凸集合 [28]). $T \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とする . 次の条件が成立するとき , T は狭義凸集合であるという .

$$y, z \in T, y \neq z, \mu \in (0, 1) \Rightarrow (1 - \mu)y + \mu z \in \text{int } T \quad (17)$$

□

定義 14 (狭義凸関数). $T \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とする . 任意の $y, z \in T, \mu \in (0, 1)$ に対して次式を満たすような関数 $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ を狭義凸関数という .

$$f((1 - \mu)y + \mu z) < (1 - \mu)f(y) + \mu f(z) \quad (18)$$

□

狭義凸集合と狭義凸関数は , 最適解の一意性を議論する際に重要な役割を果たす .

凸集合に関して次の補題が成立する .

補題 2 (文献 [34], 補題 2.3). $T \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とする . このとき , 任意の $y \in \text{int } T, z \in \bar{T}$ および $\mu \in [0, 1)$ に対して次式が成立する .

$$(1 - \mu)y + \mu z \in \text{int } T \quad (19)$$

□

本節では、次のパラメータを含む最適化問題（パラメトリック最適化問題）を考える。

問題 1. 与えられたパラメータ $z \in \mathbb{R}^m$ に対して、以下の $y \in \mathbb{R}^n$ に関する最適化問題を解け。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } F(y, z) \quad \text{subject to } y \in S(z) \\ & S(z) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid G_i(y, z) \leq 0 \ (i = 1, \dots, l)\} \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、 $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ は目的関数、 $G_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, l$) は制約関数であり、 $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ は制約写像とよばれる点集合写像である。□

以降の議論では、問題 2.1 に関して次の仮定 (S1) ~ (S3) が満たされるものとする。

(S1) $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ および各 $G_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の任意の点において微分可能であり、 $z \in \mathbb{R}^m$ を固定したとき y に関する凸関数である。

(S2) 任意の $z_0 \in \mathbb{R}^m$ に対して、 $y_0 \in \text{int } S(z_0)$ となるような y_0 が存在する。

(S3) 任意の $z_0 \in \mathbb{R}^m$ に対して $S(z_0)$ は有界である。

(S1) は問題 2.1 を凸最適化問題として扱うための仮定である。(S2) については以降で詳しく述べるが、最適解の必要条十分条件を導くために必要な仮定である。最後に (S3) は、任意の $z_0 \in \mathbb{R}^m$ に対して問題 2.1 が最適解を持つことを保証するための仮定である。ここで、 D を次式で定義される集合とする。

$$D(z) = \{(y, z) \mid y \in S(z)\} \quad (21)$$

問題 1 の最適解について考察するため、以下の最適解写像と最適値関数を導入する。

定義 15 (最適値関数, 最適解写像). 次式で定義される関数 $\phi' : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ と写像 $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ をそれぞれ最適値関数・最適解写像という。

$$\phi'(z) = \inf_{y \in S(z)} F(y, z) \quad (22)$$

$$\Phi(z) = \{y \in S(z) \mid \phi'(z) = F(y, z)\} \quad (23)$$

ただし、 $S(z) = \emptyset$ のときには $\phi'(z) = \infty$ とする。□

最適値関数 $\phi'(z)$ の性質に関して次の補題が成立する .

補題 3. 仮定 (S1)-(S3) の下で問題 1 を考える . このとき , 問題 1 の最適値関数 $\phi'(z)$ は任意の $z \in \mathbb{R}^m$ に対して有界であり , 次式が成立する .

$$\phi'(z) = \inf_{y \in S(z)} F(y, z) = \min_{y \in S(z)} F(y, z) \quad (24)$$

□

証明. (20) 式と (S2), (S3) より , 任意の $z_0 \in \mathbb{R}^m$ に対して $S(z_0)$ は空でないコンパクト集合である . また , (S1) より $F(y, z_0)$ は $D(z_0)$ の各点において連続である . 連続関数はコンパクト集合上で最大値・最小値を取るのだから $\phi'(z_0)$ は有界であり , (24) 式が成立する . □

補題 3 から直ちに次の系が導かれる .

系 1. (S1)-(S3) の下で問題 1 を考える . このとき , 任意に固定した $z_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して , $F(y, z_0)$ は $S(z_0)$ 上で最小値を取る . □

系 1 は , 問題 1 の最適解が存在することを保証している . この結果は目的関数 $F(y, z)$ の y に関する連続性と実行可能領域 $S(z)$ のコンパクト性から導かれる (補題 3 の証明を参照) .

最適解写像 $\Phi(z)$ を用いると , 問題 1 の最適解を次のように表現できる .

定義 16 (最適解). 仮定 (S1)-(S3) のもとで問題 1 を考える . また , $\Phi(z)$ を問題 1 の最適解写像とする . このとき , $z_0 \in \mathbb{R}^m$ に対して $y_0 \in S(z_0)$ が問題 1 の最適解であるとは , 次式が成立することをいう .

$$y_0 \in \Phi(z_0) \quad (25)$$

□

定義 16 より , 系 1 は次式と等価であることが分かる .

$$\Phi(z) \neq \emptyset, \forall z \in \mathbb{R}^n \quad (26)$$

次に , 問題 1 の最適解が満たすべき条件について考える . 次式で定義される Lagrange 関数 L_0 を導入する .

定義 17 (Lagrange 関数). 次式で定義される関数 $L_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ を問題 1 に対する Lagrange 関数という .

$$L_0(y, z, \lambda) = F(y, z) + \sum_{i=1}^l \lambda_i G_i(y, z) \quad (27)$$

ここで , $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_l]^T \in \mathbb{R}^l$ は Lagrange 乗数ベクトルである . □

問題 1 の最適解の必要十分条件として以下の補題が知られている .

補題 4 (文献 [34], 定理 3.5, 3.6). 仮定 (S1)-(S3) のもとで問題 1 を考える . このとき , 任意に固定した $z_0 \in \mathbb{R}^m$ に対して , ある $y_0 \in S(z_0)$ が問題 1 の最適解となること ($y_0 \in \Phi(z_0)$) は , 次式を満たす $\lambda_0 = [\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0l}]^T$ が存在することと等価である .

$$\frac{\partial L_0(y_0, z_0, \lambda_0)}{\partial y} = \frac{\partial F(y_0, z_0)}{\partial y} + \sum_{i=1}^l \lambda_{0i} \frac{\partial G_i(y_0, z_0)}{\partial y} = 0 \quad (28)$$

$$\lambda_{0i} \geq 0, G_i(y_0, z_0) \leq 0, \lambda_{0i} G_i(y_0, z_0) = 0 \quad (i = 1, \dots, l)$$

□

補題 4 の十分性は , 任意の z に対して $S(z)$ が凸集合であることと $F(y, z)$ が y に関する凸関数であることから導かれる . 一方 , 必要性を示すには , 一般に何らかの制約想定が必要である [34] . 問題 1 の場合には , 仮定 (S1),(S2) から , 以下の Slater 制約想定が任意の $(y_0, z_0) \in D(z_0)$ で成立する .

定義 18 (Slater 制約想定 [30, 34]). 点 $(y_0, z_0) \in D(z_0)$ において以下の条件が満たされるとき , (y_0, z_0) で Slater 制約想定が成立するという .

(1) 各 G_i ($i \in \{i | G_i(y_0, z_0) = 0\}$) は y に関する凸関数である .

(2) $y_1 \in \text{int } S(z_0)$ となるような y_1 が存在する . □

最後に , 最適解写像 $\Phi(z)$ のパラメータ z に対する連続性を考える . $\Phi(z)$ の連続性を保証するためには , (S1)-(S3) に加え , 以下のより強い仮定が必要となる [34] .

(S3') $S(z)$ は任意の $z_0 \in \mathbb{R}^m$ の近傍で一様有界である.

(S4) 任意に固定した $z_0 \in \mathbb{R}^m$ に対して, (28) を満たす最適解 y_0 は一意である.
すなわち, $\Phi(z_0) = \{y_0\}$ となる.

(S3') は (S3) よりも厳しい条件であり, (S3') \Rightarrow (S3) が成立する. これらの仮定の下で, 以下の補題が成立する.

補題 5 (文献 [34], 定理 2.66). 仮定 (S1), (S2), (S3') のもとで問題 1 を考える. このとき, $S(z)$ は任意の $z \in \mathbb{R}^m$ に対して連続である. \square

補題 6 (文献 [34], 定理 3.30). 仮定 (S1), (S2), (S3'), (S4) のもとで問題 1 を考える. このとき, $\Phi(z)$ は任意の z に対して連続である. \square

補題 6 における連続性は「集合値写像としての連続性 [31, 34]」であることに注意する. この意味は, Φ が上半連続かつ下半連続な点集合写像であることであり, 実数値関数における連続性の定義とは異なる. しかしながら, 補題 6 では (S4) を仮定しているため, $\Phi(z)$ は実数値関数としても連続となる.

$\Phi(z)$ を制御入力として用いることを考えた場合, 実数値関数としての連続性が重要となる. 補題 6 は, そのために最適解の一意性という強い仮定が必要となることを示唆している.

第I部

凸入力制約を持つ非線形システムに対する制御系設計

3. 制御 Lyapunov 関数と入力制約

3.1 ノルム制約を持つ非線形システムの制御

制御 Lyapunov 関数を用いて非線形制御系設計を行う利点の一つに，入力制約を考慮した制御系設計が可能である点を挙げることができる．これまでに，非線形システム (5) に対して，入力制約を考慮した制御系設計法が数多く提案されている．その中でも，入力制約が次式の形で与えられる場合について，詳しく研究が行われている．

$$u \in U_k^1 := \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\|_k < 1, k \geq 1\} \quad (29)$$

(29) は， k ノルムが 1 以下の部分空間（半径 1 の Minkowski ball） U_k^1 に u が拘束されることを意味しており，本論文ではこれをノルム制約とよぶ．

本節では，ノルム制約が存在する場合の制御系設計法として喜種らの方法 [10] を取り上げ，CLF を用いた具体的な制御系設計のアプローチについて概観する．

以下では，入力制約 (29) を持つ非線形システム (5) を制御対象として考え， $V(x)$ をシステムの局所制御 Lyapunov 関数とする．(7), (8) 式より，局所制御 Lyapunov 関数 $V(x)$ の時間微分は以下ようになる．

$$\dot{V}(x, u) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_f V + L_g V \cdot u \quad (30)$$

補題 1 より，入力制約 (29) の下でシステム (5) の原点の漸近安定化可能領域は次のように与えられる．

補題 7（ノルム制約下での漸近安定化可能領域）. 入力制約 (29) を持つシステム (5) を考える． $V(x)$ はシステムの局所制御 Lyapunov 関数， $a_1 > 0$ を次式を満た

す最大の定数とする .

$$\inf_{u \in U_k^1} \{L_f V + L_g V \cdot u\} < 0, \forall x \in W_1 := \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) < a_1\} \setminus \{0\} \quad (31)$$

このとき , W_1 は漸近安定化可能領域である . \square

補題 7 の条件を満たす制御則を設計するため , 喜種らはまず , 入力制約 U_k^1 の閉包 \bar{U}_k^1 を考え , $u \in \bar{U}_k^1$ の下で $\dot{V}(x, u)$ を最小化する入力を導出した .

補題 8 ($\dot{V}(x, u)$ を最小化する入力). 入力制約 $u \in \bar{U}_k^1$ を持つ非線形システム (5) を考える . $V(x)$ はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数とする . このとき , 制御入力

$$u_i = \begin{cases} -\frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|^{\frac{1}{k-1}}} \operatorname{sgn} L_{g_i} V & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (32)$$

$(i = 1, \dots, m)$

は , 各 x に対して局所制御 *Lyapunov* 関数の時間微分 $\dot{V}(x, u)$ を最小化する . \square

入力 (32) を用いると , $L_g V \neq 0$ のときの $\dot{V}(x, u)$ の最小値を以下のように計算できる .

$$\inf_{u \in U_k^1} \dot{V}(x, u) = \min_{u \in U_k^1} \dot{V}(x, u) = L_f V - \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}} \quad (33)$$

このことから , 関数 $P : \{x \in W_1 | L_g V(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$P(x) = \frac{L_f V}{\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}} \quad (34)$$

と定義すると , 以下の補題が成立する .

補題 9. 入力制約 (29) を持つシステム (5) を考える . $V(x)$ はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数 , W_1 は補題 7 の漸近安定化可能領域 , $P(x)$ は (34) で定義される関数とすると ,

$$\sup_{x \in \{x \in W_1 | L_g V(x) \neq 0\}} P(x) = 1 \quad (35)$$

が成立する . \square

(34) 式の $P(x)$ を用いると，次のように領域 W_1 で原点を漸近安定化する，連続な制御則を構成することができる [10] .

定理 3. 入力制約 (29) を持つ非線形システムを考える . $V(x)$ はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数 , W_1 は補題 7 の漸近安定化可能領域 , $P(x)$ は (34) 式で定義される関数 , $c > 0$ と $q \geq 1$ は定数とする . このとき , $m = 1$ あるいは $1 < k < \infty$ ならば , 制御入力

$$u_i = \begin{cases} -\frac{P + |P| + c\|L_g V\|_q}{2 + c\|L_g V\|_q} \cdot \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|_q^{\frac{1}{k-1}}} \operatorname{sgn} L_{g_i} V & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (36)$$

$(i = 1, \dots, m)$

は領域 W_1 で原点を漸近安定化する , $W_1 \setminus \{0\}$ で連続な制御則である . さらに , $V(x)$ が小入力特性を満たすならば , 入力は原点でも連続である . \square

また , 安定化可能領域として次の補題で与えられる $W_2 \subset W_1$ を考えると , W_2 内でセクタ余裕を持つ制御則を設計できる .

補題 10. 入力制約 (29) を持つ非線形システム (5) を考える . $V(x)$ はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数 , $P(x)$ は (34) 式で定義される関数 , $0 < r \leq 1$ は定数とし , $a_2 > 0$ は次式を満たす最大の定数とする .

$$\inf_{u \in U_k^1} \{L_f V + r \cdot L_g V \cdot u\} < 0, \quad \forall x \in W_2 := \{x | V(x) < a_2\} \setminus \{0\} \quad (37)$$

このとき , 領域 W_2 ではセクタ余裕 (r, ∞) を持つ漸近安定化制御則が存在し , 次式が成立する .

$$\sup_{x \in \{x \in W_2 | L_g V \neq 0\}} P(x) = r \quad (38)$$

\square

定理 4. 入力制約 (29) を持つ非線形システム (5) を考える . $V(x)$ はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数 , $P(x)$ は (34) 式で定義される関数 , W_2 は補題 10 で定義

される領域, $c > 0$, $q \geq 1$, $0 < r \leq 1$ は定数とする. このとき, $m = 1$ または $1 < k < \infty$ ならば, 制御入力

$$u_i = \begin{cases} -\frac{\frac{1}{r}(P+|P|)+c\|L_g V\|_q}{2+c\|L_g V\|_q} \cdot \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|^{\frac{1}{k-1}}} \operatorname{sgn} L_{g_i} V & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (39)$$

$(i = 1, \dots, m)$

は領域 W_2 で原点を漸近安定化し, セクタ余裕 (r, ∞) を持つ. さらに, $V(x)$ が小入力特性を満たすならば, 入力は原点でも連続となる. \square

3.2 問題設定

システム (5) に対して凸入力制約を次のように定義する.

定義 19 (凸入力制約). システム (5) において, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $U(x)$ が凸集合となるときの, システムは凸入力制約 $u \in U(x)$ を持つという.

また, ある凸集合 U が存在して $U(x) \equiv U$ であるとき, システムは状態依存ではない凸入力制約 $u \in U$ を持つという. \square

Sontag が文献 [3] で提起したのは, 「状態依存ではない凸入力制約 $u \in U$ を持つ非線形システム (5) に対して, 与えられた CLF を用いて大域漸近安定化制御則を設計せよ」という問題であった. これに対して Suárez ら [8] は,

- U はコンパクト集合である
- $0 \in \operatorname{int} U$ である

の二つを仮定した場合の安定化について議論しているが, 具体的な制御系設計法は与えられていない. さらに, 応用上重要な局所漸近安定化問題, 状態依存の凸入力制約 $u \in U(x)$ の場合の安定化については, これまでに全く議論されていない.

このような背景から, 本論文では次の問題を考える.

問題 2. 凸入力制約 $u \in U(x)$ を持つ非線形システム (5) に対し, 与えられた局所制御 *Lyapunov* 関数 $V(x)$ を用いて, システムの原点 $x = 0$ を局所的に漸近安定化する連続な制御則を設計せよ. ただし, $U(x)$ は以下の仮定 (A1)-(A3) を満たすとする.

(A1) $U(x) = \{u \in \mathbb{R}^m | G_i(x, u) < 0 (i = 1, \dots, l)\}$ と表される. ただし, 各 $G_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の任意の点において微分可能であり, $x \in \mathbb{R}^n$ を固定したとき u に関する凸関数である.

(A2) $0 \in U(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$ である.

(A3) $\cup_{x \in \mathbb{R}^n} U(x) \subset U_{max}$ を満たすコンパクト集合 $U_{max} \subset \mathbb{R}^m$ が存在する.

□

問題 2 に対して, 本論文ではつぎの 2 ステップで制御系設計を行う.

Step1 入力空間の閉包 $\bar{U}(x)$ を考え, 入力制約 $u \in \bar{U}(x)$ のもとで局所制御 *Lyapunov* 関数の微分を最小化する入力 (最小化入力) を, 凸最適化により求める

Step2 最小化入力を連続な関数に変形することで, 連続な漸近安定化制御則・ロバスト制御則を設計する

このアプローチは, 前節で紹介したノルム制約を考慮した設計法 [10] と考え方は同じであるが, 最小化入力の導出方法が異なっている. ノルム制約の場合には最小化入力を幾何学に導出していたのに対し, 本研究では最小化入力の導出を凸最適化問題として取り扱う. これにより, 従来の結果を凸入力制約の場合に拡張することが可能になる.

第 4 章では, 最小化入力の導出 (Step1) について述べる. 第 5 章では, 最小化入力の連続化による漸近安定化制御則・ロバスト制御則の設計 (Step2) について述べる.

4. 凸入力制約下で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する入力

本章では，凸入力制約を持つ非線形システム (5) に対して，局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する入力（最小化入力）を導出し，その性質について議論する．また，最小化入力と漸近安定化可能領域の関係についても述べる．

4.1 最小化入力の存在性と必要十分条件

本節では，凸入力制約下で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する入力（最小化入力）の存在性と，その必要十分条件について明らかにする．

まず，最小化入力の存在性について考えよう．仮定 (A1) より，問題 2 の入力空間 $U(x)$ は開集合である．そのため，入力制約 $u \in U(x)$ の下では，局所制御 Lyapunov 関数の時間微分 $\dot{V}(x, u)$ に最小値が存在することを保証できない．しかしながら，後述するように， $U(x)$ の代わりに閉包 $\bar{U}(x)$ を考えることで，最小化入力の存在を保証できる．そこで本節では入力制約として $\bar{U}(x)$ を考える．

入力制約 $u \in \bar{U}(x)$ のもとで，システム (5) の局所制御 Lyapunov 関数の微分 $\dot{V}(x, u)$ を最小化する入力を求める問題は，以下のように定式化できる．

問題 3. $V(x)$ をシステム (5) の局所制御 Lyapunov 関数とする．このとき，固定した各 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ に対し，入力制約 $u \in \bar{U}(x_0)$ のもとで目的関数 $L_g V(x_0) \cdot u$ を最小化せよ． □

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ を固定すると， $L_f V(x_0)$ ， $L_g V(x_0)$ はそれぞれ定数と定ベクトルとなる．よって， $\dot{V}(x_0, u) = L_f V(x_0) + L_g V(x_0) \cdot u$ を最小化する入力は， $L_g V(x_0) \cdot u$ を最小化する入力と等しいことが分かる．

注意 1. 入力制約が $u \in U(x)$ の場合と $u \in \bar{U}(x)$ の場合では，システム (5) の漸近安定化可能領域自体が違うのではないかと，という疑問が生じる．これについては 4.3 節で議論するが，結論として，どちらの入力制約でも漸近安定化可能領域は変わらない． □

ここで、問題 3 に関してつぎの補題が成立する。

補題 11. 仮定 (A1)-(A3) のもとで問題 3 を考える。このとき、問題 3 は問題 1 の特殊な場合であり、さらに仮定 (S1), (S2), (S3') が満たされる。□

証明. (A1) より、

$$\bar{U}(x) = \{u \in \mathbb{R}^m \mid G_i(x, u) \leq 0 \ (i = 1, \dots, l)\} \quad (40)$$

であるから、問題 3 は問題 1 のクラスに含まれる。\$x_0 \in \mathbb{R}^n\$ を任意に固定すると、目的関数 \$L_g V(x_0) \cdot u\$ は \$u\$ に関する \$C^1\$ 級凸関数であるから、(A1) \$\Rightarrow\$ (S1) がいえる。(A2) \$\Rightarrow\$ (S2) は明らかである。また、(A3) が成立するならば、\$x_0\$ の任意の近傍 \$\Omega\$ に対して \$\cup_{x \in \Omega} \bar{U}(x) \subset U_{max}\$ であり、\$U_{max}\$ は有界なので (S3') が成立する。□

補題 11 より、(A1)-(A3) のもとでは、問題 3 に対して問題 1 に対する 2.3 節の結果をそのまま適用できることが分かる。

問題 3 に対する Lagrange 関数 \$L_V(x, u, \lambda)\$ は、つぎのように書ける。

$$L_V(x, u, \lambda) = L_g V(x) \cdot u + \sum_{i=1}^l \lambda_i G_i(x, u) \quad (41)$$

補題 4 より、最小化入力に関するつぎの定理が導かれる。

定理 5. 仮定 (A1)-(A3) のもとで問題 3 を考える。このとき、任意に固定した \$x_0 \in \mathbb{R}^n\$ に対して次式を満たす \$u_0 \in \bar{U}(x_0)\$ と \$\lambda_0 = [\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0l}] \in \mathbb{R}^l\$ が存在し、\$u_0\$ は \$x_0\$ に対する最小化入力である。

$$\frac{\partial L_V(x_0, u_0, \lambda_0)}{\partial u} = L_g V(x_0) + \sum_{i=1}^l \lambda_{0i} \frac{\partial G_i(x_0, u_0)}{\partial u} = 0 \quad (42)$$

$$\lambda_{0i} \geq 0, \ G_i(x_0, u_0) \leq 0, \ \lambda_{0i} G_i(x_0, u_0) = 0 \ (i = 1, \dots, l)$$

証明. \$x_0 \in \mathbb{R}^n\$ を固定して考える。補題 11 より、(A1)-(A3) のもとでは 2.3 節の仮定 (S1), (S2), (S3') が満たされる。よって、補題 3 より目的関数 \$L_g V(x_0) \cdot u\$ を最小化する \$u_0 \in \bar{U}(x_0)\$ が存在する。同様に、補題 4 により (42) 式が最小化入力の必要十分条件となる。□

定理 5 より，各 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して最小化入力 $u_0 \in \bar{U}(x_0)$ が存在する．

次に，すべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対する最小化入力の全体を考えるため，次式の最適解写像 Φ を導入する．

$$\Phi(x) = \{u \in \bar{U}(x) \mid \phi(x) = L_g V(x) \cdot u\} \quad (43)$$

ただし， $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は次式の最適値関数である．

$$\phi(x) = \min_{u \in \bar{U}(x)} \{L_g V(x) \cdot u\} \quad (44)$$

定理 5 からただちに，次式が成立することに注意する．

$$\Phi(x) \neq \emptyset, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (45)$$

4.2 最小化入力の一意性と連続性

前節では，問題 3 の最適解 (最小化入力) の存在性を示し，そのための必要十分条件を与えた．また，最小化入力の全体を表すため，最適解写像 $\Phi(x)$ を導入した．本節では， $x \in \mathbb{R}^n$ が変化したときの $\Phi(x)$ の性質について考える．

注意 2. $L_g V(x) = 0$ となる x では， $\lambda = 0$ とすれば，任意の $u \in \bar{U}(x)$ が (42) 式を満たす最小化入力となる．以降の議論では， $L_g V(x) \neq 0$ となる x のみを考え， $L_g V(x) = 0$ の場合については次章で取り扱う． \square

2.3 節で述べたように， $\Phi(x)$ の写像としての連続性を示すには，一般には次のように，最適解の一意性そのものを仮定する必要がある．

(A4') 任意の $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid L_g V(x) \neq 0\}$ に対して，(42) 式を満たす $u_0 \in \bar{U}(x_0)$ は一意である．すなわち， $\Phi(x_0) = \{u_0\}$ である．

注意 3. 以降の議論では， $\Phi(x_0) = \{u_0\}$ を簡単のため $\Phi(x_0) = u_0$ と書くことがある．

凸最適化理論では，最適化の目的関数が狭義凸関数であれば，最適解が一意となることが知られている．問題 3 の目的関数 $L_g V(x) \cdot u$ は凸関数ではあるが，狭義凸関数ではない．そこで，以下では目的関数の狭義凸性を仮定せず，最適解が一意となる条件を与える．

まず，問題 3 では，目的関数の性質として次の補題が成立する．

補題 12. 仮定 (A1)-(A3)のもとで問題 3 を考える．このとき次式が成立する．

$$\Phi(x) \subset \partial \bar{U}(x), \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid L_g V(x) \neq 0\} \quad (46)$$

□

証明. 任意に固定した $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid L_g V(x) \neq 0\}$ に対して， $u_0 \in \text{int } \bar{U}(x_0) (= U(x_0))$ が成り立つと仮定する．このとき，

$$\min_{u \in \bar{U}(x_0)} L_g V(x_0) \cdot u = L_g V(x_0) \cdot u_0 \quad (47)$$

である．仮定より，次式が成立するように $\epsilon_1 > 0$ を選ぶことができる．

$$\bar{B}(u_0, \epsilon_1) = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u - u_0\|_2 \leq \epsilon_1\} \subset \bar{U}(x_0) \quad (48)$$

また，(A2) より次式を満たす $\epsilon_2 > 0$ が存在する．

$$\bar{B}(0, \epsilon_2) \subset \bar{U}(x_0) \quad (49)$$

ここで，

$$\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2) \quad (50)$$

とおくと，次式が存在する．

$$\forall u \in \bar{B}(u_0, \epsilon), \exists u' \in \bar{B}(0, \epsilon) \text{ s.t. } u = u_0 + u' \quad (51)$$

入力制約 $u \in \bar{B}(u_0, \epsilon)$ の下で $L_g V(x_0)$ の最小化を考えると，

$$\min_{u \in \bar{B}(u_0, \epsilon)} L_g V(x_0) \cdot u = \min_{u' \in \bar{B}(0, \epsilon)} L_g V(x_0) \cdot (u_0 + u') \quad (52)$$

$$= L_g V(x_0) \cdot u_0 + \min_{\|u'\|_2 \leq \epsilon} L_g V(x_0) \cdot u' \quad (53)$$

となる． $\bar{B}(u_0, \epsilon) \subset \bar{U}(x_0)$ に注意すると， u_0 は最小化入力であるから，

$$\min_{\|u\|_2 \leq \epsilon} L_g V(x_0) \cdot u' \geq 0 \quad (54)$$

を得る．

一方，3.1 節の (33) 式で $k = 2$ の場合を考えると，

$$\min_{\|u\|_2 \leq \epsilon} L_g V(x_0) \cdot u' < 0 \quad (55)$$

が成立する．これは， u_0 が最小化入力であることに反する．よって，題意が示された． \square

目的関数が実行可能領域の境界上で最適値を取る場合，制約関数に対して以下の仮定を置くことで，最適解の一意性を保証することができる．

(A4) 各制約関数 G_i は，任意に固定した $x_0 \in \mathbb{R}^n$ と $u_1, u_2 \in \partial \bar{U}(x_0)$ および $\mu \in (0, 1)$ に対して次式を満たす．

$$G_i(x_0, u_1) = G_i(x_0, u_2) = 0 \Rightarrow G_i(x_0, (1 - \mu)u_1 + \mu u_2) < 0 \quad (56)$$

つぎの補題が示すように，(A4) を仮定すると $\bar{U}(x_0)$ は狭義凸集合となる．

補題 13. 仮定 (A1)-(A4) のもとで問題 3 を考える．このとき， $\bar{U}(x_0)$ は狭義凸集合である．すなわち，次式が成立する．

$$u_1, u_2 \in \bar{U}(x_0), \mu \in (0, 1) \Rightarrow (1 - \mu)u_1 + \mu u_2 \in \text{int } \bar{U}(x_0) \quad (57)$$

証明. $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u_1, u_2 \in \partial \bar{U}(x_0)$ に対して，

$$\mathcal{I}_1 := \{i | G_i(x_0, u_1) = 0, (i = 1, \dots, l)\} \quad (58)$$

$$\mathcal{I}_2 := \{i | G_i(x_0, u_2) = 0, (i = 1, \dots, l)\} \quad (59)$$

とおき，以下の二つの場合に分けて証明する．

(i) $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \emptyset$ の場合

(A1) より , 各 G_i は凸関数であるから , $i_1 \in \mathcal{I}_1$, $\mu \in (0, 1)$ に対して次式が成立する .

$$\begin{aligned} G_{i_1}(x_0, (1 - \mu)u_1 + \mu u_2) &\leq (1 - \mu)G_{i_1}(x_0, u_1) + \mu G_{i_1}(x_0, u_2) \\ &= \mu G_{i_1}(x_0, u_2) < 0 \end{aligned} \quad (60)$$

第一式から第二式への変換は $G_{i_1}(x_0, u_1) = 0$ であることを用いた . また , 最後の不等号は , $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \emptyset$ より , $G_{i_1}(x_0, u_1) = 0 \Rightarrow G_{i_1}(x_0, u_2) < 0$ に従う . $i_2 \in \mathcal{I}_2$ に対しても , 同様の議論で $G_{i_2}(x_0, (1 - \mu)u_1 + \mu u_2) < 0$ となることが示される . 以上の議論より ,

$$G_i(x_0, (1 - \mu)u_1 + \mu u_2) < 0, (i = 1, \dots, l) \quad (61)$$

であり , これは (57) 式の成立を意味する .

(ii) $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \neq \emptyset$ の場合

$i \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ の場合 , (A4) から直ちに $G_i(x_0, (1 - \mu)u_1 + \mu u_2) < 0$ となる . $i \in (\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2) \setminus (\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$ の場合には , (i) と同様の議論となる . 従って , (61) が満たされ , (57) 式が成立する . \square

(A4) のもとで , 問題 3 の最小化入力の一意性を示そう .

補題 14. 仮定 (A1)-(A4) のもとで問題 3 を考える . このとき , 任意の $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n | L_g V(x) \neq 0\}$ に対して , $u_0 \in \Phi(x_0)$ を満たす u_0 は一意である .

証明. 任意に固定した $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n | L_g V(x) \neq 0\}$ に対して , 異なる二つの最小化入力 $u_1, u_2 \in \Phi(x_0)$ が存在すると仮定する . このとき , 次式が成立する .

$$\min_{u \in \bar{U}(x_0)} L_g V(x_0) \cdot u = L_g V(x_0) \cdot u_1 = L_g V(x_0) \cdot u_2 \quad (62)$$

$\mu \in (0, 1)$ として ,

$$u_3 = (1 - \mu)u_1 + \mu u_2 \quad (63)$$

を考えると , 目的関数の凸性から次式が成立する .

$$\begin{aligned} L_g V(x_0) \cdot u_3 &= L_g V(x_0) \cdot ((1 - \mu)u_1 + \mu u_2) \\ &\leq (1 - \mu)L_g V(x_0) \cdot u_1 + \mu L_g V(x_0) \cdot u_2 \end{aligned} \quad (64)$$

u_1, u_2 は最小化入力であるから, (62) 式を用いると次式が成立する .

$$\begin{aligned} L_g V(x_0) \cdot u_3 &= (1 - \mu)L_g V(x_0) \cdot u_1 + \mu L_g V(x_0) \cdot u_2 \\ &= \min_{u \in \bar{U}(x_0)} L_g V(x_0) \cdot u \end{aligned} \quad (65)$$

よって, u_3 は最小化入力であることが分かる . 従って, 補題 14 より, $u_3 \in \partial \bar{U}(x_0)$ でなければならないが, これは (A4) と矛盾する . よって, 題意が示された . \square

最終的に, 最小化入力に関するつぎの定理が得られる .

定理 6. 入力制約 $u \in \bar{U}(x)$ を持つ非線形システム (5) を考える . $V(x)$ はシステム (5) の局所制御 *Lyapunov* 関数とし, 仮定 (A1)-(A4) が満たされるとする . このとき, 次式で定義される入力 $\bar{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\dot{V}(x, u)$ を最小化し, $L_g V(x) \neq 0$ となる x に対して連続な入力である .

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \Phi(x) & (L_g V(x) \neq 0) \\ 0 & (L_g V(x) = 0) \end{cases} \quad (66)$$

\square

注意 4. $L_g V(x_0) = 0$ の場合に $\bar{u}(x) = 0$ としているのは, 次章ですべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して連続な制御則を設計するための準備である . \square

4.3 最小化入力と漸近安定化可能領域の関係

本節では, 凸入力制約 $u \in U(x)$ を持つシステム (5) の漸近安定化可能領域を示し, 最小化入力との関係について明らかにする .

システム (5) の漸近安定化可能領域はつぎのように保証される .

補題 15. 凸入力制約 $u \in U(x)$ を持つ非線形システム (5) を考える . $V(x)$ はシステム (5) の局所制御 *Lyapunov* 関数とし, (A1)-(A4) が満たされるとし, $a_3 > 0$ は次式を満たす最大の定数とする .

$$\inf_{u \in U(x)} \{L_f V(x) + L_g V(x) \cdot u\} < 0, \quad \forall x \in W_3 \setminus \{0\} := \{x | V(x) < a_3\} \setminus \{0\} \quad (67)$$

このとき, W_3 は漸近安定化可能領域である . \square

補題 15 の証明は，次章で漸近安定化制御則を設計した後に与える．

よって，凸入力制約下で $\dot{V}(x, u)$ を最小化する入力を考えることで，漸近安定化可能領域の特徴付けが可能になる．

補題 15 では，領域 W_3 は入力制約 $u \in U(x)$ のもとで定義されていた．一方，前節までの議論では入力制約として $u \in \bar{U}(x)$ を考えてきた．そこで， $U(x)$ を用いた場合と $\bar{U}(x)$ を用いた場合では，漸近安定化可能領域が違うのではないかと，という疑問が生じる．以下の補題は，この疑問に対する解答を与えている．

補題 16. 入力制約 $u \in U(x)$ および $u \in \bar{U}(x)$ を持つ非線形システム (5) を考える． $V(x)$ はシステム (5) の局所制御 *Lyapunov* 関数とし，仮定 (A1)-(A4) が満たされるとする．また， W_3 は補題 15 で定義された領域であり， $a_4 > 0$ は次式を満たす最大の定数とする．

$$\begin{aligned} \min_{u \in \bar{U}(x)} \{L_f V(x) + L_g V(x) \cdot u\} &< 0 \\ \forall x \in W_4 \setminus \{0\} &:= \{x | V(x) < a_4\} \setminus \{0\} \end{aligned} \quad (68)$$

このとき， $W_3 = W_4$ である． □

補題 16 を証明するため，以下の補題を導入する．

補題 17. 入力制約 $u \in U(x)$ および $u \in \bar{U}(x)$ を持つ非線形システム (5) を考える． $V(x)$ はシステム (5) の局所制御 *Lyapunov* 関数とし，仮定 (A1)-(A4) が満たされるとする．また， $\bar{u}(x)$ は定理 6 の入力とし， $\mu \in [0, 1)$ とする．このとき，次式が成立する．

$$\mu \bar{u}(x) \in U(x) \quad (69)$$

□

証明. (A1)，(A3) より， $U(x)$ は 0 を含む開凸集合である．よって，補題 2 で $y = 0 \in U(x)$ ， $z = \bar{u} \in \bar{U}(x)$ と選べば

$$(1 - \mu) \cdot 0 + \mu \cdot \bar{u}(x) = \mu \bar{u}(x) \in U(x) \quad (70)$$

が成立する． □

この補題を用いて，補題 16 の証明を与える．

補題 16. $L_g V(x) = 0$ のときは明らかなので， $L_g V(x) \neq 0$ の場合を考える． $U(x) \subset \bar{U}(x)$ より， $W_3 \subset W_4$ が成立する．つぎに， $W_4 \subset W_3$ となることを示す． $x_0 \in \{x \in W_4 | L_g V(x) \neq 0\}$ を任意に固定すると，定理 5, 6 より

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \bar{U}(x_0)} \{L_f V(x_0) + L_g V(x_0) \cdot u\} \\ & = L_f V(x_0) + L_g V(x_0) \cdot \bar{u}(x_0) < 0 \end{aligned} \quad (71)$$

となる．これは，次式を満たす $\alpha_1 > 0$ が存在することと等価である．

$$L_f V(x_0) + L_g V(x_0) \cdot \bar{u}(x_0) = -\alpha_1 \quad (72)$$

$\mu \in [0, 1)$ を定数とすると，上式は次のように変形できる．

$$L_f V(x_0) + L_g V(x_0) \cdot \mu \bar{u}(x_0) = -\alpha_2 \quad (73)$$

ただし， $\alpha_2 = \mu \alpha_1 - (1 - \mu)L_f V(x_0)$ である．ここで， μ を十分 1 に近く選べば $\alpha_2 > 0$ とできるため，

$$L_f V(x_0) + L_g V(x_0) \cdot \mu \bar{u}(x_0) < 0 \quad (74)$$

が成立する．補題 17 より， $\mu \bar{u}(x_0) \in U(x_0)$ であるから，

$$\inf_{u \in U(x_0)} \{L_f V(x_0) + L_g V(x_0) \cdot u\} < 0 \quad (75)$$

が満たされる．よって， $W_4 \subset W_3$ である． \square

補題 16 より，入力制約として $u \in U(x)$ と $u \in \bar{U}(x)$ のどちらを用いても，漸近安定化可能領域自体は変わらないことがわかる．

次に，次式で定義される関数 $P : \{x \in W_3 | L_g V(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える．

$$P(x) = \frac{L_f V(x)}{-L_g V(x) \cdot \bar{u}(x)} \quad (76)$$

ここで， $\bar{u}(x)$ は任意の $x \in \{x \in W_3 | L_g V(x) \neq 0\}$ に対して連続であるため， $P(x)$ も連続関数となる．つぎの補題が示すように， $P(x)$ を用いて $\bar{u}(x)$ と W_3 を関連付けることができる．

補題 18. 入力制約 $u \in U(x)$ および $u \in \bar{U}(x)$ を持つ非線形システム (5) を考える . $V(x)$ はシステム (5) の局所制御 *Lyapunov* 関数とし , 仮定 (A1)-(A4) が満たされるとする . また , $\bar{u}(x)$ は定理 6 の入力 , W_3 は補題 15 の領域 , $P(x)$ は (76) 式の関数とする . このとき , 次式が成立する .

$$P(x) < 1 \quad \forall x \in \{x \in W_3 | L_g V(x) \neq 0\} \quad (77)$$

□

証明. 補題 16 より , $W_3 = W_4$ であるから , W_3 の代わりに W_4 を考える . まず , 任意に固定した $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n | L_g V(x) \neq 0\}$ に対して $L_g V(x_0) \cdot \bar{u}(x_0) < 0$ となることを示す . (A2) より , 各 x_0 に対して次式を満たす $\alpha_{x_0} > 0$ が存在する .

$$\bar{B}(0, \alpha_{x_0}) := \{u \mid \|u\|_2 \leq \alpha_{x_0}\} \subset U(x_0) \quad (78)$$

最大・最小の定理 [35] および文献 [10] の結果より ,

$$\min_{u \in \bar{B}(0, \alpha_{x_0})} L_g V(x_0) \cdot u = -\alpha_{x_0} \|L_g V(x_0)\|_2 < 0 \quad (79)$$

また , $\bar{B}(0, \alpha_x) \subset U(x)$ であることより次式を得る .

$$\min_{u \in \bar{U}(x_0)} L_g V(x_0) \cdot u \leq \min_{u \in \bar{B}(0, \alpha_{x_0})} L_g V(x_0) \cdot u \quad (80)$$

(79) 式を (80) 式に代入すると ,

$$\min_{u \in \bar{U}(x_0)} L_g V(x_0) \cdot u < 0 \quad (81)$$

となる . よって (66) , (68) 式より ,

$$\frac{L_f V(x_0)}{-L_g V(x_0) \cdot \bar{u}(x_0)} < 1 \quad (82)$$

が成立し , W_4 内では $P(x) < 1$ が成立する . $W_3 = W_4$ であるから題意が示された . □

注意 5. 補題より , $P(x) < 1$ は (68) 式と等価な条件である . よって , $P(x) \geq 1$ のときには $\dot{V}(x, u) \geq 0, \forall u \in U(x)$ である .

また， $V(x)$ が小入力特性を満たすならば，つぎの補題が成立する．

補題 19. 入力制約 $u \in \bar{U}(x)$ を持つ非線形システム (5) を考える． $V(x)$ はシステム (5) の小入力特性を満たす局所制御 *Lyapunov* 関数とし，仮定 (A1)-(A4) が満たされるとする．また， W_3 は補題 15 の領域， $P(x)$ は (76) 式の関数とする．このとき，次式が成立する．

$$\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = 0 \quad (83)$$

□

証明. (A2) および $\bar{U}(x)$ が連続な点-集合写像であることから，次式を満たす $x = 0$ の近傍 Ξ と定数 $\alpha > 0$ が存在する．

$$\bar{B}(0, \alpha) = \{u \mid \|u\|_2 \leq \alpha\} \subset U(x), \forall x \in \Xi \quad (84)$$

補題 5 の証明と同様の議論により，次式を得る．

$$-L_g V(x) \cdot \bar{u}(x) \geq \alpha \|L_g V(x)\| > 0 \quad (85)$$

一方， $V(x)$ が小入力特性を満たすことから，任意の $\epsilon > 0$ に対して次式を満たす $\delta > 0$ が存在する．

$$\|x\| < \delta \implies L_f V < -L_g V \cdot u < \epsilon \|L_g V\| \quad (86)$$

(85)，(86) 式を用いて $|P(x)|$ を計算すると次式が得られる．

$$|P(x)| = \frac{|L_f V|}{|L_g V \cdot \bar{u}|} < \frac{\epsilon \|L_g V\|}{\alpha \|L_g V\|} = \frac{\epsilon}{\alpha} \quad (87)$$

ここで， $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を考えると， $\delta \rightarrow 0$ ($\|x\| \rightarrow 0$) となるため，次式を得る．

$$\lim_{x \rightarrow 0} |P(x)| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\alpha} = 0 \quad (88)$$

□

4.4 例題 (中心のずれたノルム制約)

第1章でも述べたように、実用上重要な凸入力制約の例として、中心のずれたノルム制約がある。この中心のずれたノルム制約は、プレフィードバックを用いた制御系設計や目標値追従制御において現れるものである。本節では、この中心のずれたノルム制約を例にとり、実際に最小化入力を導出する。

制御対象として、次式の入力制約を持つ非線形システム (5) を考える。

$$\|u + a(x)\|_k \leq \beta, \quad 1 < k < \infty \quad (89)$$

ただし、 $\beta > 0$ は定数とする。 $V(x)$ はシステムの局所制御 Lyapunov 関数とし、 $a(x) = [a_1(x), \dots, a_m(x)]^T$ は以下の条件を満たすとする。

$$\|a(x)\|_k < 1, \quad \forall x \in W_4 \quad (90)$$

さらに、各 $a_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は連続関数とする。このとき入力制約は

$$\begin{aligned} u \in U(x) &:= \{u \in \mathbb{R}^m \mid G'(x, u) \leq 0\} \\ G'(x, u) &= \|u + a(x)\|_k - \beta \end{aligned} \quad (91)$$

と表される。(89) 式は両辺とも正なので、 k 乗しても関係は変わらない。よって、等価な入力制約として次式を考えることができる。

$$\begin{aligned} u \in U(x) &:= \{u \in \mathbb{R}^m \mid G(x, u) \leq 0\} \\ G(x, u) &= \|u + a(x)\|_k^k - \beta^k \end{aligned} \quad (92)$$

(92) 式の入力制約の下で、定理6の最小化入力 $\bar{u}(x) = [\bar{u}_1(x), \dots, \bar{u}_m(x)]^T$ を導出しよう。 $L_g V(x) = 0$ のときには $\bar{u}(x) = 0$ であるから、 $L_g V(x) \neq 0$ の場合のみを考える。(92) 式の $G(x, u)$ に対して KKT 条件 (42) を考えると、次式を得る。

$$\begin{aligned} L_g V(x) + \lambda k (|\bar{u}_1 + a_1|^{k-1} \text{sgn}(\bar{u}_1 + a_1), \dots, |\bar{u}_m + a_m|^{k-1} \text{sgn}(\bar{u}_m + a_m)) &= 0 \\ \lambda \geq 0, \quad G(x, u) \leq 0, \quad \lambda G(x, u) &= 0 \end{aligned} \quad (93)$$

ここで、 $L_g V(x) \neq 0$ より $\lambda > 0$ であるから、(93) の第1式は

$$(|\bar{u}_1 + a_1|^{k-1} \text{sgn}(\bar{u}_1 + a_1), \dots, |\bar{u}_m + a_m|^{k-1} \text{sgn}(\bar{u}_m + a_m)) = c L_g V \quad (94)$$

$$c = -\frac{1}{\lambda k} < 0 \quad (95)$$

と表せる．各 i 列目の要素を比較すると，

$$|\bar{u}_i + a_i(x)|^{k-1} \text{sgn}(\bar{u}_i + a_i(x)) = -|c| \cdot |L_{g_i} V| \text{sgn}(L_{g_i} V) \quad (96)$$

となり，両辺の絶対値の部分を $\frac{1}{k-1}$ 乗すると次式が得られる．

$$|\bar{u}_i + a_i(x)| \text{sgn}(\bar{u}_i + a_i(x)) = \bar{u}_i + a_i(x) = -|c|^{\frac{1}{k-1}} |L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}} \text{sgn}(L_{g_i} V) \quad (97)$$

(93) の第 2 式より $\lambda > 0$ かつ $\lambda G(x, u) = 0$ であるから， $G(x, u) = 0$ ，すなわち $\|u + a(x)\|_k = \beta$ である．この条件に (97) 式を代入すると，

$$|c|^{\frac{k}{k-1}} \sum_{i=1}^m |L_{g_i} V|^{\frac{k}{k-1}} = \beta \quad (98)$$

となり，これより

$$|c|^{\frac{1}{k-1}} = \frac{\beta}{\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}}} \quad (99)$$

を得る．(99) 式を (97) 式に代入して整理すると，次式の最小化入力 that 得られる．

$$\bar{u}_i(x) = \begin{cases} - \left(a_i(x) \text{sgn}(L_{g_i} V) + \beta \cdot \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}}} \right) \text{sgn}(L_{g_i} V) & (L_{g_i} V \neq 0) \\ 0 & (L_{g_i} V = 0) \end{cases} \quad (100)$$

$(i = 1, \dots, m)$

各 $a_i(x)$ は連続関数であるから， $\bar{u}_i(x)$ も $L_{g_i} V(x) \neq 0$ となる x に対して連続となる．

5. 連続な漸近安定化制御則とロバスト制御則の設計

本章では，前章で導出した最小化入力 $\bar{u}(x)$ を用いて，領域 W_3 内でシステム (5) の原点を漸近安定化する，連続な制御則を設計する．

5.1 基本的な考え方

本章で提案する連続な漸近安定化制御則は，基本的に文献 [10] と同様のものである．ここでは，提案制御則の考え方について説明する．

まず， $\bar{U}(x)$ に相似な部分空間 $\bar{U}^*(x) = \{b_1(x)u \mid u \in \bar{U}(x)\} \subset U(x)$ を考える．ただし， $b_1 : \{x \in W_3 \mid L_g V(x) \neq 0\} \rightarrow (0, 1)$ は連続関数とする． $u \in \bar{U}^*(x)$ を仮想的な入力制約と考えると，つぎの補題が成立する．

補題 20. 入力制約 $u \in \bar{U}^*(x)$ を持つ非線形システム (5) を考える． $V(x)$ はシステム (5) の局所制御 Lyapunov 関数とし，仮定 (A1)-(A4) が満たされるとする．また， $\bar{u}(x)$ を定理 6 の入力とする．このとき，

$$u^*(x) = \begin{cases} b_1(x)\bar{u}(x) & (L_g V(x) \neq 0) \\ 0 & (L_g V(x) = 0) \end{cases} \quad (101)$$

は入力制約 $u \in \bar{U}^*(x)$ のもとで $\dot{V}(x, u)$ を最小化する入力であり， $u^*(x) \in U(x)$ ， $\forall x \in W_3$ が成立する． \square

証明. $u^*(x)$ が $u \in \bar{U}^*(x)$ のもとで $\dot{V}(x, u)$ を最小化することは，定理 5，6 から導かれる．また， $L_g V(x) = 0$ のとき， $u^*(x) \in U(x)$ となることは (A2) から明らかである． $L_g V(x) \neq 0$ の場合にも， $u^*(x) \in \bar{U}^*(x) \subset \bar{U}(x)$ ， $0 < b_1(x) < 1$ および (A2) が成立するので，補題 17 より $u^*(x) \in U(x)$ が得られる． \square

提案手法の基本的な考え方は，(101) 式の $u^*(x)$ を制御入力として用いていることである．このとき，補題 20 より $u^*(x) \in U(x)$ であるため，システム (5) の入力制約は満たされる．一方， $u^*(x)$ を入力として用いたときの局所制御 Lyapunov 関数の微分は次式のようになる．

$$\dot{V}(x, u^*(x)) = L_f V(x) + b_1(x)L_g V(x) \cdot \bar{u}(x) \quad (102)$$

領域 W_1 内で閉ループ系の原点が漸近安定となるためには，次式が満たされるように関数 $b_1(x)$ を選ぶ必要がある．

$$\dot{V}(x, u^*(x)) < 0 \quad \forall x \in \{x \in W_3 | L_g V(x) \neq 0\} \quad (103)$$

また， $L_g V(x) = 0$ となる x に対しても $u^*(x)$ が連続となるためには，次式が成立する必要がある．

$$\lim_{L_g V(x) \rightarrow 0} b_1(x) = 0 \quad (104)$$

次節では，実際にこれらの条件を満たすように $b_1(x)$ を設計し，連続な漸近安定化制御則を提案する．

5.2 連続な漸近安定化制御則

前節の条件を満たす $b_1(x)$ を設計するため，本論文では文献 [10] の結果を利用する．

(76) 式の関数 $P(x)$ を用いて， $b_1(x)$ をつぎのように変化させることを考える．

1. $P(x) \rightarrow 1$ のとき， $b_1(x) \rightarrow 1$ ($\bar{U}^*(x) \rightarrow \bar{U}(x)$ とする)
2. $P(x)$ が小さいとき， $b_1(x) \rightarrow 0$ ($\bar{U}^*(x)$ を小さくする)

この考え方に基づいた $b_1(x)$ の構成法として，文献 [10] の定理 3 を一般化したつぎの定理が得られる．

定理 7. 入力制約 $u \in U(x)$ を持つ非線形システム (5) を考える． $V(x)$ はシステム (5) の局所制御 *Lyapunov* 関数とし，仮定 (A1)-(A4) が満たされるとする．また， $\bar{u}(x)$ は定理 6 の入力， W_3 は補題 15 の領域， $P(x)$ は (76) 式で定義される関数， $c > 0$ と $q \geq 1$ は定数とする．このとき，次式の入力

$$u(x) = \begin{cases} \frac{P + |P| + c \|L_g V\|_q}{2 + c \|L_g V\|_q} \bar{u}(x) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (105)$$

は W_3 内でシステムの原点を漸近安定化する， $W_3 \setminus \{0\}$ で連続な制御則である．さらに， $V(x)$ が小入力特性を満たすならば， $u(x)$ は原点でも連続となる． \square

証明.

i) 連続性

定理 6 より, (105) 式の入力は $\{x \in W_3 | L_g V(x) \neq 0\}$ の各点において連続である. また, (9) 式より, $\{x \in W_3 | L_g V(x) = 0\} \setminus \{0\}$ の各点の近傍では $P(x) + |P(x)| = 0$ となる. よって, 原点以外では

$$\lim_{L_g V \rightarrow 0} \frac{P + |P| + c \|L_g V\|_q}{2 + c \|L_g V\|_q} = 0 \quad (106)$$

が成立し, (105) 式は $W_3 \setminus \{0\}$ で連続となる.

$V(x)$ が小入力特性を満たす場合には, 補題 19 より $\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = 0$ であるから,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P + |P| + c \|L_g V\|_q}{2 + c \|L_g V\|_q} = 0 \quad (107)$$

となり, (105) 式は W_3 全域で連続となる.

ii) 入力制約を満たすこと

補題 5 より, W_3 内では $P(x) < 1$ となることに注意すると, 次式が成立する.

$$0 \leq \frac{P + |P| + c \|L_g V\|_q}{2 + c \|L_g V\|_q} < 1, \quad \forall x \in W_3 \quad (108)$$

よって, 補題 20 より $u(x) \in U(x), \forall x \in W_3$ となる.

iii) 閉ループ系の原点の漸近安定性

$L_g V(x) = 0$ のときには (6) 式より $L_f V(x) < 0$ となるため, $\dot{V}(x, u(x)) < 0$ が満たされる.

つぎに, $L_g V(x) \neq 0$ かつ $P(x) \leq 0$ の場合には, (76) 式より $L_f V(x) \leq 0$ となる.

$$L_g V \cdot u(x) < 0, \quad \forall x \in \{x \in W_1 | L_g V(x) \neq 0\} \quad (109)$$

となることに注意すると, $\dot{V}(x, u(x)) < 0$ を得る.

最後に， $L_g V \neq 0$ かつ $0 < P(x) < 1$ の場合，(105) 式の入力をつぎのように書き換えることができる．

$$u = \left\{ P + \frac{c(1-P) \|L_g V\|_q}{2+c \|L_g V\|_q} \right\} \bar{u}(x) \quad (110)$$

(110) 式を用いて $\dot{V}(x, u(x))$ を計算すると，

$$\dot{V}(x, u(x)) = \frac{c(1-P) \|L_g V\|_q}{2+c \|L_g V\|_q} L_g V \cdot \bar{u}(x) < 0 \quad (111)$$

となる．よって， $\dot{V}(x, u(x)) < 0 \ \forall x \in W_1 \setminus \{0\}$ が成立し， $V(x)$ が閉ループ系の Lyapunov 関数となるため， W_3 内でシステム (5) の原点は漸近安定となる．

□

本章の最後に，前章の補題 15 の証明を与える．

補題 15. (105) 式の $u(x)$ は $\dot{V}(x, u(x)) < 0, \ \forall x \in W_3 \setminus \{0\}$ を達成する，連続な入力である．このとき， $V(x)$ は閉ループ系の Lyapunov 関数となる．よって W_1 は漸近安定化可能領域である．

□

5.3 ロバスト制御則

本節では，文献 [10] と同様の方法を用いて，ある領域内でセクタ余裕を持つ制御則を構成する方法について述べる．

セクタ余裕を持つ制御則の存在する領域に関して，次の補題が成立する．

補題 21. 非線形システム (5) を考える．システムの局所制御 Lyapunov 関数 $V(x)$ が既知であり，仮定 (A1) ~ (A4) が満たされているとする．このとき， $0 < r \leq 1$ は定数， $a_5 > 0$ は全ての $x \in W_5 := \{x | V(x) < a_5\} \setminus \{0\}$ に対して

$$\inf_{u \in U(x)} \{L_f V(x) + r \cdot L_g V(x) \cdot u\} < 0 \quad (112)$$

を満たす最大の定数とすると，領域 W_5 ではセクタ余裕 (r, ∞) を持つ漸近安定化制御則が存在し，次式が成立する．

$$P(x) < r \ \forall x \in \{x \in W_5 | L_g V \neq 0\} \quad (113)$$

□

証明は補題 15, 18 と同様のため, 省略する.

領域 W_5 でセクタ余裕 (r, ∞) を持つ制御則は, 具体的に以下のように構成できる.

定理 8. 非線形システム (5) を考える. システムの局所制御 *Lyapunov* 関数 $V(x)$ が既知であり, 仮定 (A1) ~ (A4) が満たされたとする. $\bar{u}(x)$ は定理 6 の $\dot{V}(x, u)$ を最小化する入力とし, W_5 は補題 21 の漸近安定化可能領域, $P(x)$ は (76) 式で定義される関数, $c > 0$ と $q \geq 0$ は定数とする. このとき, 次式の $u(x)$ は領域 W_5 で原点を漸近安定化し, セクタ余裕 (r, ∞) を持つ $W_5 \setminus \{0\}$ で連続な制御則である.

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{\frac{1}{r}(P+|P|)+c\|L_gV\|_q}{2+c\|L_gV\|_q}\bar{u}(x) & (L_gV \neq 0) \\ 0 & (L_gV = 0) \end{cases} \quad (114)$$

また, $V(x)$ が小入力特性を満たすならば, 入力は原点でも連続となる. \square

証明. 連続性および漸近安定性については, 定理 7 と同様に示せるので省略する. 以下では $u(x)$ が領域 W_5 内でセクタ余裕 (r, ∞) を持つことのみを示す.

$L_gV = 0$ のとき, および $P(x) \leq 0$ のときセクタ余裕を持つことは自明なので, $0 < P(x) < 1$ の場合を考える. (r, ∞) のセクタ型非線形要素 $\phi(u)$ は, (12) 式より $\phi(u) = ru + \kappa(u)u$ と表せる. ただし, $\kappa(u) > 0 \forall u \in \mathbb{R}^m$ である. (114) 式の $u(x)$ を用いて入力 $u'(x)$ を, $u' = \phi(u(x))$ としたとき, 閉ループ系は,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi(u(x))) &= L_fV + L_gV \cdot \phi(u(x)) \\ &= L_fV + L_gV \cdot (ru + \kappa(u)u) \\ &= L_fV + rL_gV \cdot u(x) + \kappa(u)L_gV \cdot u(x) \end{aligned} \quad (115)$$

となる. ここで, $L_gV \cdot u(x) < 0$ より第 3 項は負になるので, 第 1, 2 項が負になることを示せばよい.

$$u(x) = \left\{ P(x) + \frac{c(r-P)\|L_gV\|_q}{2+c\|L_gV\|_q} \right\} \cdot \bar{u}(x) \quad (116)$$

と表せるので,

$$L_fV + rL_gV \cdot u = \frac{c(r-P)\|L_gV\|_q}{2+c\|L_gV\|_q} L_gV \cdot \bar{u}(x) \quad (117)$$

となる．領域 W_5 では $P(x) < r$ となることより，

$$L_f V + r L_g V \cdot u < 0 \quad (118)$$

を得る． □

前節で提案した制御則 (105) の安定化可能領域 W_4 と W_5 を比較すると， $W_5 \subseteq W_4$ という関係が成り立つ．また， $r \rightarrow 1$ とすると W_5 は W_4 に近づくことから，セクタ余裕の大きさと漸近安定化可能領域の大きさには，トレードオフの関係があることが分かる．

5.4 数値例

ここでは，5.2 節で提案した連続な漸近安定化制御則 (105) の有効性について，数値例を通して検証する．

次式 of 非線形システム Σ を考えよう．

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}_1 = (\sin x_1)^2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2 \end{cases} \quad (119)$$

ただし，システムには入力制約 $(u_1 + 0.5)^2 + u_2^2 - 1 < 0$ が存在するものとする．この制約は，Fig. 1 に示すような，中心のずれたノルム制約である．

Σ に対する CLF として，次式を考える．

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2. \quad (120)$$

$V(x)$ を用いて $L_f V$, $L_g V$ を計算すると，

$$\begin{aligned} L_f V(x) &= x_1 (\sin x_1)^2, \\ L_g V(x) &= [L_{g1} V, L_{g2} V] = [x_1, x_2]. \end{aligned} \quad (121)$$

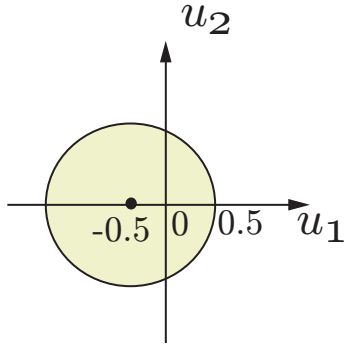


Fig. 1 $(u_1+0.5)^2+u_2^2-1<0$.

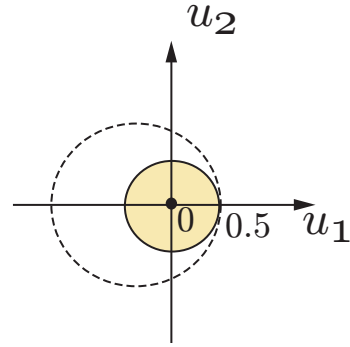


Fig. 2 $u_1^2+u_2^2-0.5^2<0$

となる．前節の結果より，入力制約 $(u_1+0.5)^2+u_2^2-1<0$ の下で制御 Lyapunov 関数 (120) の時間微分を最小化する入力は，

$$\bar{u}(x) = [\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)]^T, \quad (122)$$

$$\bar{u}_1(x) = \begin{cases} -\left(0.5 + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) & (L_g V(x) \neq 0) \\ 0 & (L_g V(x) = 0) \end{cases}, \quad (123)$$

$$\bar{u}_2(x) = \begin{cases} -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & (L_g V(x) \neq 0) \\ 0 & (L_g V(x) = 0) \end{cases}. \quad (124)$$

で与えられる．これより，(76) 式の $P(x)$ は，

$$P(x) = \frac{x_1(\sin x_1)^2}{\frac{1}{2}x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \quad (125)$$

となる．定理 7 を用いると，連続な漸近安定化制御則 $u(x)$ は，

$$u(x) = \begin{cases} \frac{P(x) + |P(x)| + c\|L_g V\|_q}{2 + c\|L_g V\|_q} \cdot \bar{u}(x) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases}. \quad (126)$$

で与えられる．

$c = 1, q = 2, x(0) = [3, 1]^T$ としたときのシミュレーション結果を Fig. 3 に示す．Fig.3 (a), (b) より，状態，入力共に 0 に収束しているのが確認できる．Fig.3 (c) の実線は入力の軌道を表すものであり，破線は入力制約を表す．これより，入力制約が満たされていることが確認できる．

一方，入力制約 $(u_1+0.5)^2+u_2^2-1 < 0$ の十分条件として， $u_1^2+u_2^2-0.5^2 < 0$ というノルム制約 (Fig. 2 参照) を考えることもできる．この場合には，3.1 節の定理 3 を用いて，次のように連続な漸近安定化制御則が構成できる．

$$u(x) = \begin{cases} \frac{P'(x) + |P'(x)| + c\|L_g V\|_q}{2 + c\|L_g V\|_q} \cdot \bar{u}'(x) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases}, \quad (127)$$

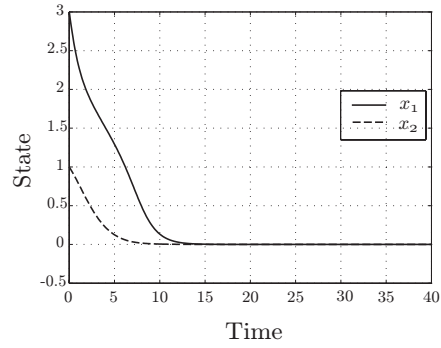
$$\bar{u}'(x) = [\bar{u}'_1(x), \bar{u}'_2(x)]^T, \quad (128)$$

$$\bar{u}'_i(x) = \begin{cases} -\frac{x_i}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & (L_g V(x) \neq 0) \\ 0 & (L_g V(x) = 0) \end{cases} \quad (129)$$

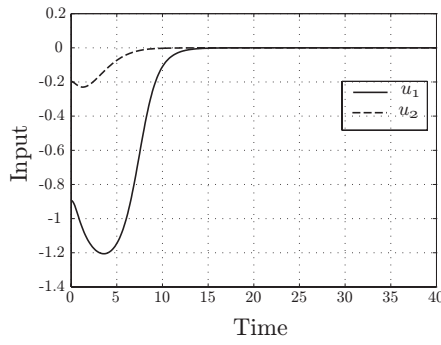
$$(i = 1, 2),$$

$$P'(x) = \frac{2x_1(\sin x_1)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \quad (130)$$

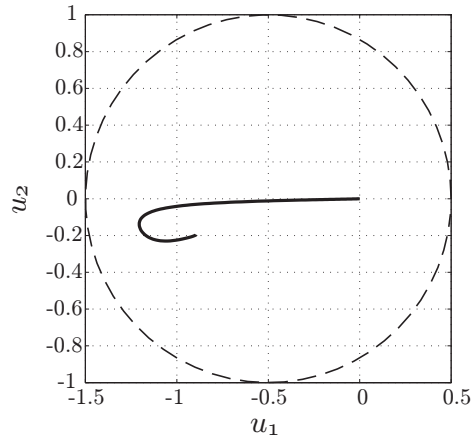
制御則 (127) を用いた場合のシミュレーション結果を Fig. 4 に示す．シミュレーション条件は制御則 (126) の場合と同じである．Fig. 4 (a), (b) より，状態 x_1 および入力 u_1 が原点に収束していないことが確認できる．また，(c) より，入力の軌道は点 $(-0.5, 0)$ に収束しているのが分かる．これらの事実から，十分条件として考えたノルム制約 $u_1^2 + u_2^2 < 0.5^2$ は厳しすぎるため，システム Σ を漸近安定化することができない，ということが分かる．よって，提案制御則 (105) の有効性が確認できた．



(a) Responses of state.

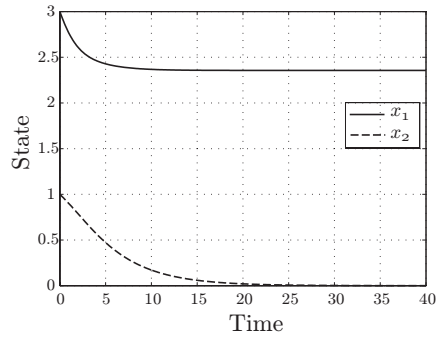


(b) Responses of input.

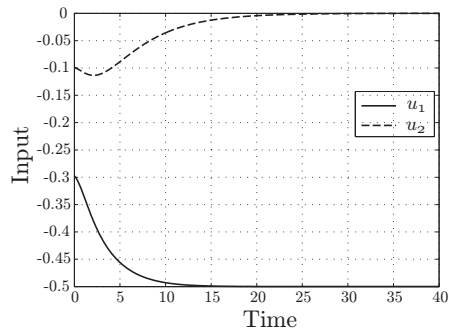


(c) Trajectory of controller (126).

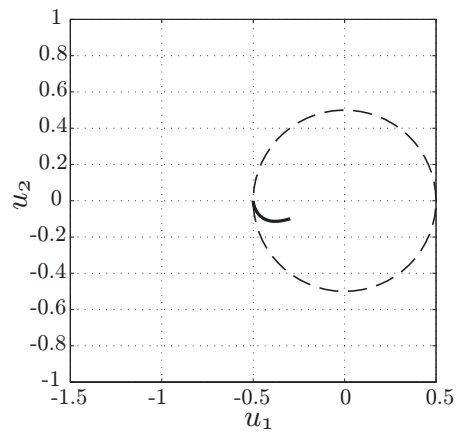
Fig. 3 Responses of state and input with controller (126)



(a) Responses of state.



(b) Responses of input.



(c) Trajectory of controller (127).

Fig. 4 Responses of state and input with controller (127)

5.5 磁気浮上系への適用

本節では、(5.2) 節で提案した連続な漸近安定化制御則制御則 (105) および (5.3) 節で提案したロバスト制御則 (114) を磁気浮上系に適用し、実機実験によって有効性を検証する。

5.5.1 磁気浮上系の数式モデル

Fig. 5 に示す磁気浮上実験装置を制御対象として考える。このシステムは、上下2つの駆動コイル、浮上物体である円盤状の永久磁石、そして永久磁石の位置を計測するレーザセンサから構成される。駆動コイルに直流電圧を加え、発生する電磁力によって磁石の鉛直方向の位置を変化させることができる。磁石の現在位置はレーザセンサによって計測する。また、横ずれを防ぐため、磁石の中心にガイドロッドが通っており、磁石はこれに沿って移動する。

本研究では、上側の駆動コイルによって発生する吸引力のみを利用し、永久磁石を目標位置に浮上させる位置決め制御問題を考える。このとき、磁気浮上系は Fig. 6 のようにモデル化される。ただし、 $\xi[\text{m}]$ は上部コイルから磁石までの距離、 $F_u[\text{N}]$ は上部コイルへの入力電圧 u によって発生する電磁力である。また、 $m[\text{kg}]$ は磁石の質量、 $\mu[-]$ は摩擦係数、 $g_0[\text{m/s}^2]$ は重力加速度である。

Fig. 6 の磁石に対する運動方程式は、以下ようになる。

$$m\ddot{\xi} = F_u - m\mu\dot{\xi} - mg_0 \quad (131)$$

ここで、電磁力 F_u は距離 ξ と入力電圧 u の関数として次式のように表される。

$$F_u = \frac{u}{a(-\xi + b)^4} \quad (132)$$

ただし、 a, b は定数であり、 u には以下の入力制約が存在する。

$$\|u\|_2 = \sqrt{|u|^2} < 5[\text{V}] \quad (133)$$

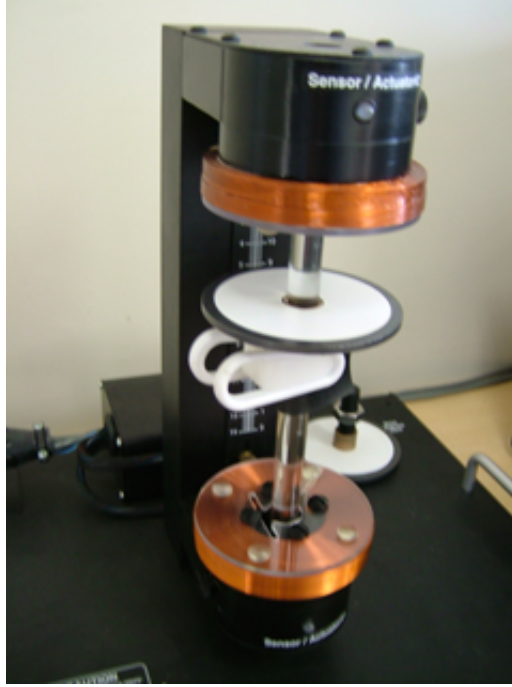


Fig. 5 Magnetic Levitation System

ξ^* [m] を磁石の目標位置とし, 状態変数 $x = [x_1, x_2]^T$, $x_1 = \xi - \xi^*$ [m], $x_2 = \dot{x}_1$ [m/s] とすれば, (131), (132) 式より次の状態方程式を得る.

$$\Sigma_p : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 - g_0 + \frac{u}{ma(-x_1 - \xi^* + b)^4} \end{cases} \quad (134)$$

また, (5) 式の形で表せば,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\mu x_2 - g_0 \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ma(-x_1 - \xi^* + b)^4} \end{bmatrix}. \quad (135)$$

となる. ただし, (135) 式では $f(0) = [0, g_0]^T \neq 0$ であるため, 原点 $x = 0$ は自律系の平衡状態でないことに注意が必要である.

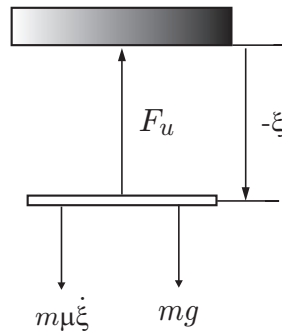


Fig. 6 System Setting

Table. 1 Identified Parameters

m [kg]	μ [-]	g_0 [m/s ²]	a [V/N · m ⁴]	b [m]
0.12	4.5	9.80665	40118.9	0.056464

以上の議論により，永久磁石を目標位置 ξ^* に浮上させる問題は，入力制約 (133) のもとでシステム (135) の原点を漸近安定化する入力を設計する問題として定式された．システム (135) のパラメータ同定値を Table 1 に示す．

5.5.2 磁気浮上系と凸入力制約

前節でも述べたように，磁気浮上系 (135) は重力加速度の影響により，制御目標状態が自律系の平衡点とならないシステムである．そのため， $f(0) = 0$ となることを前提としている制御 Lyapunov 関数を用いた制御系設計法をそのまま適用することはできない．中村ら [12] は，磁気浮上系と同様に重力加速度の影響を受ける 1 リンクロボットアームを対象に，重力項を補償するプレフィードバックを用いて，目標状態を仮想的に平衡状態とした上で，制御 Lyapunov 関数を用いて制御系設計を行う方法を提案している．以下では，磁気浮上系 (135) に対して，

このプレフィードバックを用いた制御系設計法を適用する .

まず , つぎのように磁気浮上系 (135) を書き直す .

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) + F(x)g_0 + g(x)u \quad (136)$$

ただし ,

$$\tilde{f}(x) = f(x)|_{g_0=0} = [x_2, -\mu x_2]^T, \quad F(x) = [0, -1]^T \quad (137)$$

である . システム (136) では , 重力項が $F(x)g_0$ という形で表現され , これにより $\tilde{f}(0) = 0$ となっている . 重力項 $F(x)g_0$ をキャンセルするため , 次式のプレフィードバック $u_g(x)$ を考える .

$$u_g(x) = mg_0 a(-x_1 - \xi^* + b)^4 \quad (138)$$

入力 $u(x)$ を

$$u(x) = u_g(x) + v(x) \quad (139)$$

として (136) 式に代入すると , $F(x)g_0 + g(x)u_g(x) = 0$ となることより

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) + g(x)v(x) \quad (140)$$

を得る . すなわち , プレフィードバック $u_g(x)$ によって重力加速度項がキャンセルされ , $x = 0$ を平衡点として扱うことが可能となる .

プレフィードバック u_g を用いたとき , 入力制約は次式のように表される .

$$\|u(x)\|_2 = \|v(x) + u_g(x)\|_2 < 5[\text{V}] \quad (141)$$

ここで , 入力全体 (= u) に対する制約はノルム制約であるが , 漸近安定化入力 v に対する制約は , 4.4 節の例題で扱った , 中心のずれたノルム制約であることに注意する . v に対する入力制約を , 制約関数を用いて表すと以下のようなになる .

$$v \in U(x) = \{x \in \mathbb{R} | G_0(x, u) < 0\} \quad (142)$$

$$G_0(x, v) = \|v(x) + u_g(x)\|_2 - 5 \quad (143)$$

5.5.3 制御系設計

中心のずれたノルム制約 (141) の下で磁気浮上系 (135) の原点を漸近安定化する制御則 $v(x)$ を設計する．磁気浮上系に対する CLF として，次式を考える．

$$V(x) = \frac{1}{2}(d^2 + 1)x_1^2 + dx_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (144)$$

ただし， $d > 0$ は設計パラメータである．(144) 式の導出方法については，付録 B で述べる．(144) 式の $V(x)$ を用いたとき， $L_fV(x), L_gV(x)$ は以下ようになる．

$$\begin{aligned} L_fV &= \frac{1}{2}\{(d^2 + 1) - 4.5d\}x_1x_2 + \frac{1}{2}(d - 4.5)x_2^2, \\ L_gV &= \frac{1}{2} \cdot \frac{dx_1 + x_2}{4.814 \times 10^{-7}(-x_1 + 7.6464)^4}. \end{aligned} \quad (145)$$

4.4 節の例題と同様の計算により，次式の最小化入力 $\bar{v}(x)$ が得られる．

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} -(u_g(x) \operatorname{sgn}(L_gV) + 5) \cdot \operatorname{sgn}(L_gV) & (L_gV \neq 0) \\ 0 & (L_gV = 0) \end{cases}. \quad (146)$$

(146) 式の $\bar{v}(x)$ を入力として用いたとき，局所制御 Lyapunov 関数の時間微分 $\dot{V}(x, u)$ は以下ようになる．

$$\dot{V}(x, \bar{u}(x)) = L_fV - u_g(x) \cdot L_gV - 5|L_gV| \quad (147)$$

これより，(76) 式の $P(x)$ は，

$$P(x) = \frac{L_fV}{u_g(x) \cdot L_gV + 5|L_gV|} \quad (148)$$

となる．5.2 節の定理 7 と (145), (146), (148) 式より，以下の連続な漸近安定化制御則が得られる．

$$v(x) = \begin{cases} \frac{(P + |P|) + c|L_gV|}{2 + c|L_gV|} \\ \quad \cdot (u_g(x) \operatorname{sgn}(L_gV) + 5) \operatorname{sgn}(L_gV) & (L_gV \neq 0) \\ 0 & (L_gV = 0) \end{cases} \quad (149)$$

また，5.3節の定理8を用いると，つぎのロバスト制御則が得られる．

$$v(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{r}(P+|P|)+c|L_g V|}{2+c|L_g V|} \cdot (u_g(x) \operatorname{sgn}(L_g V)+5) \operatorname{sgn}(L_g V) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (150)$$

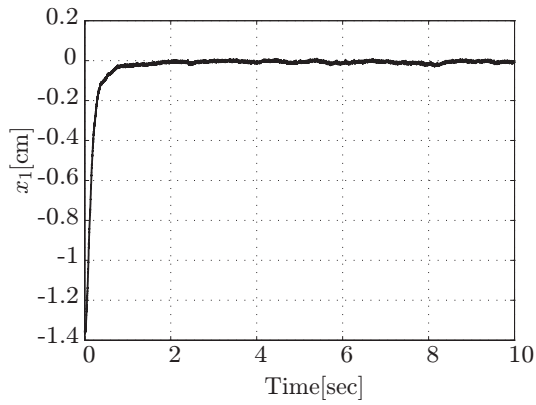
5.5.4 実験結果

設計した制御則(149)および(150)の有効性を検証するため，実機実験を行った．初期状態 $x(0) = [-1.4, 0]^T$ から目標状態 $x_d = [0, 0]^T$ への位置決め制御問題を考え，制御則はMATLAB/Simulinkで実装する．また，サンプリング周期は1[msec]である．

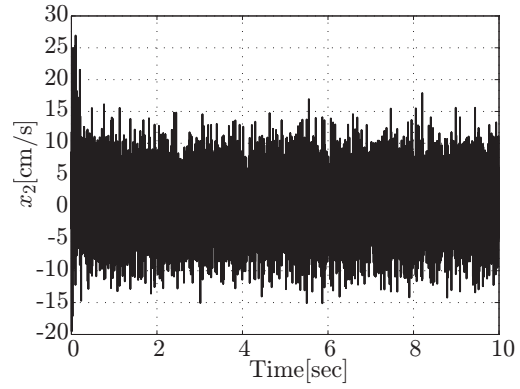
各設計パラメータは $d = 8$ ， $c = 0.5 \times 10^{-3}$ ， $r = 2$ とした．Fig. 7に，(149)式の連続な漸近安定化制御則を用いた場合の実験結果を示す． x_1 の応答を見ると，速度 x_2 の観測ノイズの影響で若干振動が残っているものの，目標値に収束しているのが確認できる．また，入力制約も破られていないことから，制御則(149)の有効性が示された．

次に，(150)式のロバスト制御則を用いた場合の実験結果をFig. 8に示す．こちらの場合も，状態 x_1 は目標値に収束しており，入力制約も破られていない．よって，制御則(150)の有効性が確認された．

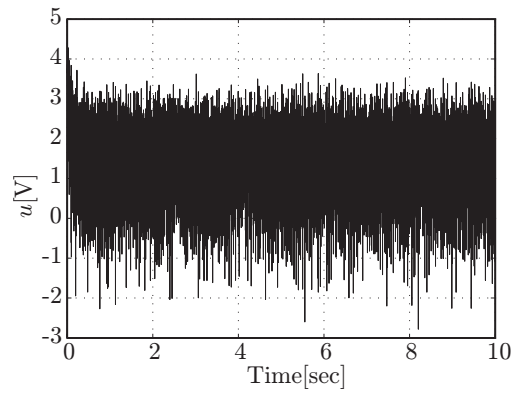
また，Fig. 7とFig. 8を比較すると，ロバスト制御則(150)の方が x_1 の振動が少なく入力電圧 u も小さいことから，良い制御性能が得られているように見える．しかし，何度か繰り返し実験を行った結果では，必ずしもロバスト制御則の方が性能が良いという結果は得られなかった．そのため，Fig. 7とFig. 8の制御性能の差は， x_2 の観測ノイズの大きさや，微妙な初期位置のずれ，気温といった実験環境の違いによって生じたものと考えられる．実際，全く同じコントローラとパラメータを用いて再実験を行っても，得られた制御性能にはばらつきがあった．ただし，再実験においても系を安定化することには成功しているため，制御則(149)，(150)の有効性に関して問題はない．



(a) Time Response of x_1 .

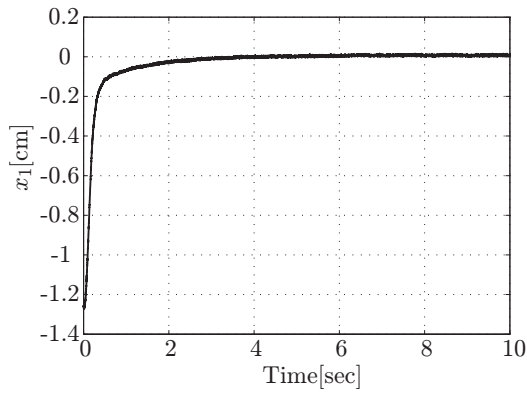


(b) Time Response of x_2 .

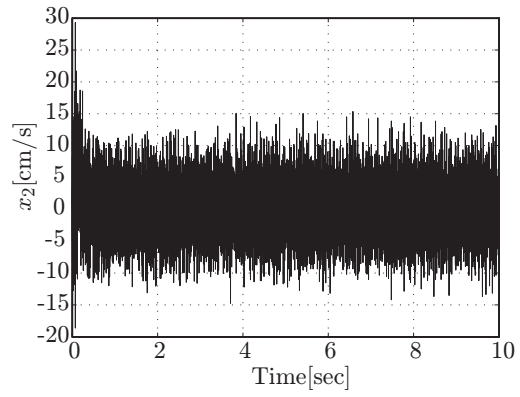


(c) Time Response of u .

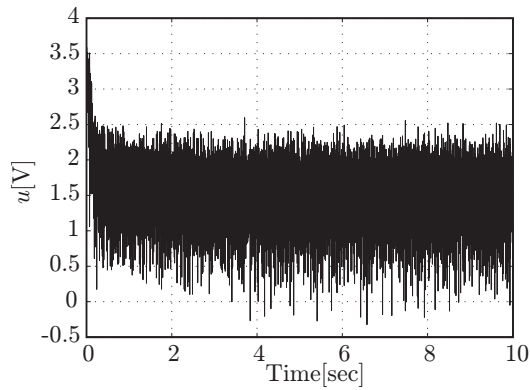
Fig. 7 Experimental Result of Controller (149).



(a) Time Response of x_1 .



(b) Time Response of x_2 .



(c) Time Response of u .

Fig. 8 Experimental Result of Controller (150).

6. 第I部まとめ

第I部では，凸入力制約を持つ非線形システム (5) に対する制御系設計法を提案した．提案法の基本的な考え方は，従来のノルム制約を持つ非線形システムに対する結果 [10] と同様，

1. 入力空間の閉包 $\bar{U}(x)$ を考え，制約 $u \in \bar{U}(x)$ の下で局所制御 Lyapunov 関数の時間微分を最小化する入力 (最小化入力) を導出する
2. 1. で導出した最小化入力を元に，連続な漸近安定化制御則，ロバスト制御則を構成する

の2ステップから構成される．

ステップ1では，最小化入力の導出に関して，凸最適化理論を用いて議論した．まず，最小化入力の必要十分条件が凸最適化の KKT 条件で与えられることを示した．さらに， $L_g V(x) \neq 0$ となる x に対して最小化入力が連続となるためには，入力空間の閉包 $\bar{U}(x)$ が狭義凸集合であれば良いことを明らかにした．最小化入力と漸近安定化可能領域の関係についても述べた．

以上のステップ1のもとで，ステップ2ではノルム制約の場合と同様の方法で連続な漸近安定化制御則・ロバスト制御則を設計できることを示した．提案法は，従来のノルム制約を持つ非線形システムに対する設計法を，凸入力制約に一般化したものとなっている．

提案法の有効性については，数値シミュレーションと，磁気浮上系による実機実験を行って検証した．

第II部

厳密線形化可能な非線形システムに対する局所LQ最適性を持つ大域的逆最適制御則

7. 非線形システムと局所LQ最適性

第II部の議論では，第I部と異なり，非線形システム(5)は以下の条件を満たすとする．

- 入力制約は存在しない ($U \equiv \mathbb{R}^m$)
- f, g は滑らかな関数である

7.1 非線形システムの厳密線形化

非線形システム(5)に対して，フィードバックを含む入力変換と座標変換

$$u = \alpha_c(x) + \beta_c(x)u_c \quad (151)$$

$$x_c = \phi_c(x) \quad (152)$$

が存在し，次の線形システムに変換できるとき，システムは厳密線形化可能であるという．

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c u_c \quad (153)$$

ここで，(153)はBrunovski標準系と呼ばれる，可制御な線形システムである[19]．また， α_c, β_c および ϕ_c は滑らかな写像であり， u_c は新しい入力である．

厳密線形化と線形制御理論を組み合わせることで，非線形システムの漸近安定化が可能になるが，厳密線形化によって得られた線形システム(153)は，元の非線形システム(5)の線形近似システム

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (154)$$

とは異なったものになってしまうことに注意が必要である．すなわち，(153) 式の A_c, B_c と (154) 式の A, B は一致しない．これは，厳密線形化後のシステム (153) に対して線形制御理論を適用しても，局所的な制御性能は，線形近似システム (154) に対して線形制御理論を適用した場合と異なることを意味している．

7.2 ロバスト厳密線形化

前節で述べた厳密線形化に対し，線形化されたシステム (153) と元の非線形システムの線形近似系 (154) を一致させるように変換 (151),(152) を構成する，ロバスト厳密線形化と呼ばれる手法が知られている [17]．これは，通常の厳密線形化の変換 (151),(152) に対し，さらに入力変換と座標変換を加えるもので，具体的な変換は次式のように構成される．

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (155)$$

$$z = \phi(x), \quad (156)$$

ここで，

$$\alpha(x) = \alpha_c(x) + \beta_c(x)LT^{-1}\phi_c(x) \quad (157)$$

$$\beta(x) = \beta_c(x)\beta_c^{-1}(0) \quad (158)$$

$$\phi(x) = T^{-1}\phi_c(x) \quad (159)$$

$$L = \beta_c^{-1}(0)(\partial\alpha_c/\partial x|_{x=0}) \quad (160)$$

$$T = \partial\phi_c(x)/\partial x|_{x=0} \quad (161)$$

である．(155), (156) 式の変換によって，次の z と v に関する線形システムを得る．

$$\dot{z} = Az + Bv. \quad (162)$$

新たに加えた座標変換と入力変換により，線形システム (162) が元の非線形システムの線形近似系 (154) と一致していることに注意する．

次章の議論では，写像 $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\phi(x)$ に関する次の性質を頻繁に利用する：

$$\left. \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (163)$$

$$\beta(0) = I \quad (164)$$

$$\left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = I \quad (165)$$

7.3 線形システムと LQ 最適制御

LQ 最適制御は，線形システムの安定化に広く用いられる制御系設計法である．本研究では，非線形システム (5) を大域的に漸近安定化し，局所的には線形近似システム (154) に対する LQ 最適制御と一致するような制御則の設計を考える．その準備として，ここでは線形近似システム (5) に対する LQ 最適制御則を導入する．

次式で与えられる二次形式の評価関数 J を考えよう．

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (166)$$

ここで， Q, R は正定行列である． P を次式の代数 Riccati 方程式の唯一正定解とする．

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (167)$$

このとき，次式の入力はシステム (5) の原点を (局所的に) 漸近安定化し，評価関数 J を最小化することが知られている．

$$u = -R^{-1}B^T P x \quad (168)$$

7.4 問題設定

第 II 部では，厳密線形化可能な非線形システム (5) に対して，以下の条件を満たす状態フィードバック $u = u(x)$ を設計する：

1. $u(x)$ はシステム (5) の原点を大域的に漸近安定化する

2. $u(x)$ の線形近似が，LQ 最適制御 (168) と一致すること
3. $u(x)$ は大域的に逆最適性を満たす
4. $u(x)$ は線形制御則から簡単に変換可能であること

条件 (1) ~ (3) を満たす制御則はすでに文献 [16] によって提案されているが，この方法は厳密線形化可能な一入力非線形システムのみを対象としている．さらに，バックステッピングを拡張した方法であるため，設計プロセスが複雑であるという問題点がある (文献 [16], Table I を参照)．そこで本研究では，(1) ~ (3) に加え (4) も考慮した，計算コストが少なく，多入力系に適用可能な制御系設計法を提案する．

8. 局所 LQ 最適性を持つ大域的漸近安定化制御則

8.1 制御系設計

非線形制御系設計において，(155) 式のような非線形項を直接キャンセルする入力を用いると，システムのモデル化誤差の影響によりシステムが不安定になりやすいことが指摘されている [24][13]．これは，ロバスト厳密線形化で得られた線形システム (162) に対して LQ 最適制御を適用しても，LQ 最適制御の持つ優れたロバスト性が失われてしまうことを示唆している．

そこで，ロバスト厳密線形化 (155), (156) からキャンセル項 $\alpha(x)$ を除いた次の変換を考えよう．

$$\begin{aligned}u &= \beta(x)v \\z &= \phi(x)\end{aligned}$$

上式の変換により，非線形システム (5) は次のように変換される．

$$\dot{z} = Az + f_h(z) + Bv \quad (169)$$

ここで， $f_h(z) = -B\alpha(\phi^{-1}(z))$ である． $\alpha(z)$ は高次の非線形性であり，次式が成立することに注意しよう．

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f_h(z)}{\|z\|_2} = 0 \quad (170)$$

システム (169) に対して，制御 Lyapunov 関数を用いた制御系設計法を適用したい．非線形システム (5) が厳密線形化可能な場合，次式の V が常にシステム (169) の制御 Lyapunov 関数になることが知られている [23][24]:

$$V = \phi(x)^T P \phi(x) (= z^T P z), \quad (171)$$

ここで， P は代数 Riccati 方程式 (167) の解である．

(171) 式より， $L_{Az}V$, $L_{f_h}V$, L_BV の Lie 微分は次のように計算できる：

$$L_{Az}V = z^T (PA + A^T P)z, \quad (172)$$

$$L_{f_h}V = 2z^T P f_h(z), \quad (173)$$

$$L_BV = 2z^T P B. \quad (174)$$

以上の準備の下で，本章の主結果である次の定理を導くことができる．

定理 9. 非線形システム (169) と (171) 式の制御 *Lyapunov* 関数 V を考える．このとき，次式の制御入力 v はシステム (169) の原点を大域的漸近安定化する：

$$v = - \left(\frac{1}{2} + \eta(z) \right) R^{-1} (L_B V)^T \quad (175)$$

$$\eta(z) = \begin{cases} \frac{p(z)L_{A_z}V + L_{f_h}V + \sqrt{(p(z)L_{A_z}V + L_{f_h}V)^2 + b(z)q(b(z))}}{b(z)} & (L_B V \neq 0) \\ 0 & (L_B V = 0) \end{cases} \quad (176)$$

$$b(z) = L_B V R^{-1} (L_B V)^T \quad (177)$$

ここで， $p: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1)$ は次の条件を満たす滑らかな関数である．

$$p(z) \in (0, 1), \forall z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (178)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} p(z)L_{A_z}V / (z^T z) = 0 \quad (179)$$

また， $q(b(z))$ は以下の条件を満たす滑らかな関数である．

$$q(b) > 0, \forall b > 0 \quad (180)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} q(b(z))/b(z) = 0 \quad (181)$$

定理 9 の証明は *Lyapunov* の直接法に従う．よって，制御入力 (175) が常に連続ならばより簡単に定理 9 を証明できる．そのために次の補題を与えよう．

補題 22. 制御入力 (175) は全ての $z \in \mathbb{R}^n$ で連続である．さらに， f_h, p, q が z に関して C^r 級ならば (175) も C^r 級であり， f_h, p, q が z に関して実解析的ならば (175) も実解析的となる．

証明. $L_B V \neq 0$ となる z に対して (175) 式が連続となるのは明らかである．よって， $z \in \{z | L_B V = 0\}$ となる z に対してのみ連続性を示す．

すべての $z \in \{z | L_B V \neq 0\}$ に対して $b(z) > 0$ であることに注意すると, $z_0 \in \{z | L_B V = 0\}$ の近傍に含まれる全ての z に対して次の不等式が成立すれば, (175) は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で連続となる.

$$pL_{Az}V + L_{f_h}V + \sqrt{(pL_{Az}V + L_{f_h}V)^2 + bq} < b \quad (182)$$

ここで,

$$pL_{Az}V + L_{f_h}V + \sqrt{(pL_{Az}V + L_{f_h}V)^2 + bq} \geq 0 \quad (183)$$

であるから, 不等式 (182) は次のようになる.

$$(pL_{Az}V + L_{f_h}V)^2 + bq < (b - (pL_{Az}V + L_{f_h}V))^2 \quad (184)$$

$$\iff q < b - (pL_{Az}V + L_{f_h}V) \quad (185)$$

CLF の性質から,

$$L_{Az}V < 0, \forall z \in \{z | L_B V = 0\} \setminus \{0\} \quad (186)$$

$$\lim_{L_B V \rightarrow 0} L_{f_h}V = 0 \quad (187)$$

となることを考慮すると, $z_0 \in \{z | L_B V = 0\} \setminus \{0\}$ の十分小さい近傍では不等式 (185) が成立する. よって, 制御則 (175) は原点を除いて連続である.

次に, 制御則 (175) の原点における連続性を調べよう. f_h, p, q の定義より次式が得られる.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{L_{f_h}V}{z^T z} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{p(z)L_{Az}V}{z^T z} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{q(b(z))}{z^T z} = 0. \quad (188)$$

これより,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \eta(z) = 0. \quad (189)$$

が導かれる. 従って, 制御則 (175) は原点で連続である. 以上の議論より, 制御則 (175) はすべての $z \in \mathbb{R}^n$ で連続であることが示された.

続いて, 制御則 (175) の滑らかさについて考えよう. (175) 式において $V = z^T P z$ であるから, $R^{-1}L_B V$ は実解析的である. よって, 関数 $\eta(z)$ の滑らかさで制御則

(175) の滑らかさが決まることに注意する．文献 [20] の Proposition 5.9.10 の証明より，

$$p(z)L_{Az}V + L_{f_h}V < 0, \forall z \in \{z|b(z) = 0\} \setminus \{0\} \quad (190)$$

ならば $\eta(z)$ は C^r 級であり，仮定から関数 f_h, p, q は C^r 級である．ここで， $b(z) = 0$ ならば $L_{Az}V < 0$ かつ $L_{f_h}V = 0$ であるから，(190) が成立する．以上より，次の結論を得る．

- 関数 f_h, p, q が C^r 級ならば，(175) も C^r 級である
- 関数 f_h, p, q が実解析的ならば，(175) も実解析的である

□

注意 6. (185) 式より， $p(z)L_{Az}V$ の項を除くと制御則 (175) は連続でなくなる可能性があることに注意する．

元の非線形システム (5) に対し，補題 22 の系として以下が導かれる．

系 2. 厳密線形化可能な非線形システム (5) と次式の制御入力 u を考える．

$$u = -\beta(x) \left(\frac{1}{2} + \eta(\phi^{-1}(x)) \right) R^{-1} (L_B V)^T \quad (191)$$

このとき，制御入力 (191) はすべての $x \in \mathbb{R}^n$ で連続である．さらに，以下が成立する．

- 関数 ϕ, β, f_h, p, q がすべて C^r 級ならば，制御則 (191) は x に関して C^r 級である
- 関数 ϕ, β, f_h, p, q がすべて実解析的ならば，制御則 (191) は x に関して実解析的である

注意 7. ϕ, β, f_h, p, q の滑らかさより，制御則 (191) は最低でも C^1 級であることに注意しよう．また，本章の議論ではシステム (5) が厳密線形化可能であることを仮定しているため，常に小入力特性 (*scp*) が満たされることが重要である．

定理 9 の証明. 制御則 (175) は連続であるから, システム (169) に (175) 式を入力として加えた閉ループ系も連続となる. よって, 全ての初期値に対して閉ループ系の微分方程式の解が存在する.

$V = z^T P z$ が閉ループ系の Lyapunov 関数となることを示そう. V の時間微分を直接計算すると, 次式のようになる.

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= L_{A_z} V + L_{f_h} V - \frac{1}{2} L_B V R^{-1} (L_B V)^T - p(z) L_{A_z} V \\
&\quad - L_{f_h} V - \sqrt{(p(z) L_{A_z} V + L_{f_h} V)^2 + b(z) q(b(z))} \\
&= (1 - p(z)) z^T (P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P) z \\
&\quad - (1 + p(z)) z^T P B R^{-1} B^T P z \\
&\quad - \sqrt{(p(z) L_{A_z} V + L_{f_h} V)^2 + b(z) q(b(z))} \\
&< 0.
\end{aligned} \tag{192}$$

V はプロパーであるから, システム (169) の原点は大域的漸近安定である \square

定理 9 では, 関数 $p(z)$ と $q(z)$ を具体的に与えていないが, 実際の制御系設計ではこれらの関数が与えられている方が便利である. そこで, $p(z)$ と $q(z)$ の一例を示す.

系 3. 非線形システム (169) を考える. また, $p(z)$, $q(z)$ を以下の実解析的関数とする.

$$p(z) = c_1 \frac{z^T z}{1 + z^T z}, \tag{193}$$

$$q(z) = c_2 b(z)^2 \tag{194}$$

ここで, $c_1 \in (0, 1)$ と $c_2 > 0$ は設計パラメータである.

このとき, 制御則 (175) はシステム (169) の原点を大域的に漸近安定化する. \square

本章の最後に, (191) が局所的に線形 LQ 最適制御則と一致することを示す.

定理 10. 厳密線形化可能な非線形システム (5) と制御則 (191) を考える．このとき，制御則 (191) の x に関する線形近似は，線形近似システム (154) に対する LQ 最適制御則 $u = -R^{-1}B^T Px$ と一致する．

さらに，非線形システム (5) と制御則 (191) の閉ループ系の線形近似は，線形システム (154) に LQ 最適性制御則を与えたものと一致する．

証明. p と q の定義より，

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\eta(z)}{\|z\|} = 0. \quad (195)$$

となる．座標変換 $z = \phi(x)$ が可逆であることと， $\partial\phi(x)/\partial x|_{x=0} = I$ より次式が成立する．

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta(\phi^{-1}(x))}{\|x\|} = 0. \quad (196)$$

$\beta(0) = I$ を考慮すると，制御則 (175) の線形近似として次式を得る．

$$u = -\frac{1}{2}R^{-1}(L_B V)^T \quad (197)$$

$$= -R^{-1}B^T Px. \quad (198)$$

さらに，閉ループ系の線形近似は次式のようになる．

$$\dot{x} = Ax + B(-R^{-1}B^T Px). \quad (199)$$

□

系 4. 制御則 (175) の z に関する線形近似は， LQ 最適制御則 $u = -R^{-1}B^T Pz$ と一致する．

8.2 逆最適性とゲイン余裕

前章では，局所的に LQ 最適制御則と一致する漸近安定化制御則を提案した．本章では，まずに提案制御則 (175) が最適性を持つこと，すなわち意味のある評価関数を最小化する入力であることを示す．続いて，制御則 (191) が LQ 最適制御則と同様に，ゲイン余裕 $(1/2, \infty)$ を持つことを証明する．

次の補題は，制御入力 (175) の逆最適性を保証するものである．

補題 23. 制御則 (175) はシステム (169) に対して，以下の評価関数を最小化する逆最適制御則である．

$$J = \int_0^{\infty} \left(l(z) + \frac{1}{r(z)} v^T R v \right) dt \quad (200)$$

ただし，

$$r(z) = (1 + 2\eta(z)) \quad (201)$$

$$l(z) = z^T Q z + \frac{1}{2} \eta(z) b(z) - L_{f_h} V \quad (202)$$

である．

証明. 証明は基本的に，文献 [25] の Theorem 3.19 に従う．(200) に対する HJB 方程式は，次のように書ける．

$$\min_v L_{Az} V + L_{f_h} V + L_B V \cdot v + l(z) + \frac{1}{r(z)} v^T R v = 0 \quad (203)$$

(203) 式を最小化する入力を計算すると，

$$v = -\frac{r(z)}{2} R^{-1} (L_B V)^T \quad (204)$$

となる．上式を変形すると，次の関係を得る．

$$r(z) = 1 + 2\eta(z). \quad (205)$$

これより，HJB 方程式 (203) は次のようになる．

$$L_{Az} V + L_{f_h} V - \frac{1}{4} (1 + 2\eta) L_B V R^{-1} (L_B V)^T + l = 0 \quad (206)$$

よって， $l(z)$ は次式となる．

$$l(z) = -L_{Az} V - L_{f_h} V + \frac{1}{4} L_B V R^{-1} (L_B V)^T + \frac{1}{2} \left(p L_{Az} V + L_{f_h} V + \sqrt{(p L_{Az} V + L_{f_h} V)^2 + b q} \right). \quad (207)$$

ここで,

$$L_{Az} = z^T(PA + A^T P)z \quad (208)$$

$$L_B V R^{-1}(L_B V)^T = 4z^T P B R^{-1} B^T P z \quad (209)$$

$$l(z) = z^T Q z + \frac{1}{2} \eta b - L_{f_h} V \quad (210)$$

であることに注意する．また，すべての $z \neq 0$ に対して，次の不等式が成立する．

$$\frac{1}{2} \left(p L_{Az} V + L_{f_h} V + \sqrt{(p L_{Az} V + L_{f_h} V)^2 + b q} \right) - L_{f_h} V > 0. \quad (211)$$

よって， $l(z) > 0 \quad \forall z \neq 0$ が示された．

以上の議論より，提案制御則 (175) は意味のある評価関数を最小化する逆最適制御則である． \square

Lie 微分は座標系の選び方によらないことから，次の定理が成立する．

定理 11. 制御則 (175) はシステム (5) に対して，次式の評価関数を最小化する逆最適制御則である．

$$J = \int_0^\infty \left(l(\phi^{-1}(x)) + \frac{1}{r(\phi^{-1}(x))} u^T \beta^{-T}(x) R \beta^{-1}(x) u \right) dt, \quad (212)$$

ただし，

$$r(x) = (1 + 2\eta(\phi^{-1}(x))), \quad (213)$$

$$l(x) = \phi^{-T}(x) Q \phi^{-1}(x) + \frac{1}{2} \eta(\phi^{-1}(x)) b(\phi^{-1}(x)) - L_{f_h} V. \quad (214)$$

である．

一般的に，最適制御則はゲイン余裕を持つ．前節で提案した制御則 (191) もゲイン余裕を持つことを示そう．

定理 12. 制御則 (191) は，次のシステムの原点を漸近安定化する．

$$\dot{x} = f(x) + \kappa g(x) u, \quad (215)$$

ただし， $\kappa \in (1/2, \infty)$ は定数とする．すなわち，制御則 (191) はゲイン余裕 $(1/2, \infty)$ を持つ．

証明. (171) 式で定義される V を考える. V の時間微分は座標系の選び方によらないので, ここでは z 座標で考える. V の時間微分を計算すると, (192) 式より次の不等式を得る.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= z^T(PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P)z \\ &\quad - (2\kappa - 1)z^T PBR^{-1}B^T Pz + L_{f_h}V \\ &\quad - \kappa \left(pL_{Az}V + L_{f_h}V + \sqrt{(pL_{Az}V + L_{f_h}V)^2 + bq} \right).\end{aligned}\quad (216)$$

(211) 式を考慮すると, $\kappa > 1/2$ のとき $\dot{V} < 0$ となることがわかる. \square

8.3 LQR から提案制御則への変換

前節では, 提案制御則 (175) の持つ優れた性質を, LQ 最適制御との対比によって明らかにしてきた. しかしながら, 一方で提案制御則は複雑で, 線形制御則とは全く異なる構造を持っているように感じられる. そこで本節では, 提案制御則が LQ 最適制御則と類似の構造を持っていることを示し, LQ 最適制御則から提案制御則 (175) への変換の方法について考える.

線形近似システム (154) に対する LQ 最適制御則 $u_l(x) = -Kx$ が既に設計されていると仮定しよう. すなわち, $K = -R^{-1}B^T P$ である. このとき, 提案制御則 (191) を以下のように書きかえられることが重要である.

$$u = -\beta(x)(1 + 2\eta(\phi^{-1}(x)))K\phi^{-1}(x).\quad (217)$$

この式の意味するところは, 提案制御則と LQ 最適制御の違いが座標変換 ϕ^{-1} , 入力変換 $\beta(x)$, そして高次の非線形性補償項 $2\eta(x)$ の 3 つで表現できるということである.

従って, 以下に示す手順を踏めば, LQ 最適制御則から提案制御則を簡単に構成することができる.

1. 入力変換 $\beta(x)$ を加える
2. 座標変換 ϕ^{-1} により, Kx を $K\phi^{-1}(x)$ に変換する

3. 非線形補償項 $2\eta(\phi^{-1}(x))$ を加える

ここで, $\phi^{-1}(0) = \beta(0) = I, \eta(0) = 0$ であるから, 各ステップにおいて LQ 最適性が損なわれることがないことに注意する. すなわち, 各ステップで変換途中の制御則を用いても問題ないため, 導入が行いやすいという大きなメリットがある. また, 本節で示した方法は, LQ 最適制御則から逆最適制御則への変換を文献 [16] の方法よりも容易に行うことができる.

8.4 磁気浮上系への適用

本節では, 前章で提案した制御則 (175) を磁気浮上系に適用する. 制御則の有効性を数値シミュレーションと実機実験により検証する.

8.4.1 線形近似系に対する LQ 最適制御則の設計

本節では, 磁気浮上系 (135) に対して提案制御則 (175) を適用する前に, 磁気浮上系の線形近似系を導出し, LQ 最適制御則を設計する.

まず, 磁気浮上系 (135) を目標状態 $x = 0$ の近傍で線形近似することを考えよう. 5.5 節でも述べたように, (134) 式で $f(0) \neq 0$ となっているため, 目標状態 $x = 0$ は平衡状態ではない. そこで, 制御入力 u を $u = u_0 + u_s$ と分割し, フィードフォワード入力 u_0 を加えることで目標状態 $x = 0$ を平衡状態として扱う. u_s は漸近安定化入力である.

u_0 を実際に計算すると, 次のようになる.

$$u_0 = g_0 m a (-\xi^* + b)^4 \quad (218)$$

このとき, (135) 式は次のように表される.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\mu x_2 - \left(1 - \frac{(-\xi+b)^4}{(-x_1-\xi^*+b)^4}\right) g_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m a (-x_1-\xi^*+b)^4} \end{bmatrix} u_s \quad (219)$$

ここで、システム (219) は次の入力変換によって厳密線形化可能である。

$$u_s = ma(-x_1 - \xi^* + b)^4 \cdot \left[-\mu x_2 - \left(1 - \frac{(-\xi + b)^4}{(-x_1 - \xi^* + b)^4} \right) g_0 + v \right] \quad (220)$$

システム (219) を目標状態 $x = 0$ の近傍で線形近似すると、次の線形近似系を得る。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{-\xi^* + b} g_0 & -\mu \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ma(-\xi^* + b)^4} \end{bmatrix} u_s \quad (221)$$

目標状態を $\xi^* = -1.5 \times 10^{-2}$ [m] とし、LQ 最適制御の重みを $Q = \text{diag}[1, 1]$, $R = 0.01$ と選ぶ。このとき、代数 Riccati 方程式 (167) の解として、次の行列 P が得られる。

$$P = \begin{bmatrix} 11.26 & 0.28 \\ 0.28 & 0.02 \end{bmatrix} \quad (222)$$

よって、線形近似系 (221) に対する LQ 最適制御則

$$u = -169.45x_1 - 11.76x_2 + g_0 ma(-\xi^* + b)^4 \quad (223)$$

が得られる。制御則 (223) は、システム (219) の原点を局所的に漸近安定化する。制御則 (223) を用いたときの吸引領域を Fig. 9 に示す。

初期状態を $x = [-0.012 \text{ [m]}, 0 \text{ [m/s]}]^T$ とし、制御則 (223) を用いた場合のシミュレーション結果を Fig. 10 に示す。制御則 (223) により、システム (5) の原点が漸近安定化されているのが確認できる。しかしながら、制御則 (223) は原点近傍でしか有効でない。初期状態を、Fig. 9 の unstable domain 内の状態 $x = [-0.05 \text{ [m]}, 0 \text{ [m/s]}]^T$ としたときのシミュレーション結果を Fig. 11 に示す。明らかに、状態 x_1 が不安定となっているのが分かる。よって、制御則 (223) を用いた閉ループ系の原点は、局所的には漸近安定化であるが、大域的には不安定である。

8.4.2 局所 LQ 最適性を持つ大域逆最適制御則の設計

前節で設計した LQ 最適制御則は、磁気浮上系の原点 $x = 0$ を局所的に漸近安定化するが、大域的な漸近安定化を達成することはできない。そこで本節では、

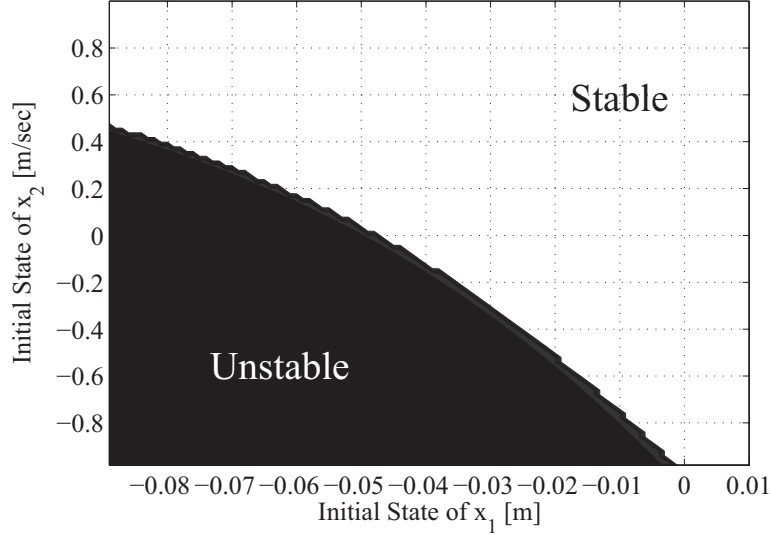


Fig. 9 Domain of Attraction of LQ Optimal Controller

前章で提案した局所 LQ 最適性を持つ大域逆最適制御則を設計する．8.3 節の議論より，提案制御則は前節で設計した LQ 最適制御則 (223) から簡単に変換可能である．

関数 p, q としてそれぞれ (193), (194) 式を考え，パラメータを $c_1 = 1.0, c_2 = 1.0 \times 10^{-6}$ と選ぶ．このとき，提案制御則 (191) は以下ようになる．

$$u_s = \begin{cases} \frac{(-x_1 - \xi^* + b)^4}{(-\xi^* + b)^4} \left(u_l + \frac{L_{fd}V/2 + \sqrt{(L_{fd}V/2)^2 + (0.01 \cdot u_l)^6}}{u_l} \right) & (u_l \neq 0) \\ 0 & (u_l = 0) \end{cases} \quad (224)$$

ここで，

$$u_l = -169.45x_1 - 11.76x_2 \quad (225)$$

$$\begin{aligned} \frac{L_{fd}V}{2} &= \frac{x^T x}{1 + x^T x} (14307x_1^2 + 1933x_1x_2 + 19x_2^2) \\ &\quad - (0.28x_1 + 0.02x_2) \left(1 + \frac{4}{-\xi^* + b} x_1 - \frac{(-\xi + b)^4}{(-x_1 - \xi^* + b)^4} \right) g_0 \end{aligned} \quad (226)$$

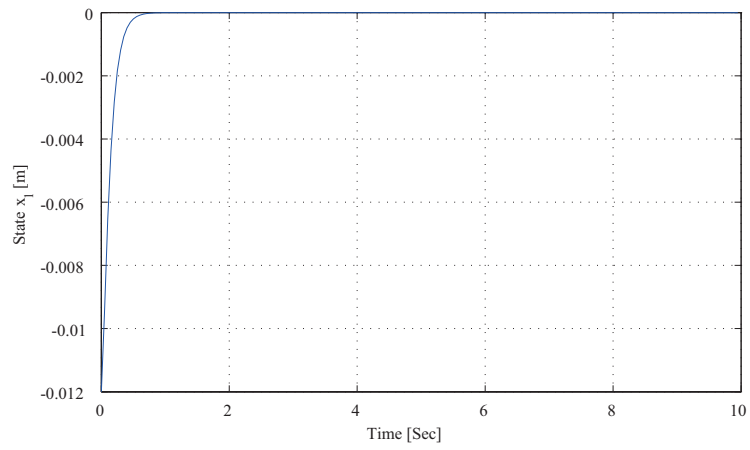


Fig. 10 Simulation Result: LQR State

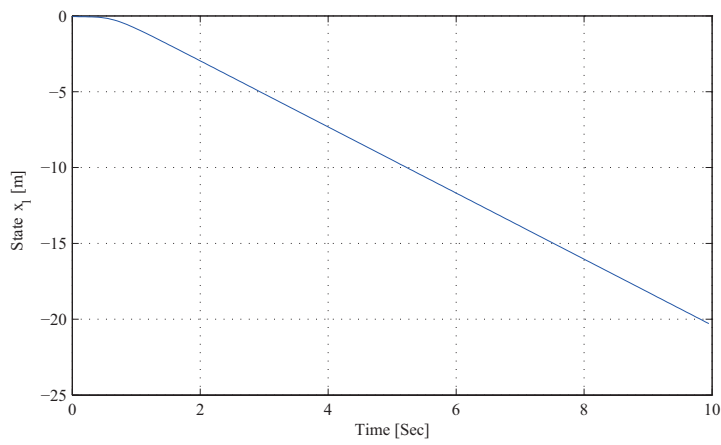


Fig. 11 Simulation Result: LQR State

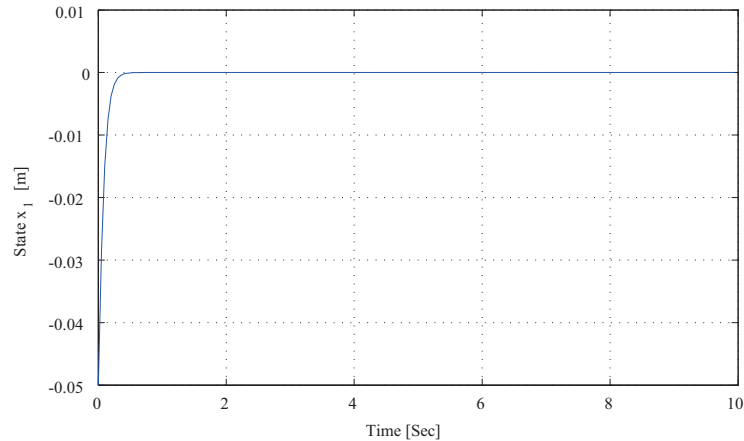


Fig. 12 Simulation Result: Inverse Optimal State

初期状態を $x = [-0.05 \text{ [m]}, 0 \text{ [m/s]}]^T$ とし，逆最適制御則 (224) を用いたときのシミュレーション結果を Fig. 12 に示す．システム (5) の原点が漸近安定化されていることがわかる．また，Fig. 9 内の他の初期状態に対しても，システムの原点を漸近安定化できることをシミュレーションで確認した．

8.4.3 実験結果

本節では，提案制御則の有効性を実機実験により検証する．磁気浮上系に対し，提案制御則 (224) を適用した結果を Fig. 13,14 に示す．Fig. 13 より，提案制御則によって磁気浮上系の原点が漸近安定化されていることが確認できる．

次に，提案制御則と LQ 最適制御則の比較を行う．Figs. 15, 16 に，LQ 最適制御則 (223) を適用したときの実験結果を示す．Fig. 13 と Fig. 15 を比較すると，Fig. 13 の方が原点への収束が速いことが分かる．これは，Fig. 16 と比較して，Fig. 14 の方が 0 [sec] 付近で大きな入力となっているためである．

また，9.5[sec] から 10[sec] までの区間の平均と分散を Table 2 に示す．二つの制御則で，分散と平均に大きな差はないことが分かる．これは，提案制御則が目標状態 $x = 0$ の近傍で LQ 最適制御則と同等の制御性能を持つことを示している．

Table. 2 Comparison of Controllers

Controller	Mean Residual [m]	Residual Variance [m ²]
Proposed Method	1.6×10^{-5}	3.95×10^{-10}
LQR	3.0×10^{-5}	3.85×10^{-10}

以上の結果から，提案制御則は磁気浮上系を漸近安定化し，LQ 最適制御則よりも良い収束性を持つこと，そして，目標状態近傍では LQ 最適制御と同等の制御性能を持つことが明らかになった．

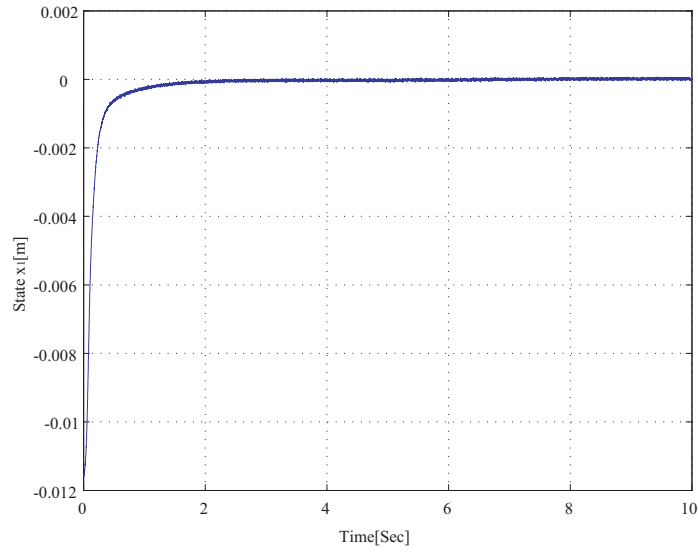


Fig. 13 Experimental Result: Inverse Optimal State

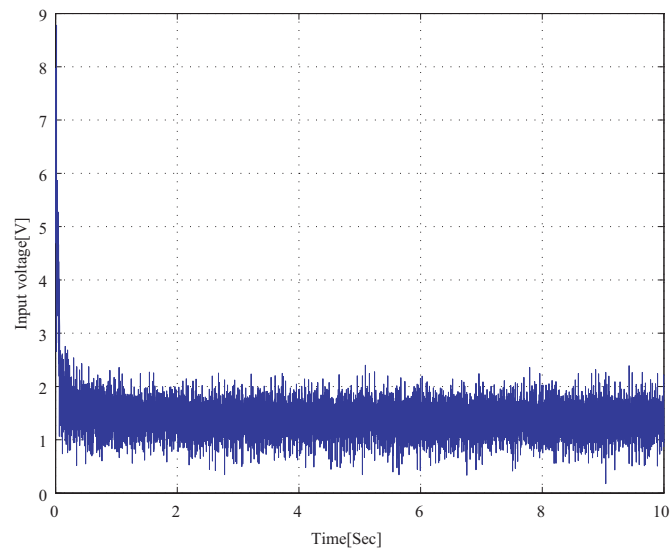


Fig. 14 Experimental Result: Inverse Optimal Input

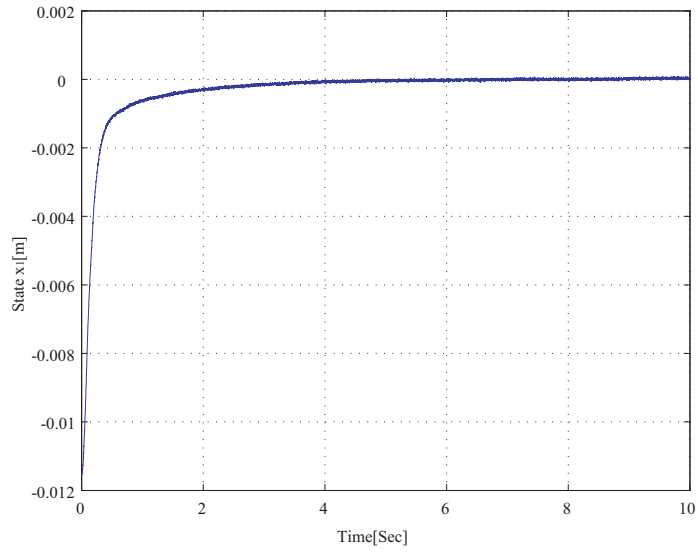


Fig. 15 Experimental Result: LQR State

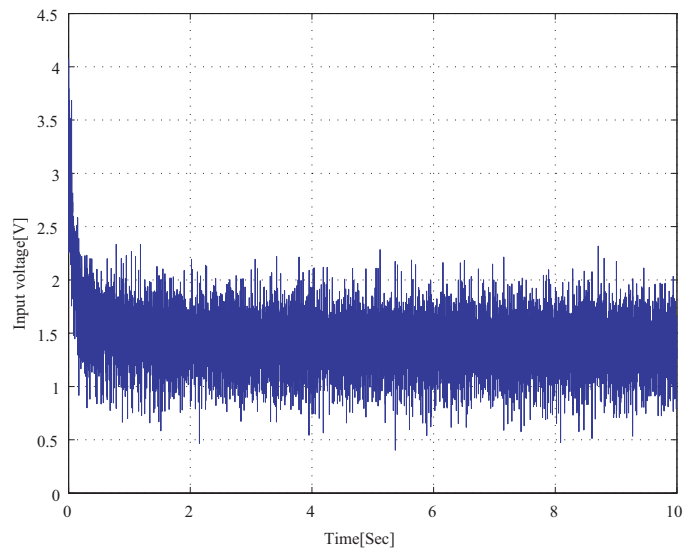


Fig. 16 Experimental Result: LQR Input

9. 第II部まとめ

第II部では，厳密線形化可能な非線形システム (5) に対する制御系設計を行った．提案制御則 (175) はシステム (5) の原点を大域的に漸近安定化し，局所的には線形近似システム (154) に対する LQ 最適制御則と一致している．また，提案制御則はある評価関数を最小化する逆最適制御則になっていること，ゲイン余裕 $(1/2, \infty)$ を持つことを明らかにした．

提案制御則は文献 [16] の方法と比べ，設計プロセスが簡略化されている．これは，文献 [16] の方法が，バックステッピングを拡張した再帰的な設計法であるのに対し，提案制御則は CLF から直接大域漸近安定化制御則を設計しているためである．さらに，提案制御則は，線形近似系に対する LQ 最適制御則から容易に変換できることを示した．提案制御則の有効性は，磁気浮上系を対象とした数値シミュレーションと実機実験により確認した．

10. 結言

10.1 本論文の結論

本論文では、制御 Lyapunov 関数を用いた制御系設計において、二つの制御系設計法を提案した。それぞれの具体的な成果は以下の通りである。

凸入力制約を持つ非線形システムに対する制御系設計法

制御 Lyapunov 関数が既知である入力アファインな非線形システムに対して、凸入力制約を考慮した漸近安定化制御則を提案した。

まず、与えられた入力制約のもとで、局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する入力(最小化入力)を凸最適化理論により導出した。最小化入力の必要十分条件が KKT 条件で与えられることを明らかにし、最小化入力の一意性と連続性について議論した。また、最小化入力と漸近安定化可能領域の関係についても明らかにした。次に、この最小化入力を連続な関数に変形することで、連続な漸近安定化制御則と、セクタ余裕が保証されるロバスト制御則を設計した。これは、喜種ら [10] のノルム制約を考慮した制御系設計法の凸入力制約への拡張となっている。最後に、提案法の有効性をコンピュータシミュレーションと磁気浮上系による実機実験で明らかにした。

局所 LQ 最適性を持つ大域逆最適制御則

厳密線形化可能な非線形システムに対して、局所的に LQ 最適制御則と一致する、大域逆最適制御則を提案した。提案する制御則は、大域的には非線形の逆最適制御則であり、局所的には線形近似系に対する LQ 最適制御則と一致する。提案する制御則は状態に関して滑らかであり、ゲイン余裕 $(1/2, \infty)$ を持つことを明らかにした。提案制御則は、多入出力系に対して適用可能であり、さらに線形近似系に対する LQ 最適制御則から容易に変換可能であるという利点を持つ。提案法の有効性は、磁気浮上系を対象としたコンピュータシミュレーションと実験によって確認した。

10.2 今後の課題

本論文では，第 I 部と第 II 部で二つの制御系設計法を提案したが，これらを統合する必要がある．すなわち，凸入力制約を持つ非線形システムに対して，局所的に LQ 最適制御則と一致する逆最適制御則を設計することが，最も重要な課題である．

また，今回は局所的に LQ 最適制御則と一致するように逆最適制御則を設計したが，局所的に H_∞ 制御則と一致するように制御系設計を行うことで，外乱抑制を考慮することも必要であると考えられる．

本論文では入力アファインな非線形システムのみを制御対象として考えたが，非入力アファインな非線形システムに対して凸入力制約を考慮した制御系設計法を提案することも，理論的な課題としてあげられる．

一方で，提案した制御系設計法を同期電動機等の実システムに適用し，高効率制御を目指すことも今後の重要な課題である．

謝辞

本論文は、著者が奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程在学中に行った研究をまとめたものです。在学中から現在に至るまで、多くの方々にご指導・ご支援をいただきました。ここに、深く感謝の意を表します。

まず、主指導教官としてご指導いただいた、知能システム制御研究室教授杉本謙二先生に厚く御礼申し上げます。会社で働きながらの学位論文執筆ということではなかなか時間を取れない中、先生には休日に論文の添削をしていただいたり、非常に熱心にご指導いただきました。杉本先生にご尽力いただかなければ、本研究をまとめることはできませんでした。本当にありがとうございました。

旧システム制御・管理講座教授の西谷紘一先生には、奈良先端大に在学中の5年間、主指導教員としてご指導・ご鞭撻をいただきました。研究に対するご指導は勿論のこと、研究室での生活全般に渡り、非常に細やかな御配慮をいただきました。先生のご退官前に本研究をまとめることができなかつたのは一つの心残りですが、在学中に先生にご指導いただいたからこそ、今回まとめることができたと感じております。本当にお世話になりました。

生命機能計測学研究室教授 湊小太郎先生には、お忙しい中、博士論文の審査委員を引き受けていただきました。論文に関する貴重なご助言をいただきましたこと、厚く御礼申し上げます。

福岡大学教授 野田賢先生には、化学システム工学という異なった立場から本研究に対するご助言をいただきました。また、在学中は研究だけでなく、就職活動など様々な相談に乗っていただきました。大変お世話になりました。

東京理科大学講師 中村文一先生には、在学中から現在に至るまで、非線形制御理論について丁寧にそして熱心にご指導いただきました。そして、それ以上の情熱で研究に対する考え方や心構えを教えていただきました。なかなか成長しない私を辛抱強く見守って下さったことに、深く感謝いたします。

静岡大学准教授 片山仁志先生には、磁気浮上系の実験装置を使わせていただいたことに加え、大学での研究者・教育者としてのあり方について学ばせていただきました。厚く御礼申し上げます。

奈良高専准教授 小坂洋明先生、東京理科大研究員 中村奈美先生には、本研究

に関するご助言・ご指導をいただきましたことを深く感謝いたします。

また、本研究を進めるにあたり、大変お世話になりました旧システム制御・管理講座の諸先輩方、そして同輩、後輩の皆様には感謝いたします。皆様のおかげで非常に有意義な研究室生活を送ることができました。

本論文をまとめるにあたり、ご理解と多大なるご支援を賜りました、株式会社ダイヘン 溶接メカトロカンパニー メカトロ事業部 技術部 部長の神品泰宏博士、同制御グループ長の水浦重人様に厚く御礼申し上げます。

奈良先端大在学中からの友人である川村雄氏、大堀彰大氏、辰巳雅紀氏には、会うたびに新しい刺激とエネルギーをいただいています。これからも、お互いに切磋琢磨していければと考えています。

長い学生生活を見守ってくれた両親と弟には、感謝の言葉もありません。いつも心配ばかりかけていたと思いますが、どんなときでも温かく励ましてくれたことは非常にありがたかったです。今の自分があるのは、その支えがあったからだと思っています。本当にありがとう。

最後になりますが、在学中から現在に至るまでずっと精神的に支えてくれた山本リサさんに深く感謝します。なかなか会えない中で、ずっと励まし続けてくれたことは、本当に嬉しく、そのおかげで頑張ることができました。

2012年6月
佐藤 康之

参考文献

- [1] Z. Artstein, Stabilization with relaxed control, *Nonlinear Analysis, Theory, Method and Applications*, bf 7, pp. 1163-1173 (1983)
- [2] E. D. Sontag, A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **21**-3, pp. 462-471 (1983)
- [3] E. D. Sontag, A 'universal' construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization, *Systems & Control Letters*, **13**, pp. 117-123 (1989)
- [4] Y. Lin and E. D. Sontag, Control-Lyapunov universal formulas for restricted inputs, *Control-Theory and Advanced Technology*, **10**, pp. 1981-2004 (1995)
- [5] M. Malisoff and E. D. Sontag, Universal formulas for feedback stabilization with respect to Minkowski balls. *Systems & Control Letters* **40**, pp. 247-260 (2000)
- [6] J. Solís-Daun, R. Suárez, and J. Álvarez-Ramírez: Global stabilization of nonlinear systems with inputs subject to magnitude and rate bounds: A parametric optimization approach, *SIAM Journal of Control and Optimization*, **39**-3, pp. 682-706 (2000)
- [7] R. Suárez, J. Solís-Daun, and J. Álvarez-Ramírez: Global robust stabilization of nonlinear systems subject to input constraints, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **12**, pp. 1227-1238 (2002)
- [8] R. Suárez, J. Solís-Daun, and J. Álvarez-Ramírez: Global CLF stabilization for systems with compact convex control value sets, *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3838-3843 (2001)
- [9] J. W. Curtis: CLF-based nonlinear control with polytopic input constraints, *Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2228-2233 (2003)

- [10] 喜種, 中村, 山下, 西谷: 入力制約付き非線形システムに対する制御則設計, 計測自動制御学会論文集, 41-3, pp. 250-258 (2005)
- [11] 喜種, 中村, 山下, 西谷: 入力制約付き非線形システムに対する逆最適制御, 計測自動制御学会論文集, 42-1, pp. 26-34 (2006)
- [12] 中村, 加藤, 中村, 西谷: 入力制約を有する不連続な非線形システムに対する制御 Lyapunov 関数を用いた制御則の設計と制御検証実験, 計測自動制御学会論文集, 43-6, pp. 506-513 (2007)
- [13] P.V. Kokotović and M. Arcaç, Constructive nonlinear control: a historical perspective, *Automatica*, vol. 37, pp.637–662 (2001).
- [14] N. Sakamoto and A.J. van der Shaft, Analytical approximation methods for the stabilizaing solution of the Hamilton-Jacobi equation, *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol. 53, pp. 2335-2350 (2008)
- [15] T. Çimen, State-dependent Riccati equation (SDRE) control: a survey, *Proc. 17th IFAC World Congress*, pp. 3761-3775 (2008)
- [16] K. Ezal, Locally optimal and robust backstepping design, *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol. 45, no. 2, pp. 260-271 (2000)
- [17] A.L.D. Franco, H. Boursès, E.R. De Pieri and H. Guillard, Robust nonlinear control associating robust feedback linearization and H_∞ control, *IEEE Trans. on Auto. Contr.* vol. 51, no. 7, pp. 1200-1207 (2006)
- [18] Yasuyuki Satoh, Hisakazu Nakamura, Hitoshi Katayama, and Hirokazu Nishitani, Adaptive inverse optimal control of a magnetic levitation system”, in *Adaptive Control*, pp. 307-322, In-Tech, Vienna (2009)
- [19] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3rd edition, Springer, London (1995)
- [20] E.D. Sontag, *Mathematical Control Theory*, Springer, New York (1991)

- [21] E. D. Sontag, Control-Lyapunov functions, In Open Problem in Mathematical Systems and Control Theory, V. D. Blondel, E.D. Sontag, M. Vidyasagar, and J. C. Willems (eds.), pp. 211-216, Springer (1998)
- [22] A. Bacciotti and L. Rosier, *Lyapunov Function and Stability in Control Theory*, 2nd edition, Springer, Berlin (2005)
- [23] W.M. Haddad, V. Chellaboina, *Nonlinear Dynamical Systems and Control, A Lyapunov-Based Approach*, Princeton University Press (2008)
- [24] R. A. Freeman, P. V. Kokotović, *Robust Nonlinear Control Design - State Space and Lyapunov Techniques -*. Birkhäuser: Boston (1996)
- [25] R. Sepulchre, M. Janković, P. Kokotović, *Constructive Nonlinear Control*. Springer, London, (1997)
- [26] H. K. Khalil: *Nonlinear Systems*, 3rd edition, Prentice Hall (2002)
- [27] 大塚敏之, 非線形最適制御入門, コロナ社 (2011)
- [28] F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer (1998)
- [29] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge University Press (2004)
- [30] J. M. Borwein, A. S. Lewis, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization: Theory and Examples*. Springer: New York, 2000.
- [31] C. Berge, *Topological Spaces*. Oliver and Boyd: Edinburgh (1963)
- [32] N. Bourbaki, *General Topology: Chapters 1-4*. Springer: Berlin, (1989)
- [33] 吉川恒夫, ロボット制御基礎論, コロナ社 (1988)
- [34] 福島雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店 (2001)

[35] 加藤十吉, 集合と位相, 朝倉書店 (1982)

付録

A. 研究業績

学術論文

1. Yasuyuki Sato, Hisakazu Nakamura, Nami Nakamura, Hitoshi Katayama, Hirokazu Nishitani, Universal control formula for feedback linearizable systems with local LQ performance, SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration, Vol. 4, No. 1, pp. 22-28 (2011)

【第7, 8章に関連】

著書(分担)

1. Yasuyuki Satoh, Hisakazu Nakamura, Hitoshi Katayama, Hirokazu Nishitani, Adaptive Inverse Optimal Control of a Magnetic Levitation System, in Adaptive Control, Kwanho You Ed., IN-TECH, Vienna, pp.307-322 (2009)

国際会議(査読有り)

1. Hisakazu Nakamura, Yasuyuki Satoh, Nami Nakamura, Hitoshi Katayama, Hirokazu Nishitani, Universal control formula for feedback linearizable systems with local LQ performance, Proceedings of the European Control Conference 2009 (ECC 2009), pp.1155-1160 (2009)

【第7, 8章に関連】

2. Yasuyuki Satoh, Hisakazu Nakamura, Nami Nakamura, Hitoshi Katayama, Hirokazu Nishitani, Robust Adaptive Control of Nonlinear Systems with Convex Input Constraints: Case Study on the Magnetic Levitation System, Proceedings of the ICROS-SICE International Joint Conference (2009)

3. Yasuyuki Satoh, Hisakazu Nakamura, Nami Nakamura, Hitoshi Katayama, Hirokazu Nishitani, Control Formula for Nonlinear Systems subject to Convex Input Constraints using Control Lyapunov Functions, Proceedings of

the 47th IEEE Conference on Decision and Control, pp.2512-2519 (2008)

【第 4, 5 章に関連】

4. Yasuyuki Satoh, Hisakazu Nakamura, Hitoshi Katayama and Hirokazu Nishitani, Robust control of nonlinear systems with convex input constraints and its application to the magnetic levitation system, Proceedings of the 34th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society, pp.349-354 (2008)

【第 4, 5 章に関連】

5. Yasuyuki Satoh, Hisakazu Nakamura, Hitoshi Katayama, and Hirokazu Nishitani, Robust nonlinear adaptive control for the magnetic levitation system, The 15th mediterranean conference on control and automation, T31-013 (2007)

国内発表

1. 中村文一, 佐藤康之, 中村奈美, 西谷紘一, フィードバック線形化可能な非線形システムに対する局所 LQ 性を有する大域的逆最適制御, 第 37 回制御理論シンポジウム, pp.387-392 (2008)
2. 佐藤康之, 中村文一, 片山仁志, 西谷紘一, 凸入力制約を持つシステムに対する非線形ロバスト適応制御, 第 37 回制御理論シンポジウム, pp.149-154 (2008)
3. 佐藤康之, 中村文一, 片山仁志, 西谷紘一, 凸入力制約を持つ非線形システムのロバスト制御, 第 8 回 計測自動制御学会 制御部門大会, 072-3-4, (2008)
4. 佐藤康之, 中村文一, 西谷紘一: 非線形最適化による入力制約下での CLF 最小化入力の設計, 第 36 回制御理論シンポジウム, pp.67-72 (2007)
5. 佐藤康之, 中村文一, 片山仁志, 西谷紘一, 磁気浮上系に対する非線形ロバスト適応制御, 第 7 回 計測自動制御学会 制御部門大会, 65-4-3 (2007)

6. 佐藤康之, 加藤健一, 中村文一, 片山仁志, 西谷紘一, 磁気浮上系に対する入力制約を考慮した逆最適制御, 計測自動制御学会関西支部 若手研究発表会 2007, pp.67-70 (2007)

B. 磁気浮上系の局所制御 Lyapunov 関数

磁気浮上系 (135) に対して制御 Lyapunov 関数を用いた制御系設計を行うため、磁気浮上系の局所制御 Lyapunov 関数を導出する。以下では、バックステッピング法 [26] を用いて磁気浮上系 (135) の局所制御 Lyapunov 関数を導出する。まずシステム (135) のサブシステムとして、次のスカラシステムを考える。

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (227)$$

ここで、仮想的に x_2 をフィードバック入力と考え、 $x_2 = \phi(x_1)$ とおく。そして、次のように $\phi(x_1)$ を設計することを考える。

$$x_2 = \phi(x_1) = -dx_1 \quad (228)$$

ただし、 $d > 0$ は定数とする。このとき、サブシステム (227) の閉ループ系は

$$\dot{x}_1 = -dx_1 \quad (229)$$

となり、Lyapunov 関数として

$$V_1(x_1) = x_1^2/2 \quad (230)$$

を考えれば、

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1 \dot{x}_1 = -dx_1^2 < 0, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (231)$$

となり、サブシステム (227) の原点 $x_1 = 0$ は漸近安定となる。次に、以下の変数変換を行う。

$$z = x_2 - \phi(x_1) \quad (232)$$

(232) 式を用いてシステム (135) を書き換えると次のようになる。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -dx_1 + z \\ \dot{z} = \frac{d}{dt}(x_2 - \phi(x_1)) = -\mu(z - rx_1) - g_0 - \frac{u}{ma(-x_1 - \xi^* + b)^4} - d^2x_1 + dz \end{cases} \quad (233)$$

ここで、システム (233) に対する Lyapunov 関数を、(230) 式の $V_1(x_1)$ を用いて次のように構成する。

$$V(x) = V_1(x_1) + \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z^2 \quad (234)$$

この $V(x)$ がシステム (233) の局所制御 Lyapunov 関数となることは、次のように示せる。(234) 式の時間微分を考えると、

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, u) &= x_1(-dx_1 + z) + z\dot{z} \\ &= -dx_1^2 - \mu z^2 + z \left\{ (1 + d - d^2)x_1 + dz \right. \\ &\quad \left. -g_0 - \frac{u}{ma(-x_1 - \xi^* + b)^4} \right\} \end{aligned} \quad (235)$$

となる。ここで入力 $u(x)$ を

$$u(x) = ma(-x_1 - \xi^* + b)^4 \{-g_0 + (1 + d - d^2)x_1 + 2dz\} \quad (236)$$

と選べば次式が成立し、 $V(x)$ は入力 (236) を用いたときの閉ループ系の Lyapunov 関数である。

$$\dot{V}(x, u) = -dx_1^2 - (\mu + r)z^2 < 0, \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid |u(x)| < 5\} \quad (237)$$

よって、 $V(x)$ はシステム (135) の局所制御 Lyapunov 関数である。本論文では、(234) を書き換えた、次式の $V(x)$ を磁気浮上系の局所制御 Lyapunov 関数として用いている。

$$V(x) = \frac{1}{2}(d^2 + 1)x_1^2 + dx_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (238)$$