

NAIST-IS-DD0861014

博士論文

プレフィルタ統合型フィードバック誤差学習制御
に関する研究

野口 慎

2011年2月2日

奈良先端科学技術大学院大学
情報科学研究科 情報システム学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に
博士(工学) 授与の要件として提出した博士論文である。

野口 慎

審査委員：

杉本 謙二 教授 (主指導教員)

小笠原 司 教授 (副指導教員)

平田 健太郎 准教授 (副指導教員)

プレフィルタ統合型フィードバック誤差学習制御 に関する研究*

野口 慎

内容梗概

フィードバック誤差学習 (FEL; Feedback Error Learning) は、生体の運動制御における学習機構であり、川人らによって提案された。生体が運動を行う場合、感覚器 (センサ) から受け取った情報をもとに、脳で判断・指令を行い、筋骨格系を駆動する。しかしながら、感覚器から脳を介し筋肉に至る神経のフィードバック (FB) ループにおいては、比較的大きなむだ時間が存在しており、所望の運動特性の実現は FB 制御のみでは困難である。そのため、生体にはフィードバック誤差信号をもとに脳内に逆モデルを学習・獲得し、フィードフォワード (FF) 制御を行う機能が備わっていると考えられている。

近年、この FEL の仕組みは、線形制御理論の分野に導入され、活発に研究が進められている。これらの研究では、川人らとは異なり、逆モデルを線形制御器によって構成している。まず、Miyamura らがはじめて FEL を線形制御器で実現し、その安定性を正実性の仮定に基づいて保証した。次に、Muramatsu らがその仮定を除去した。この 2 つの先行研究が、FEL を線形制御理論の分野で扱った、最も重要かつ先駆的な研究である。

FEL では、厳密にプロパなプラントを制御する場合、プラントの出力と目標値信号が同様の遅れを持つようにプレフィルタ (prefilter) を利用しなければならなかった。そのため、従来法ではプラントの逆モデルのみならず、プレフィルタの既知パラメータをも一緒に学習してしまう冗長性があった。そこで、本論文で

*奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報システム学専攻 博士論文, NAIST-IS-DD0861014, 2011 年 2 月 2 日.

は、第1に、この冗長性を排除するために、Miyamuraらの手法をもとに、プレフィルタの状態変数をFF制御信号にも利用する、プレフィルタ統合型FELを提案する。これにより、逆システムの未知パラメータのみを学習できるようになる。第2に、このプレフィルタ統合型FELを改良し、FF制御器の構成を少し変更した後、Muramatsuらの発想をもとに、正実性によらない学習則を導く。この学習則では、未知パラメータに線形な誤差モデル(追従誤差ではなく新しく定義された誤差)を用いているため、可変ゲイン型をも利用可能になる(これにより、学習速度の点で大変有利となる)。第3に、FELの2自由度構造の複雑さをはじめ、正実性によらない学習則の導出に伴う副作用で閉ループ系に時変ブロックが挿入されてしまうという問題点等を解決するため、仮想FB誤差学習(VFEL; Virtual FEL)を提案する。

キーワード

フィードバック誤差学習, 厳密にプロパなプラント, 多入出力系, フィードフォワード, プレフィルタ統合型学習則, 仮想フィードバック誤差学習

Studies on Feedback Error Learning Control of Prefilter-Integration-Type *

Makoto Noguchi

Abstract

Feedback Error Learning (FEL) is a biological motion learning mechanism which has been originally proposed by Kawato et al.. When a biological motion is performed, a musculoskeletal system is driven by command signals transmitted from brain, after making judgmental decisions based on the information received from biological sensors. However, it is difficult to realize desired motion characteristics by only feedback (FB) control. Because the neural FB path, from biological sensors to muscles, through brain, has relatively long time delay. Therefore, it is considered that a function of feedforward (FF) control is embedded into biological body. The FF control is performed acquiring an inverse model into brain based on learning using FB error.

In recent years, application of FEL schemes to linear control theory has been active. The researches are different from the scheme of Kawato et al. and an inverse system is constructed by linear controller. Firstly, Miyamura et al. constructed FEL by linear controller and established its stability based on an assumption of Positive Realness (PR). Secondly, Muramatsu et al. eliminated the assumption. The above two works are the most important and pioneering one for FEL in the linear control theory.

Conventional FEL schemes apply a prefilter to the reference signal, in order to compensate the delay of the plant. In this case, however, the prefilter parameters,

*Doctoral Dissertation, Department of Information Systems, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, NAIST-IS-DD0861014, February 2, 2011.

which is known, have to be learned as well as the plant parameters. In this thesis, improved FEL schemes are studied.

In the first part, prefilter-integration-type FEL(PIT-FEL) is proposed. The scheme can improve the above redundancy by using the prefilter's state variables as well as original FF signals. Therefore, only unknown parameters of an inverse system can be learned.

In the second part, improved PIT-FEL is proposed. After improving the FF controller, based on an idea of Muramatsu et al., a learning law without recourse to PR is derived. Because the learning law utilizes error model that is linear to unknown parameters (which is newly defined in stead of original tracking error of closed loop), designers can use not only fixed-gain-type learning law but also variable-gain-type one (Because variable-gain-type can be also used, PIT-FEL has an advantage in terms of learning speed.) .

In the third part, Virtual FEL(VFEL) is proposed. The above scheme has a drawback that a time variant system is inserted into the closed loop system as a side effect from eliminating an assumption of PR for stability. To improve both complexity of two-degree-of-freedom (2DOF) structure and the above drawback, FF controller is connected in front of the closed loop system by means of cascade connection.

Keywords:

Feedback Error Learning (FEL), Strictly Proper Plant, Multi-input Multi-output (MIMO) System, Feedforward Control, Prefilter-Integration-Type Learning Law, Virtual FEL (VFEL)

目次

1. はじめに	1
1.1 生体の運動学習における階層制御モデル	1
1.2 フィードバック誤差学習	3
1.3 線形制御理論によるフィードバック誤差学習	5
1.4 その他の関連研究	8
1.5 研究目的・本論文の構成	10
2. 予備的事項	13
3. プレフィルタ統合型フィードバック誤差学習	16
3.1 本章の概要	16
3.2 提案法	17
3.2.1 準備	17
3.2.2 提案法のパラメータ構成と真値	17
3.2.3 学習則	21
3.3 シミュレーション1 (簡単な例)	22
3.4 シミュレーション2 (実問題を想定した例)	27
3.4.1 模型自動車のモデル (SISO)	27
3.4.2 模型自動車の制御	28
3.4.3 連結型台車のモデル (MIMO)	33
3.4.4 連結型台車の制御	35
3.5 シミュレーション3 (乱数による探索)	38
3.6 本章のまとめ	44
4. プレフィルタ統合型フィードバック誤差学習の改善	45
4.1 本章の概要	45
4.2 提案法	46
4.2.1 準備	46
4.2.2 FF 制御器のパラメータ構成と真値	47

4.2.3	学習則	50
4.3	安定性解析	53
4.3.1	固定ゲイン型の学習則の安定性	54
4.3.2	可変ゲイン型の学習則の安定性	55
4.4	シミュレーション1(簡単な例)	58
4.4.1	SISO プラント	58
4.4.2	MIMO プラント1(安定なプラント)	63
4.4.3	MIMO プラント2(不安定なプラント)	67
4.5	シミュレーション2(実問題を想定した例)	68
4.5.1	模型自動車の制御	68
4.5.2	連結型台車の制御	75
4.6	シミュレーション3(乱数による探索)	78
4.7	本章のまとめ	83
5.	仮想フィードバック誤差学習	85
5.1	本章の概要	85
5.2	準備	86
5.2.1	従来 of FEL と問題点	86
5.2.2	問題の定式化	88
5.3	提案法	91
5.3.1	プレフィルタ統合型 FF 制御器の構成と真値	91
5.3.2	学習則	93
5.4	安定性解析	96
5.4.1	固定ゲイン型の学習則の安定性	96
5.4.2	可変ゲイン型の学習則の安定性	97
5.5	シミュレーション1(簡単な例)	98
5.5.1	SISO プラント	98
5.5.2	MIMO プラント	101
5.6	シミュレーション2(実問題を想定した例)	105
5.6.1	模型自動車の制御	105

5.6.2	連結型台車の制御	110
5.7	シミュレーション 3 (乱数による探索)	114
5.8	本章のまとめ	119
6.	おわりに	121
6.1	考察	121
6.2	まとめ	124
7.	今後の課題	125
7.1	理論的な課題	125
7.2	技術的な課題	126
	謝辞	127
	参考文献	128
	付録	133
	A. PE (Persistently Exciting) Condition[17]	133
	B. 指数安定性定理 ([14], pp. 73)	133
	C. 行列微分方程式の指数的収束 [12]	133
	D. 学習パラメータの真値 F_0, H_0 の導出	135
	E. 補題 5.2 の証明 [52]	136
	F. 補題 5.3 の証明 [52]	136

目 次

1	生体の運動学習における階層制御モデル [1, 4]	2
2	Kawato らが提案した FEL [1, 4]	4
3	Miyamura らによる FEL の構成 [7]	5
4	Muramatsu らによる FEL の構成 [8]	7
5	本論文の流れ	12
6	従来法による MIMO-FEL の構成	13
7	本章で提案する FEL の構成	20
8	目標軌道追従特性 (FEL なし)	22
9	従来法による目標軌道追従特性	23
10	従来法による目標軌道追従誤差 ($\alpha = 0.5$)	23
11	提案法による目標軌道追従特性	23
12	提案法による目標軌道追従誤差 ($\alpha = 0.5$)	24
13	従来法による目標軌道追従誤差 ($\alpha = 3.0$)	24
14	提案法による目標軌道追従誤差 ($\alpha = 3.0$)	24
15	提案法による目標軌道追従特性 ($\alpha = 3.0$)	25
16	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 ($\alpha = 3.0$)	25
17	出力 y の導関数をフィードバックに用いた FEL の構成	26
18	図 17 の構成における目標軌道追従誤差	26
19	模型自動車のモデルとその座標系	27
20	目標軌道追従特性 (FEL なし)	29
21	従来法による目標軌道追従誤差	30
22	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展	30
23	$x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態)	31
24	$x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡 (学習の定常状態)	31
25	模型自動車の絶対角度 $x_0(t)$	31
26	制御入力 $u(t)$	31
27	提案法による目標軌道追従誤差	32
28	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展	32

29	$x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態)	33
30	模型自動車の絶対角度 $x_0(t)$	33
31	制御入力 $u(t)$	33
32	連結型台車のモデル	33
33	目標軌道追従特性 (FEL なし)	36
34	従来法による目標軌道追従誤差	36
35	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展	37
36	提案法による目標軌道追従誤差	37
37	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展	38
38	本章で提案する MIMO-FEL の構成	51
39	提案する MIMO-FEL の構成 (等価変換されたブロック図)	54
40	伝達関数 $M(s)$ のナイキスト軌跡	59
41	従来法 (野口ら [51]) による目標軌道追従誤差	60
42	従来法 (Muramatsu ら [8]) による目標軌道追従誤差	60
43	提案法による目標軌道追従誤差 (固定ゲイン型)	60
44	提案法による目標軌道追従誤差 (可変ゲイン型)	61
45	提案法による目標軌道追従特性 (可変ゲイン型)	61
46	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (固定ゲイン型)	62
47	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)	62
48	従来法 (Basel ら [9]) による目標軌道追従誤差	64
49	提案法による目標軌道追従誤差 (固定ゲイン型)	64
50	提案法による目標軌道追従誤差 (可変ゲイン型)	65
51	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (固定ゲイン型)	66
52	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)	66
53	提案法による目標軌道追従誤差 (可変ゲイン型)	67
54	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)	68
55	目標軌道追従特性 (FEL なし)	69
56	従来法による目標軌道追従誤差	70
57	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展	70

58	$x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態)	71
59	$x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡 (学習の定常状態)	71
60	模型自動車の絶対角度 $x_0(t)$	71
61	制御入力 $u(t)$	71
62	提案法による目標軌道追従誤差 (固定ゲイン型)	72
63	提案法による目標軌道追従誤差 (可変ゲイン型)	72
64	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (固定ゲイン型)	72
65	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)	73
66	模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態, 固定ゲイン型)	73
67	模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態, 可変ゲイン型)	73
68	$x_0(t)$ (固定ゲイン型)	74
69	$u(t)$ (固定ゲイン型)	74
70	$x_0(t)$ (可変ゲイン型)	74
71	$u(t)$ (可変ゲイン型)	74
72	目標軌道追従特性 (FEL なし)	76
73	提案法による目標軌道追従誤差 (固定ゲイン型)	76
74	提案法による目標軌道追従誤差 (可変ゲイン型)	77
75	提案法による目標軌道追従特性 (可変ゲイン型)	77
76	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (固定ゲイン型)	77
77	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)	78
78	従来法による MIMO-FEL の構成	87
79	従来法による FEL の構成 (野口ら [52])	88
80	提案する MIMO-VFEL の構成	89
81	従来法による目標軌道追従特性	99
82	従来の FEL に基づく試験用 FEL 制御系 (Block A と Block B から構成)	99
83	試験用 FEL 制御系の Block B における目標軌道追従特性	100
84	VFEL による目標軌道追従誤差 (固定ゲイン型)	101
85	従来法による目標軌道追従特性	103

86	試験用 FEL 制御系の Block B における目標軌道追従特性	103
87	MIMO-VFEL による目標軌道追従特性 (可変ゲイン型)	104
88	MIMO-VFEL による学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)	105
89	目標軌道追従特性 (FEL なし)	106
90	提案法による目標軌道追従誤差 (固定ゲイン型)	107
91	提案法による目標軌道追従誤差 (可変ゲイン型)	107
92	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (固定ゲイン型)	107
93	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)	108
94	模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態, 固定ゲイン型)	108
95	模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態, 可変ゲイン型)	108
96	模型自動車の走行軌跡 (学習の定常状態)	109
97	$x_0(t)$ (固定ゲイン型)	109
98	$u(t)$ (固定ゲイン型)	109
99	$x_0(t)$ (可変ゲイン型)	109
100	$u(t)$ (可変ゲイン型)	109
101	目標軌道追従特性 (FEL なし)	111
102	提案法による目標軌道追従誤差 (固定ゲイン型)	112
103	提案法による目標軌道追従誤差 (可変ゲイン型)	112
104	提案法による目標軌道追従特性 (可変ゲイン型)	113
105	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (固定ゲイン型)	113
106	学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)	114

表 目 次

1	無作為に抽出したプラント (No.1 ~ 25)	39
2	無作為に抽出したプラント (No.26 ~ 50)	40
3	プラント (No.1 ~ 25) に対する評価	41
4	プラント (No.26 ~ 50) に対する評価	42
5	再設定する制御パラメータ	43
6	無作為に抽出したプラント (No.1 ~ 25)	79
7	無作為に抽出したプラント (No.26 ~ 50)	80
8	プラント (No.1 ~ 25) に対する評価	81
9	プラント (No.26 ~ 50) に対する評価	82
10	無作為に抽出したプラント (No.1 ~ 25)	115
11	無作為に抽出したプラント (No.26 ~ 50)	116
12	プラント (No.1 ~ 25) に対する評価	117
13	プラント (No.26 ~ 50) に対する評価	118

数式記号について

本論文では, m 次の単位行列は I_m と表すが, 文脈から明らかなき場合は次数を明記しないこともある. 多項式 $\ell(s)$ が Hurwitz とは, その零点が安定領域 $C_- = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) < 0\}$ にのみ存在するときをいう. 不定元 s の多項式 $\ell(s) = s^\rho + a_1 s^{\rho-1} + \dots + a_\rho$ に対して

$$\ell(A) = A^\rho + a_1 A^{\rho-1} + \dots + a_\rho I$$

と定める [39, 40].

また, 行列 $A = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$, $B = (b_{ij})_{i=1, j=1}^{p, q}$ の Kronecker 積を

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

で表す.

本論文で提案する学習型 FF 制御器の実際の構成は時変系となるが, 各時刻における動特性を表すために伝達行列など時不変系の用語を流用する. 例えば, 伝達行列による入出力関係を表記するために, $y(t) = P(s)u(t)$ のような記法 [9] を流用する.

1. はじめに

本論文では，生体の運動学習機構であるフィードバック誤差学習を，線形制御理論で扱った研究成果を報告する．導入部分として，本章では，まず，川人らが提案した生体（例えば，我々人間）の運動学習における階層制御モデルについて説明する．次に，その中でも，川人らが特に注目し，計算論的神経科学のアプローチで研究を展開した，運動系の逆システムを脳が学習する機構，すなわちフィードバック誤差学習について説明する．さらに，このフィードバック誤差学習を線形制御理論で扱った先駆的な研究（Miyamura らおよび Muramatsu らの研究）について簡単に説明する．基礎的事項を述べた上で，制御理論に基づいたフィードバック誤差学習のその他の関連研究について概観し，本研究の目的について述べる．

1.1 生体の運動学習における階層制御モデル

生体の運動学習における階層制御モデルについて，文献 [1, 2, 3, 4] をもとに説明する．小脳 (Cerebellum) には，運動の意図 (Idea for motion)，すなわち目標値 (Desired trajectory) とその出力である運動パターン (Movement pattern) との誤差を補正するための機能が備わっている．この機能を利用し，小脳は学習によって外界の内部モデルを形成・獲得しているものと考えられる．この内部モデルが対象や外界を忠実に表現しているならば，オープンループの形で，運動制御を達成できる．これは，ロボット工学における逆動力学モデルの例からも良く知られた，フィードフォワード (FF) 制御のことである．

さて，川人らは，小脳機能に関するこれまでの研究成果をもとに，図 1 に示すような，生体の運動学習における階層制御モデルを提案した [1, 4]．この図は，生体における随意運動¹の制御機能の中で，運動の企画とプログラムに関する部分（連合野，運動前野，補足運動野，大脳基底核，小脳外側部を中心とする上位部）も一部含むが，主として運動の遂行と制御に関する部分（運動野，小脳中間部，脊髄を中心とする下位部）を取り上げている．以下，信号の流れをもとに，図 1

¹随意運動とは，大脳皮質など高次神経系が関与する運動のことであり，自動運動とは区別される [5]．

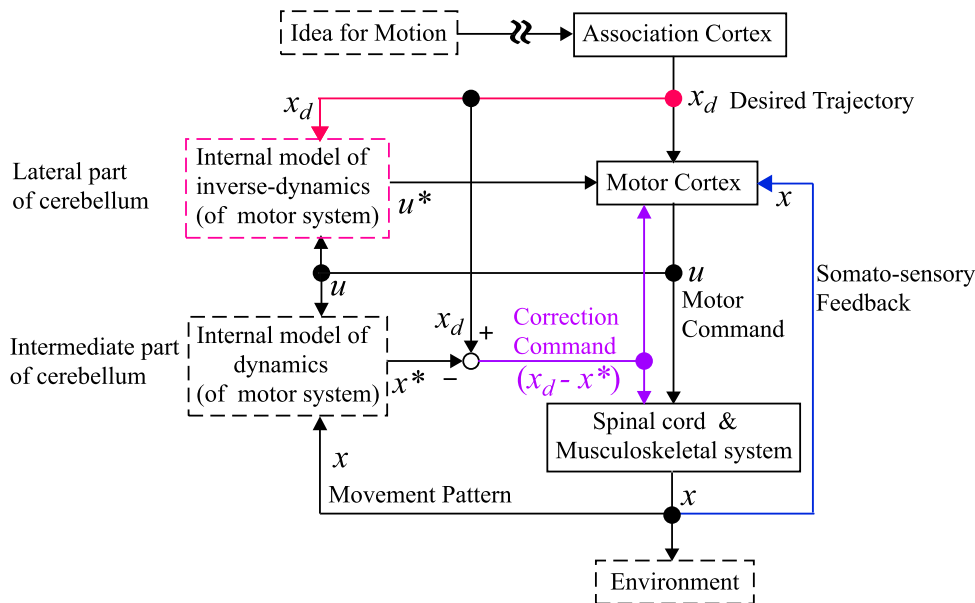


図 1 生体の運動学習における階層制御モデル [1, 4]

について簡単に説明する．運動のための望ましい軌道 (x_d) は連合野 (Association cortex) で生成され，運動野 (Motor cortex) に送られる．運動野は，筋への運動指令 (u) を出力し，脊髄 (Spinal cord) を介して筋骨格系 (Musculoskeletal system) を駆動する．このとき，環境 (Environment) との相互作用のもとで出力された運動パターン (x) は，体性感覚フィードバック (Somato-sensory FB) によって感覚野を経由し，運動野に送られる．したがって，誤差 ($x_d - x$) をもとにフィードバック (FB) 制御が行われる．しかしながら，感覚器 (センサ) から脳を介して筋肉に至る神経の FB ループにおいては，比較的大きなむだ時間が存在しており，遅い動作しか実現できない．例えば，大脳皮質を介した FB ループでは数十ミリ秒以上，特に視覚情報を扱うループでは少なくとも 150 ミリ秒以上の時間遅れがそれぞれ存在すると言われている [2, 3]．このことから，単純な FB 制御のみでは，所望の運動特性を完全に実現することは困難である．そこで，高性能な運動特性を実現するために，生体には学習機構が備わっていると考えられている．運動制御に用いられるこの学習機構 (内部モデル (Internal model)) は，冒頭で既に述べているが，脳科学の研究により小脳に存在し，順システム (Internal model of

dynamics of motor system) と逆システム (Internal model of inverse-dynamics of motor system) の 2 種類があるものと考えられている。以下、2 種類のシステムについて簡単に説明する。

小脳中間部 (Intermediate part of cerebellum) は、末梢からの感覚 FB 信号 (x) と運動野からの信号 (u) の両方を受け取っている。これによって、小脳中間部が運動系の順システム内部モデル ($u \rightarrow x$ のモデル) を学習によって形成・獲得するものと考えられている。この内部モデルは運動指令 (u) に基づき予測運動パターン (x^*) を計算する。ここで、予測誤差 ($x_d - x^*$) は脊髄の運動系と運動野の両方へ送られ、運動指令 (u) の修正に利用される。

一方、小脳外側部 (Lateral part of cerebellum) には実際の運動パターン (x) を直接送るための FB ルートは存在しない。この部分では、望ましい軌道 (x_d) と運動指令 (u) が監視され、運動系の逆システム内部モデル ($x_d \rightarrow u^*$ のモデル) を学習によって形成・獲得するものと考えられている。この内部モデルは、運動野を含めた、他の領域で行われている処理全体をモデル化したものであり、外界のモデルではない。

学習が進行すれば、大脳 - 小脳連関により、連合野からの入力 x_d と逆システム内部モデルだけで $u = u^*$ を出力できるようになる。したがって、小脳から運動野へ多くの制御情報が送られるようになり、逆システム内部モデルの出力 u^* だけで、運動系の高性能な制御が可能になる。これが FF 制御とみなせる制御機構である。

1.2 フィードバック誤差学習

前述の 2 種類の学習機構 (内部モデル) の中で、川入らは、特に逆システム内部モデルに注目し、計算論的神経科学のアプローチによる研究を展開した。この逆システムを学習する機構が、Kawato ら [4] によって提案されたフィードバック誤差学習である。以下、この学習機構について文献 [1, 2, 3, 4] をもとに説明する。

例えば、2 自由度構成のもとでロボット・アーム (制御対象) の制御を行う場合を考えよう。まず、FB ループで制御対象の安定化を行った上で、制御対象の逆動力学内部モデルを FF 制御器として配置する。これによって、目標軌道に沿っ

てマニピュレータを高性能に制御するための予見的な制御入力（トルク）を生成可能である．しかしながら，制御対象の精密な逆システム内部モデルが必要となる問題があった．

そこで，Kawato ら [4] は，シナプス可塑性²の学習則を利用して，この逆システム内部モデルを適応的に形成・獲得できるアルゴリズムを提案している．この手法は，図 2 における FB 誤差信号 $\tau_f(t)$ を利用していることから，フィードバック誤差学習（FEL; Feedback Error Learning）と呼ばれている．また，FB 誤差信号 $\tau_f(t)$ を学習に利用することから，教師信号を外部から特別に与えることなく運動学習を行える．すなわち，以下で説明するように，実質的に，教師なし学習とみなせ，その点で非常に優れていると言える．図 2 は Kawato ら [4] によって提

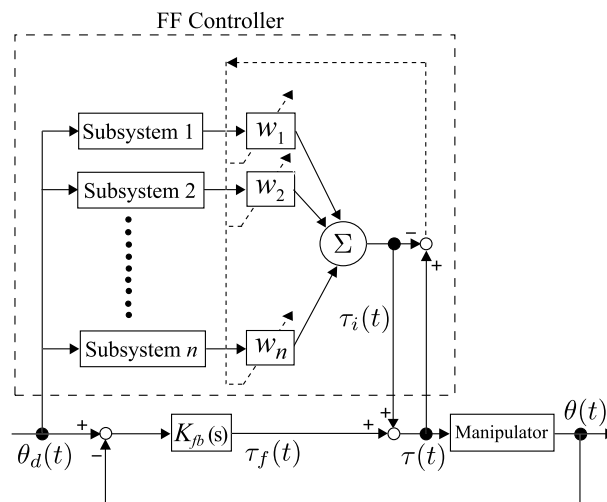


図 2 Kawato らが提案した FEL[1, 4]

案された，適応フィルタ型ニューラルネットによって逆システムを生成する FEL の構成を示している．点線で囲まれた部分が逆動力学内部モデルを表す FF 制御器である．この適応フィルタ型ニューラルネットは， n 個のサブシステムとシナプス荷重 $w_i(t)$, ($i = 1, \dots, n$) から構成されている．まず，全てのサブシステムに対して同じ目標軌道 $\theta_d(t)$ を入力する．次に，各サブシステムの出力信号 $x_i(t)$ に対して，各シナプス荷重 $w_i(t)$ を掛け，それら全ての和 $\tau_i(t) = \sum_{i=1}^n w_i(t)x_i(t)$ を

²シナプス可塑性とは，シナプス結合の可変性のことである [6]．

取り出す．これをニューラルネットの最終的な出力信号として，FF 制御へ利用する．ただし，シナプス荷重 w_i は，学習方程式

$$c \left(\frac{d}{dt} w_i(t) \right) = x_i(t) (\tau(t) - \tau_i(t))$$

によって修正され， $(\tau(t) - \tau_i(t)) \rightarrow \min$ となる．ここに， c はニューロンの時定数である．また，各サブシステムには，学習したい逆動力学内部モデルを表現できるようにいくつかの非線形関数等を設定してやらなければならない．サブシステムとして何を設定するかによって，学習システムの能力は決定される．さて，図 2 の構成では，逆動力学内部モデルを学習するための内部的教師信号として $\tau(t)$ を見かけ上利用し，誤差信号 $(\tau(t) - \tau_i(t))$ をもとに，上記学習方程式で w_i を修正している．しかしながら， $\tau(t) = \tau_f(t) + \tau_i(t)$ の関係より， $\tau(t) - \tau_i(t) = \tau_f(t)$ となり，これはまさに FB 誤差信号である．そのため，FEL は，実質的には教師なし学習であると言える．

1.3 線形制御理論によるフィードバック誤差学習

前述の Kawato ら [4] の研究においては，FEL を実現するために，FF 制御器をニューラルネットで構成していた．その一方，Miyamura ら [7] や Muramatsu ら [8] は，FF 制御器を線形制御器によって実現する FEL を提案した．まずは，Miyamura らの FEL について概説しよう．Miyamura らによる FEL の構成を図 3 に示す．ただし， $W(s) = L(s)^{-1}$ であり， $L(s)$ は Hurwitz 多項式である．FF 制

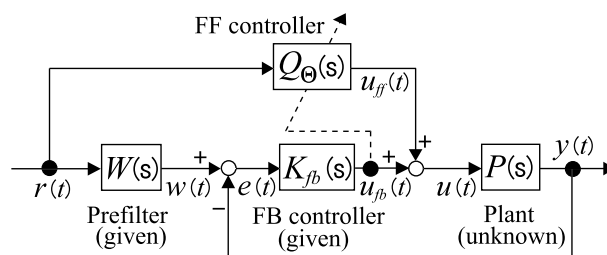


図 3 Miyamura らによる FEL の構成 [7]

御器 $Q_{\Theta}(s)$ は以下のフィルタで構成できる .

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}\xi_1(t) &= F\xi_1(t) + gr(t) \\ \frac{d}{dt}\xi_2(t) &= F\xi_2(t) + g\bar{u}(t) \\ u_{ff}(t) &= \theta(t)^T \xi_w(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} c(t)^T & d(t)^T & k(t) \end{bmatrix}^T, \quad \xi_w(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

ただし, F と g を可制御正準形にとり, F は安定な行列であるとする . また, $\theta(t), c(t), d(t)$ は縦ベクトルであり, $\xi_2(t)$ は $\bar{u}(t) = u_{ff}(t)$ によって駆動されるものとする (ここでは, (1) 式を MIMO-FEL[9] の構成にあわせるため, $\bar{u}(t) = u_{ff}(t)$ としている) .

いま, $u_{ff}(t)$ を理想的な $u_0(t)$ に近づけるために, 学習パラメータ $\theta(t)$ の調整則を導く (ただし, $u_0(t) \simeq u(t)$ を仮定している) . この学習則は, 誤差関数

$$V = \frac{1}{2}(u_{ff} - u_0)^T(u_{ff} - u_0) \quad (3)$$

に対して勾配法を適用することによって導かれる . このとき, 固定ゲイン型の学習則は,

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\partial u_{ff}}{\partial \theta} \{u_{ff} - u_0\} = -\alpha \xi_w(t) \{u_{ff}(t) - u(t)\} = \alpha \xi_w(t) u_{fb}(t) \quad (4)$$

と求まる . $\alpha > 0$ は学習率 (固定ゲイン) であり, $u_{fb}(t)$ は学習に用いられる FB 誤差信号である .

ここで, 学習パラメータの誤差

$$\bar{\psi}(t) := \theta(t) - \theta_0 \quad (5)$$

を定義すると, $\bar{\psi}(t)$ に関する以下のベクトル微分方程式

$$\frac{d\bar{\psi}(t)}{dt} = -\xi_w(t)L(s)\xi_w(t)^T\bar{\psi}(t) \quad (6)$$

を得ることができる . Miyamura らの手法では, 上式の $L(s)$ が強正実 [41, 42, 43] であることが, 学習パラメータの収束を保証するための十分条件である . このよ

うに，Miyamura らの手法は，正実性を仮定して学習則の安定性を保証しており，線形制御理論で FEL を扱った最初の研究成果として大変重要である．しかしながら，正実性が満たされる場合は限られており，実用的な視点からは，この手法が有用とは言い難い．

そこで，Muramatsu ら [8] は，正実性の仮定を排除する手法を提案した．Muramatsu らによる FEL の構成を図 4 に示す．以下の説明でわかるが，Muramatsu ら

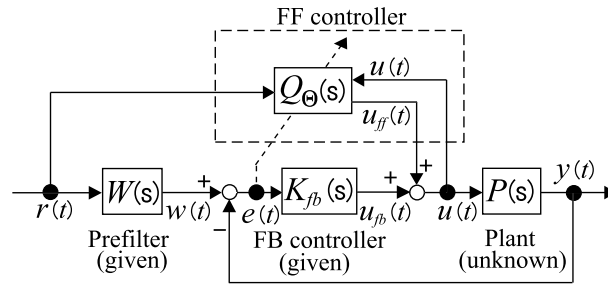


図 4 Muramatsu らによる FEL の構成 [8]

の手法は Miyamura らの手法とは異なり，近似によらず ($u_0 \simeq u$ を仮定しない)，また正実性にも依存しない学習則を導いている．Miyamura らの FEL と同様，FF 制御器 $Q_\Theta(s)$ は (1) 式のフィルタで構成できる．ただし， $\xi_2(t)$ は $\bar{u}(t) = u(t)$ によって駆動される．途中過程は省略するが，ここで，誤差信号 $e(t)$ を用いた補助的なベクトル $\tilde{\xi}_w(t)$

$$\tilde{\xi}_w(t) := L(s)^{-1}\xi_w(t) - \begin{bmatrix} (sI - F)^{-1}g \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \quad (7)$$

を構成し，この $\tilde{\xi}_w(t)$ を用いて，未知パラメータに線形となる誤差モデル $\varepsilon_w(t)$

$$\varepsilon_w(t) := L(s)^{-1}u(t) - \hat{u}_w(t), \quad \hat{u}_w(t) = \theta(t)^T \tilde{\xi}_w(t) \quad (8)$$

を導く．この $\varepsilon_w(t)$ を用いることで，固定ゲイン型の学習則

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \alpha \tilde{\xi}_w(t) \varepsilon_w(t) \quad (9)$$

を獲得できる．いま，学習パラメータの誤差

$$\psi(t) := \theta(t) - \theta_0 \quad (10)$$

を定義すると， $\psi(t)$ に関する以下のベクトル微分方程式

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\alpha \tilde{\xi}_w(t) \tilde{\xi}_w(t)^T \psi(t) \quad (11)$$

を得ることができる．ここで，注目すべきは，(6) 式で強正実となるべき $L(s)$ が (11) 式では現れないことである．このため，Miyamura らの手法で問題であった正実条件が回避される．実用的な視点から，Muramatsu らの研究成果は非常に重要である．また，詳細は 4 章で述べるが，誤差 $e(t)$ ではなく $\varepsilon_w(t)$ を導入したことによって可変ゲイン型の学習則へ拡張することができるため画期的である．

1.4 その他の関連研究

ここでは，その他の関連研究(2自由度系での閉ループ同定法も含む)について概観する．Alali ら [9] は Miyamura らの手法を MIMO (Multi-Input Multi-Output) 系へ拡張し，さらに 2 リンク マニピュレータの一筆書き実験によりその有効性を検証した [10]．また，斎藤ら [13] は Muramatsu ら [8] の手法を マニピュレータへ応用し，FEL の研究で初めて (SISO 系に対する) 可変ゲイン型の学習則を導入している．ただし，その安定性に関しては議論されていない．

その他，非線形系を対象とした FEL [18, 19] も研究されている．Nakanishi ら [18] は，FEL と適応フィードバック線形化を用いた非線形適応制御との関係について論じ，FEL は非線形適応制御の形で書き直せることを示した．また，牛田ら [19] は，FEL にもとづいた非線形系に対する制御則および適応則を提案し，その安定性を厳密に論じている．その中で，非線形ダイレクトドライブ・アームの適応制御をとりあげている．

線形系と非線形系の両方で，制御系がむだ時間を含む場合についての FEL も研究されている [23, 24, 3, 25, 20]．線形系でむだ時間を考慮した FEL としては，Miyamura ら [23, 24]，村松ら [3]，そして Terashita ら [25] の研究がある．非線形系でむだ時間を考慮した FEL としては，Ushida ら [20] の研究がある．

一方，離散時間系に対する FEL の研究 [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33] も行われている．現在では，コンピュータで制御則を計算するのが主流であるため，離散時間系としての FEL の議論は大変有用であると考えられる．Wongsura らは，文献 [26, 27] で，パイロパな系に対する DTFEL (Discrete Time Feedback Error Learning) を提案し，学習則の安定性を正実性と PE 条件のもとで保証している．この手法は，Miyamura ら [7] の FEL の離散時間版と言える重要な研究成果である．このように評価できるのは，連続時間版の FEL を離散時間版に書き直すためには，離散時間系で特有のいくつかのテクニックが必要となるからである．例えば，離散時間版の PE 条件 [36, 37]，学習則の安定性を保証するために必要となる離散時間版の正実性条件 [34] や離散時間線形時変系の指数安定性に関する議論 [36, 38] などが必要である．また，彼らは，DTFEL [26, 27] を拡張し，厳密にプロパな系に対する DTFEL [28] を提案している．それと同時に，DTFEL の内部外乱を除去するために AF (Anti-Fluctuator) とよばれるブロックを導入し，外乱に対してロバストな DTFEL，すなわち RDTFEL (Robust DTFEL) も提案している．さらに，彼らは，文献 [29] で正実性の仮定を排除した DTFEL を提案している．この手法は，Muramatsu ら [8] の FEL の離散時間版と言える研究成果である．その他，彼らは，正実性の仮定を排除した DTFEL [29] を改良し，むだ時間を考慮した DTFEL [30] を提案している．この手法は，村松ら [3] のむだ時間を考慮した FEL の離散時間版と言える研究成果である．

さて，非線形に対する離散時間 FEL も提案されている [31, 32, 33]．Wongsura ら [31, 33] は，DTFELN (DTFEL for Nonlinear system) を提案している．この離散時間 FEL は，Nakanishi ら [18] の非線形に対する FEL の離散時間版と言える研究成果である．さらに，Suwanjatuporn ら [32] は，DTFELN を AC サーボモータの位置決め制御に適用している．

また，いわゆる学習に基づいた閉ループ同定に関する研究 [11, 12, 21, 22] も行われている．Alali らは FEL に基づいた on-line での連続時間系に対する閉ループ同定法を提案している [11, 12]．その他，FEL と同様，2 自由度制御系を用いた閉ループ同定法として，Kaneko ら [21] の FRIT (fictitious reference iterative tuning) を用いた離散時間系に対する閉ループ同定法がある．この FRIT は，目

標出力と実際の出力との誤差 $e(k)$ を最小化する最適パラメータを獲得するために、off-line での非線形最適化を行う手法である。この手法の特徴は、その最適化のために必要な実験データ（入力信号列と出力信号列の組 $(u^0(k), y^0(k))$, $(k = 1, \dots, N)$ ）を、たった 1 回のみ取得すればよいという点にある。まず、取得したデータの組 $(u^0(k), y^0(k))$ をもとに、擬似参照信号 $\tilde{r}(k)$ およびそれに基づく誤差 $\tilde{e}(k) := y^0(k) - W(z)\tilde{r}(k)$, $(k = 1, \dots, N)$ を off-line で計算する。それをもとに、仮想領域 (fictitious domain) での性能指標 $J_{\tilde{e}} = \sum_{k=1}^N \|\tilde{e}(k)\|$ を最小化する制御器のパラメータを求める。これによって (もとの領域での) 誤差 $e(k)$ の最小化を保証している。また、酒井ら [22] の反復学習に基づく連続時間系に対する閉ループ同定法がある。この手法は、2 自由度制御系の追従誤差信号 $\varepsilon(t)$ をその部分空間上に射影したとき、これを零に収束できる制御器のパラメータを推定することで、もとの $\varepsilon(t)$ の零への収束をも保証できるパラメータ同定法である。

ここまで、FEL の関連研究について概観してきたが、以下では、本論文における研究目的・構成について説明する。

1.5 研究目的・本論文の構成

前述の通り、制御理論に基づいた FEL の研究には様々なアプローチがとられている。扱うプラントとしては、構造上、線形系、非線形系の 2 種類があり、また、時間の取り扱いとして、連続時間系、離散時間系の 2 種類がある。さらに、FEL の適用対象として、目標軌道追従制御、閉ループ同定がある。本論文では、この中でも、(1) 時不変の線形系、(2) 連続時間系、(3) 目標軌道追従制御、に注目し、“FEL に基づく連続時間線形時不変系の目標軌道追従制御問題”を扱う。

本研究の目的は、線形制御理論で扱われた従来の FEL 制御系の問題点：

1. FEL に基づく制御系の設計では、制御対象がバイプロパならば学習は最も効率的に進むが、制御対象が厳密にプロパの場合、フィードフォワード (FF) 制御器がインプロパになるのを避けるためプレフィルタで参照信号を遅らせていた。そのため、従来の構成では、フィードフォワード (FF) 制御器が (既知の) プレフィルタの係数も一緒に学習してしまうという冗長性があった。

2. 多入出力系に対する研究 [9] も行われているが，これは Miyamura ら [7] の手法を多入出力化したものである．そのため，勾配をもとにしたシンプルな構成ではあるが，学習則における近似の問題や，その収束性を保証するために正実性を仮定しなければならないという問題は，やはり残っていた．
3. 正実性の仮定を除去するためには，必ず，プラント直前の制御入力 $u(t)$ を FF 制御器に取り込まなくてはならない [8]．そのため，ある種の副作用であるが，閉ループ系に時変ブロックが挿入されてしまう．したがって，閉ループ系が十分にロバストであり，その安定性をこの時変ブロックが損なわないという仮定が必要であった．
4. FEL では，閉ループ系への信号入力点が 2 点必要となる 2 自由度構成をとることから，制御系の構成自体が複雑になる．また，プラントは正方 ($m \times m$) に限定され，その出力（整形したい被制御量）と目標信号の差のみをフィードバック（FB）制御器に加えるという制約があった．
5. FEL では，2 自由度構成のため，プラントの直前に入力される FF 制御信号は，速応性の代償として急激な変化を伴ってしまうため，いわば入力外乱と見なせる．ゆえに，この外乱に対して閉ループ系が十分にロバストであるという仮定が必要であった（学習係数の値を大きく設定した場合には，特にこの入力外乱が過大になるものと考えられる）．

を順次解決していくことである．まず，問題点 1 を解決するために，プレフィルタの既知情報を有効利用するべく，プレフィルタの状態変数を FF 制御信号にも利用する，いわゆる，プレフィルタ統合型 FEL について説明する．次に，問題点 2 を解決するために，プレフィルタ統合型 FEL の構成を少し変更し，近似によらず，また，正実性の仮定をも必要としない学習則を導く．また，PE 条件のもと，学習則の収束性について解析する．さらに，問題点 3~5 を一度に解決するために，仮想フィードバック誤差学習 (VFEL; Virtual Feedback Error Learning) を導入する．すなわち，閉ループ系の前段に学習型 FF 制御器を直列結合するタイプの FEL 制御系を提案する．VFEL でもプレフィルタ統合型 FF 制御器を用い

るが，上記のものとは若干異なる構成となっている．また，学習には，VFEL の名前の通り，仮想フィードバック誤差信号を用いている（詳細は，5章を参照）．

本論文の構成は以下の通りである（図 5）．まず，2章で予備的事項を述べた後，3章では，プレフィルタ統合型 FEL について説明する．4章では，プレフィルタ統合型 FEL の構成を改良し，ある種の近似や正実性によらずとも，PE 条件の下で，学習パラメータの収束を保證できる手法について説明する．5章では，2自由度制御系の複雑さの問題をはじめ，4章にて発生する問題，すなわち，正実性の仮定を除去した副作用で閉ループ系に時変ブロックが挿入されてしまい，これが閉ループ系の安定性に対して影響を与える問題等を解決する．このため，閉ループ系の前段に FF 制御器を直列結合する FEL，すなわち，VFEL について説明する．6章で本論文のまとめを行い，7章で今後の課題について述べる．

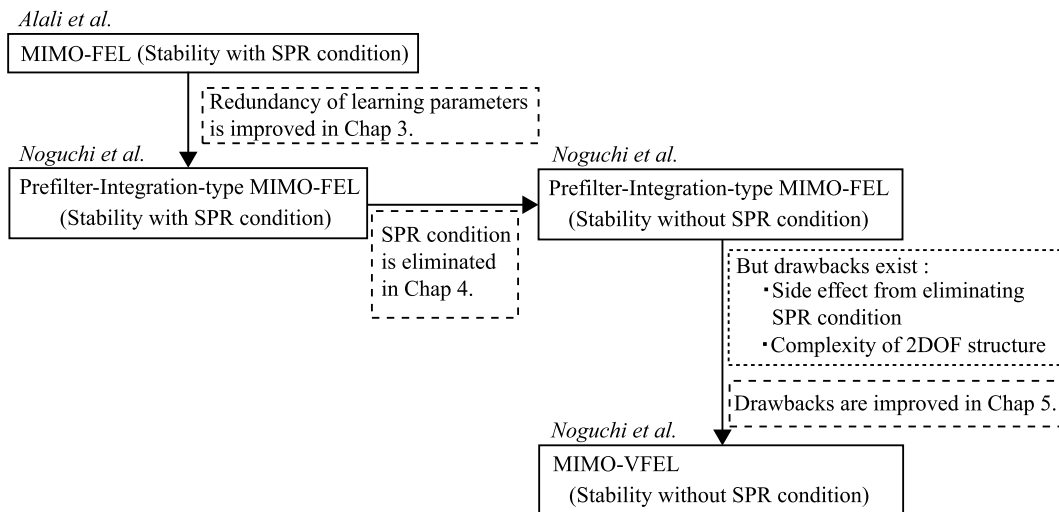


図 5 本論文の流れ

2. 予備的事項

本章では、プレフィルタ統合型フィードバック誤差学習を考える上での予備的事項について述べる（ここで述べる事項は、3章および4章を通じて適用される。なお、5章においては、FEL制御系の構成が大幅に変更されることから、あらかじめ必要事項を述べることとする）。

まず、従来の多入出力フィードバック誤差学習（MIMO-FEL）[9]の構成を図6に示す。

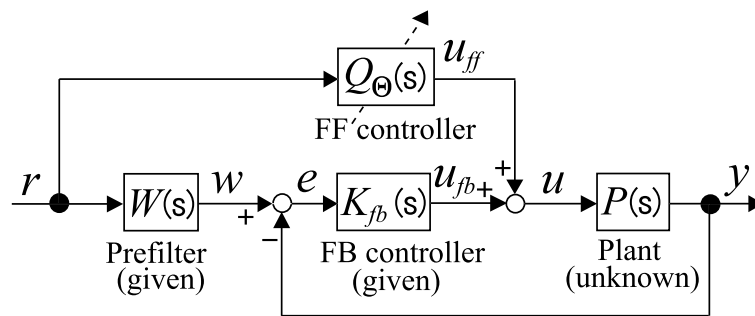


図6 従来法によるMIMO-FELの構成

ここで、 $P(s)$ は未知のプラント、 $r(t)$ は外生信号、 $w(t)$ はプレフィルタ $W(s)$ の出力で目標値信号、 $u(t)$ と $y(t)$ はプラントの入力および出力信号、 $e(t)$ は誤差信号、 $Q_{\Theta}(s)$ は調整パラメータ Θ を含むFF制御器、 $u_{ff}(t)$ は $Q_{\Theta}(s)$ からの出力信号、 $K_{fb}(s)$ は閉ループ系を安定化するフィードバック（FB）制御器で、 $u_{fb}(t)$ はその出力信号を表している。これらの信号は全て、 m 次元ベクトル値を取る連続時間関数であるとする。

制御目的は、 $y(t)$ が $w(t)$ に追従するように入力信号 $u(t)$ を加えることである。FELでは、与えられたFB制御器 $K_{fb}(s)$ （ここに $\det K_{fb}(s) \neq 0$ ）によって系は安定化されているが、追従特性は十分でないと仮定する。そのため、FF制御器 $Q_{\Theta}(s)$ を接続し、 Θ を調整することによって、目標値追従特性の改善を図る。

3章および4章を通じて、以下の仮定をおく。

A2.1 $P(s)$ は正方 ($m \times m$) な多入出力線形時不変系

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (12)$$

であり, n 次の最小実現である. ただし, 行列 A, B, C, D は未知とする. また, $D \neq 0$ の場合は, 簡単のため $\det D \neq 0$ のときのみを考える.

A2.2 $P(s)$ は最小位相, すなわち零点は閉右半面に存在せず,

$$\det \begin{bmatrix} A - sI_n & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{for all } \operatorname{Re}(s) \geq 0 \quad (13)$$

が成立する.

いま, $D = 0$, すなわち $P(s)$ が厳密にプロパな場合について考えよう. この場合, $P(s)$ と同じ相対次数を持つプレフィルタ $W(s)$ に外生信号 $r(t)$ を通し, $w = W(s)r$ に出力 $y(t)$ を追従させることを考えなければならない. これは FF 制御器 $Q_{\Theta}(s)$ をプロパな伝達行列として構成するためである. MIMO 系における相対次数の概念は次のように定義される [9, 44].

【定義 2.1】 行列 C の行ベクトル $c_i (i = 1, \dots, m)$ に対して,

$$c_i A^{\rho_i - 1} B \neq 0, \rho_i \geq 1, (i = 1, \dots, m) \quad (14)$$

を満たす最小の整数 ρ_i を求める. ρ_1, \dots, ρ_m は伝達行列 $P(s)$ の第 i 行における最小の相対次数であり, “行相対次数” と呼ばれる (SISO 系では通常の相対次数に一致).

A2.3 上記の ρ_1, \dots, ρ_m は既知であり, 次の行列

$$\Lambda := \begin{bmatrix} c_1 A^{\rho_1 - 1} B \\ \vdots \\ c_m A^{\rho_m - 1} B \end{bmatrix} \quad (15)$$

は可逆である (非干渉化可能条件).

【定義 2.2】 行相対次数の和および最大値を

$$\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i, \quad \bar{\rho} = \max_{1 \leq i \leq m} \rho_i \quad (16)$$

とそれぞれ定める (SISO 系では, これらは全て単独の相対次数に一致する. すなわち, $\rho = \bar{\rho} = \rho_1$ である).

【注意 2.1】 $\det D \neq 0$ の場合は, $\rho_i = 0, (i = 1, \dots, m)$ として考える. \diamond

以上の前提の下, 図 6 のプレフィルタとして

$$W(s) = L(s)^{-1}, \quad L(s) = \text{diag}(\ell_1(s), \dots, \ell_m(s)) \quad (17)$$

を設定する. ただし $\ell_i(s)$ は ρ_i 次の Hurwitz 多項式であり, 設計者が任意に与える.

【注意 2.2】 $\det D \neq 0$ の場合は, $\ell_i(s) = 1, (i = 1, \dots, m)$, すなわち, $W = I_m$ として考える. \diamond

いま (15) 式が可逆であることから,

$$P(s)Q(s) = W(s) \quad (18)$$

を満たす安定バイプロパな FF 制御器 $Q(s)$ が存在する. このような $Q(s)$ を, FF 制御器の真値と呼ぶことにする. 図 6 において, $Q_\Theta(s) = Q(s)$ のときは, どのような $r(t)$ に対しても出力誤差が

$$e(t) = w(t) - y(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (19)$$

となる.

FEL では, フィードバック誤差を利用してパラメータ Θ を調整し, 上記 (19) 式を達成する.

3. プレフィルタ統合型フィードバック誤差学習

3.1 本章の概要

生体の運動制御における学習機構であるフィードバック誤差学習 (FEL; Feedback Error Learning) は、近年、線形制御理論の分野に導入され、活発に研究されている。FEL はプラント (制御対象) がバイプロパのときに最も効力を発揮するが、もし厳密にプロパならプレフィルタで目標値信号に遅れを持たせることが従来の研究で提案されている。しかしながら、従来の構成では、フィードフォワード (FF) 制御器が (既知の) プレフィルタの係数も一緒に学習してしまうという冗長性があった。そこで本章では、プレフィルタの状態をフィードフォワード信号にも利用し、未知パラメータだけを学習するという構成 (プレフィルタ統合型 FEL) を提案する。これにより相対次数の分だけ学習すべきパラメータが節約できる。さらに、この構成を導く上で、FF 制御器のパラメータの真値も明示する。提案法の利点は次の通りである。

1. 学習パラメータの節約は計算コストの面だけでなく学習速度からも望ましい。特に、有限零点を持たないプラント (SISO 系では分子が定数の時) では、FF 制御器のための状態変数が不要となる。
2. 学習パラメータは真値に収束するとは限らない [11, 12] もの、真値を知っておくことは理論上有用である。これにより必要なフィルタの次数が分かる。

最後に、本手法の有効性をシミュレーションによって確認する。ここでは相対次数が 2 となるプラントに対して本手法を適用する。相対次数が 1 より大きいプラントの制御が難しいことは周知の通りであり、プラントの係数を未知とする FEL ではさらに厳しいが、本手法による学習は成功している。

本章の構成は次の通りである。3.2 では仮定を追加するなどの準備を行った後で、提案法を述べる。3.3~3.5 ではシミュレーションにより本手法を検証する。3.6 で本章のまとめとする。

3.2 提案法

本節ではまず，仮定を追加するなどの準備を行った上で，提案する FF 制御器の構成を示す．

3.2.1 準備

本章では，プラント $P(s)$ および FB 制御器 $K_{fb}(s)$ に対して，2 章で述べた仮定に加え，さらに仮定 A3.1, A3.2, A3.3 および後で述べる A3.4 をおく．また，図 6 のプレフィルタ $W(s) = L(s)^{-1}$ の構成因子 $\ell_k(s)$ は， ρ_k 次モノニック Hurwitz 多項式であるとする．

A3.1 FB 制御器 $K_{fb}(s)$ は，パイプロパ（定数ゲインを含む）である．

A3.2 プラント $P(s)$ は，上記 FB 制御器で安定化可能である．

A3.3 $P(s)$ は厳密にプロパ，すなわち， $D = 0$ である．

さて，FEL の基本方針は， $P(s)Q(s) = W(s)$ を満たすパイプロパな FF 制御器 $Q(s)$ を学習により獲得することである．しかしながら，学習後の $Q(s)$ は設計者が予め与えた $W(s)$ を因子として含んでおり，これは必要以上のパラメータを学習していることになる．この冗長性を改善するのが本章の目的である．

3.2.2 提案法のパラメータ構成と真値

FF 制御器の出力の真値信号は

$$u_0(t) = Q(s)r(t) \tag{20}$$

として与えられる．しかしながら，行列 A, B, C は未知と仮定されているため，実際には，この逆システム $Q(s)$ を予め求めることは不可能である．そこで，FF 制御の真値 (20) を実現するために，図 6 の $Q_\Theta(s)$ を学習させていく必要がある．この学習は，誤差信号を利用し，これが最小化されるように進められる．

提案の FF 制御器をパラメータ表示するために以下のシステムを考える．

まず，直接の計算により

$$L(s)P(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_L & \Lambda \end{array} \right], \quad C_L = \begin{pmatrix} c_1 \ell_1(A) \\ \vdots \\ c_m \ell_m(A) \end{pmatrix} \quad (21)$$

となることが示せるので，FF 制御器の真値は

$$Q(s) = [L(s)P(s)]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A - B\Lambda^{-1}C_L & B\Lambda^{-1} \\ \hline -\Lambda^{-1}C_L & \Lambda^{-1} \end{array} \right] \quad (22)$$

と表せる．

いま

$$P(s)^{-1} = M(s) + \left[\begin{array}{c|c} A_\xi & B_\xi \\ \hline C_\xi & 0 \end{array} \right] \quad (23)$$

と，多項式行列 $M(s)$ と厳密にプロパな有理式行列の和に分解しよう．ここで (A_ξ, B_ξ, C_ξ) は， $P(s)^{-1} - M(s)$ の最小実現とする．プレフィルタも可制御正準形による最小実現 (A_w, B_w, C_w) によって

$$W(s) = L(s)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_w & B_w \\ \hline C_w & 0 \end{array} \right] \quad (24)$$

と表すと，(23) 式に右から $L(s)^{-1}$ を掛けてもバイプロパなので $M(s)L(s)^{-1}$ もバイプロパとなり，

$$M(s)L(s)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_w & B_w \\ \hline J_0 & H_0 \end{array} \right] \quad (25)$$

なる定数行列 J_0, H_0 が存在する．

これらの値は上記の手順のほか，

$$\begin{aligned} P(s)^{-1}L(s)^{-1} &= \left[\begin{array}{c|c} A_w & B_w \\ \hline J_0 & H_0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} A_\xi & B_\xi \\ \hline C_\xi & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_w & B_w \\ \hline C_w & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A_\xi & B_\xi C_w & 0 \\ 0 & A_w & B_w \\ \hline C_\xi & J_0 & H_0 \end{array} \right] \quad (26) \end{aligned}$$

を (22) 式と係数比較することでも求められる．なお， A_w, B_w, C_w は我々が設定し， $A_\xi, B_\xi, C_\xi, J_0, H_0$ はプラントによって定まる真値である． A_w のサイズは ρ ， A_ξ のサイズは $n - \rho$ となる．

上記のパラメータのうち， A_ξ, B_ξ, C_ξ はこのままでは学習に適さないので，特有の設定が必要となる．まず，次の仮定をおく．

A3.4 (A_ξ, B_ξ) の可制御性指数 ν_1, \dots, ν_m の最大値 ν が既知である．

特に SISO のときは A_ξ のサイズ $n - \rho$ が ν に一致する．

【補題 3.1】 Hurwitz 多項式 $f(s) = s^\nu + f_1 s^{\nu-1} + \dots + f_\nu$ を設定し，

$$A_f = I_m \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -f_\nu & \dots & -f_2 & -f_1 \end{pmatrix}, \quad B_f = I_m \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく．これらを用い，プレフィルタの出力 $w(t)$ から FF 制御器のフィルタ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \eta_f(t) &= A_f \eta_f(t) + B_f w(t) \\ \frac{d}{dt} \eta_g(t) &= A_f \eta_g(t) + B_f u_g(t) \\ u_g(t) &= F_0 \eta_f(t) + G_0 \eta_g(t) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

を構成する．既に述べた H_0, J_0 に加え， F_0, G_0 を適当に与えれば，プレフィルタ (24) 式の状態変数を $\xi_w(t)$ として

$$u_0(t) = u_g(t) + H_0 r(t) + J_0 \xi_w(t) \quad (28)$$

が FF 制御器の出力の真値信号 $u_0(t) = Q(s)r(t)$ を実現できる．

(証明)(27) 式より, w から u_g への伝達行列は

$$\begin{aligned} & (I_m - G_0(sI_{m\nu} - A_f)^{-1}B_f)^{-1}F_0(sI_{m\nu} - A_f)^{-1}B_f \\ &= (f(s)I_m - G_0S_f(s))^{-1}F_0S_f(s), \\ S_f(s) &= I_m \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{\nu-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算される.これが(26)式の $\begin{bmatrix} A_\xi & B_\xi \\ C_\xi & 0 \end{bmatrix}$ に一致するよう F_0, G_0 を求めればよい. 極零相殺がなければ, SISO系では分母・分子の係数であり, 一般には (A_ξ, B_ξ, C_ξ) を可制御正準形にとることで求められる. よって r から u_0 への伝達行列は(26)式に一致し, これは $Q(s)$ に等しい. \diamond

なお, MIMO系の場合は次数が削減されているので, 上記のフィルタが真値に収束したとしても極零相殺が生じている. しかし $f(s)$ は Hurwitz 多項式に設定しているため安定領域での極零相殺となり問題はない. また, 提案手法を実際に適用する場合は ν が正確に事前情報として得られていることは少ないので上限値で代用することもあるが, パラメータが冗長になるだけで信号の収束には影響しない.

提案法における FF 制御器の構成を図 7 に示す.

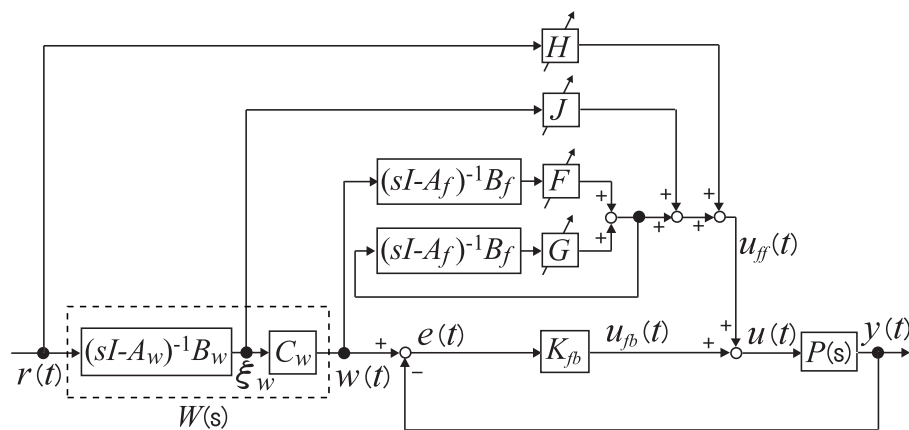


図 7 本章で提案する FEL の構成

3.2.3 学習則

3.2.2 のパラメータ F_0, G_0, H_0, J_0 はプラントから導かれるため，実際には未知となる．本節ではこの学習則を示す．

(27)，(28) 式はパラメータに関して線形なので，これらを調整可能な係数行列 $F(t), G(t), H(t), J(t)$ で置きかえ，以下の式によって，FF 制御器の出力 $u_{ff}(t)$ を与えることにする．

$$u_{ff}(t) = \Theta(t)\xi(t) \quad (29)$$

$$\Theta(t) = [F(t), G(t), H(t), J(t)] \quad (30)$$

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_f(t) \\ \xi_g(t) \\ r(t) \\ \xi_w(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}\xi_f(t) &= A_f\xi_f(t) + B_fw(t) \\ \frac{d}{dt}\xi_g(t) &= A_g\xi_g(t) + B_gu_g(t) \\ u_g(t) &= F(t)\xi_f(t) + G(t)\xi_g(t) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここで， $\Theta(t)$ は以下で説明する学習則によって調整される係数行列である．

学習則は，誤差関数

$$V(t) = \frac{1}{2}(u_{ff}(t) - u_0(t))^T(u_{ff}(t) - u_0(t)) \quad (33)$$

の瞬時値に対して勾配法を適用することによって導かれる．このとき，最急勾配法は以下のように公式化される．

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = -\alpha \frac{\partial V(t)}{\partial \Theta} \quad (34)$$

この公式から導かれる学習則は， $\alpha > 0$ を学習率として，以下のようになる [9]．

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta(t)}{dt} &= -\alpha\{u_{ff}(t) - u(t)\}\xi(t)^T \\ &= \alpha u_{fb}(t)\xi(t)^T \end{aligned} \quad (35)$$

(33) 式の $u_0(t)$ が (35) 式では $u(t)$ に置き換えられている．つまり提案法は文献 [7, 9] と同様， $u(t) \approx u_0(t)$ と仮定して学習則を与えている．ここでは，この

収束性に関する議論は省略する（文献 [7, 9] の収束性に関する議論を参照）．以下のシミュレーションに見られるように，提案法は多くの場合，十分な性能を示している．

3.3 シミュレーション1（簡単な例）

代表的な2次系

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 12}$$

を考える．プレフィルタとして $W(s) = 1/(s + 2)^2$ をとり，

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおく．

まず，定数フィードバックゲイン $K_{fb} = 20$ で閉ループ系を安定化させたときの目標軌道追従特性（FELなし）を図8に示す．振幅が合っていないことが分かる．

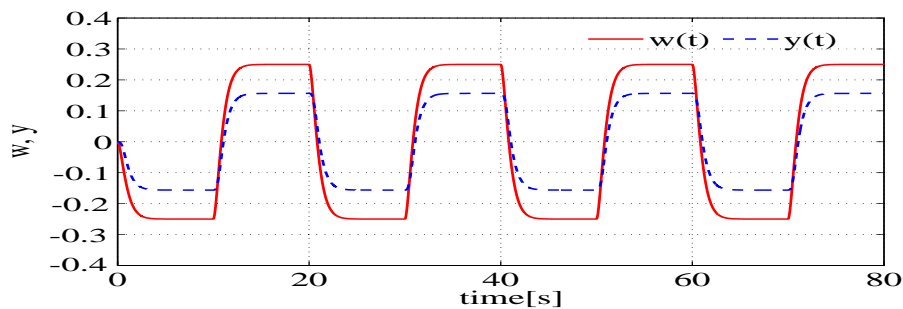


図8 目標軌道追従特性（FELなし）

次に，この閉ループ系に従来法のFF制御器を追加する． $\alpha = 0.5$ とし，相対次数2なので，

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -20 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

と設定する．図 9 に目標軌道追従特性 (0 ~ 80[s]) を，図 10 に目標軌道追従誤差を示している．

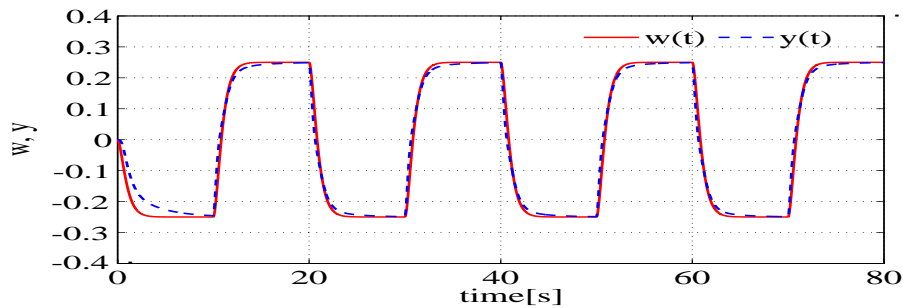


図 9 従来法による目標軌道追従特性

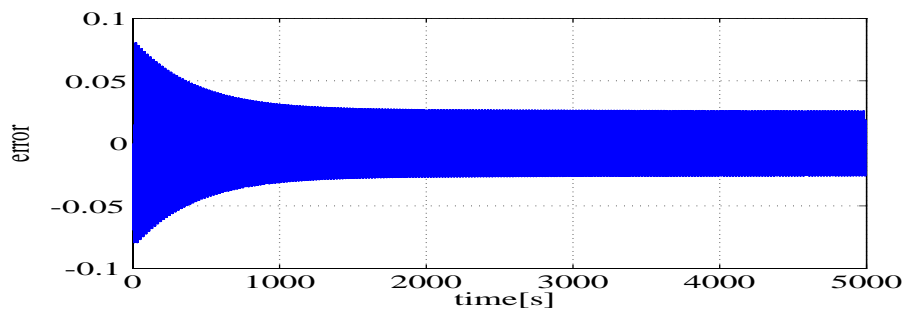


図 10 従来法による目標軌道追従誤差 ($\alpha = 0.5$)

同じ条件で提案法の FF 制御器を構成すると，調整パラメータのサイズは $F = 0 \times 0, G = 0 \times 0, H = 1 \times 1, J = 1 \times 2$ となる．つまり，このときは F, G を考える必要はなく，対応するフィルタが不要となる．図 11 に目標軌道追従特性 (0 ~ 80[s]) を，図 12 に目標軌道追従誤差を示している．

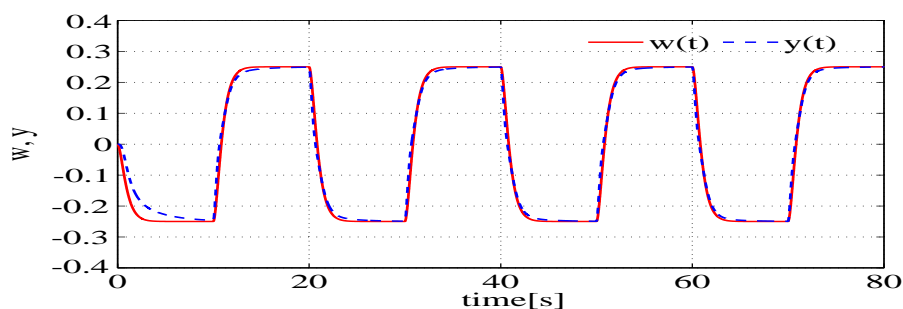


図 11 提案法による目標軌道追従特性

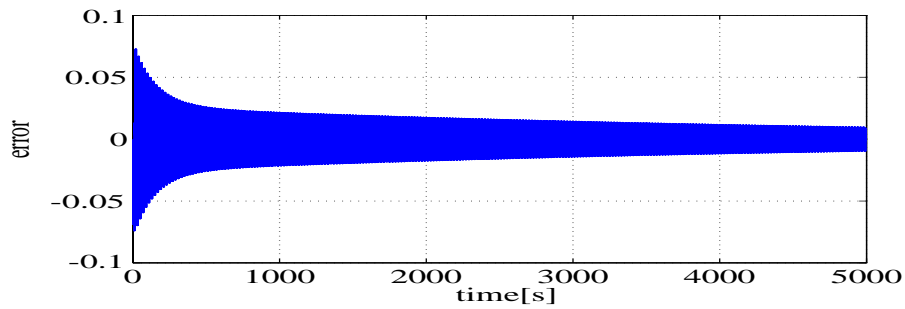


図 12 提案法による目標軌道追従誤差 ($\alpha = 0.5$)

FELの効果で追従特性は改善されているが、提案法の方はやや誤差の収束が速い。また、 $\alpha = 3.0$ とすると、従来のFEL・提案法ともに誤差の収束速度は速くなるが、後者は0により近づく(図 13 と図 14)。

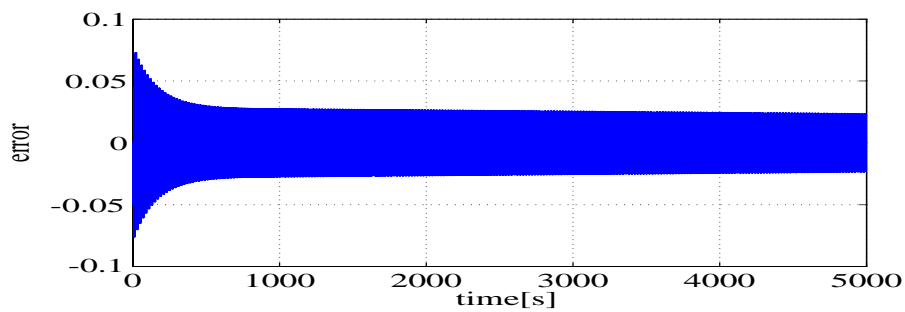


図 13 従来法による目標軌道追従誤差 ($\alpha = 3.0$)

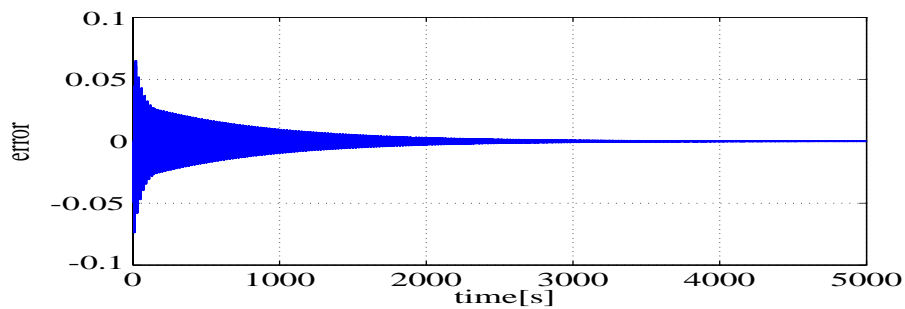


図 14 提案法による目標軌道追従誤差 ($\alpha = 3.0$)

さらに、パラメータの真値への収束を確認しよう。まず、真値を求める。FF制

御器 $Q(s)$ は ,

$$\begin{aligned}
 Q(s) &= P(s)^{-1}W(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^2 + 4s + 4} \\
 &= 1 + \frac{3s + 8}{s^2 + 4s + 4} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \\ \hline 8 & 3 & 1 \end{array} \right] \quad (37)
 \end{aligned}$$

と計算できる．ここで , (25) 式と上式を比較することで , パラメータの真値が , $J_0 = (8 \ 3)$, $H_0 = 1$ と求まる．図 7 の構成に戻り , PE 性を満たすために

$$r(t) = \sin(2\pi(1/3)t) + \sin(2\pi(1/4)t) + \sin(2\pi(1/5)t)$$

としたときの出力波形と $\Theta(t) = (H(t), J(t))$ の時間発展を図 15, 16 に示す． $\Theta(t)$ が真値に収束していることが分かる．ただし , $\alpha = 3.0$, $K_{fb} = 20$ としている．

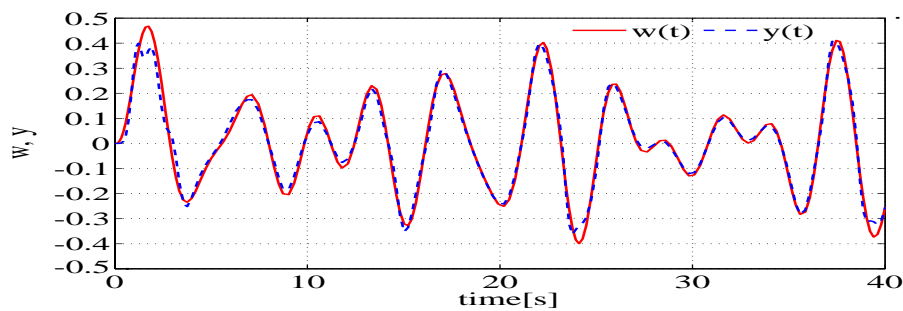


図 15 提案法による目標軌道追従特性 ($\alpha = 3.0$)

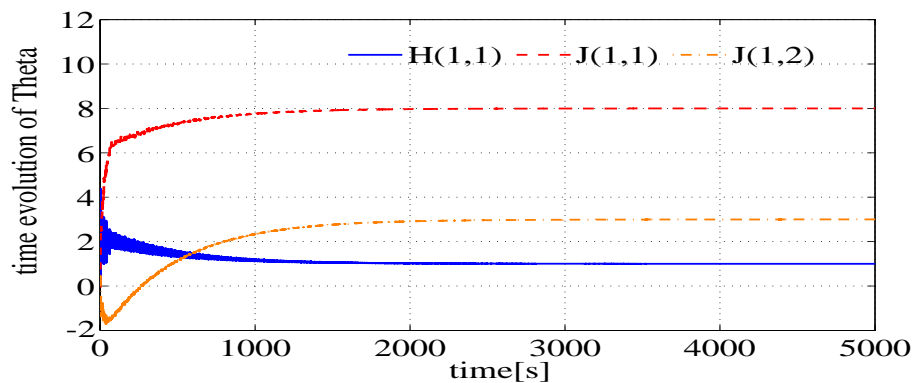


図 16 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 ($\alpha = 3.0$)

なお、相対次数2のプラントを定数フィードバックのみで制御することはむしろ稀であり、例えば2重積分器 $1/s^2$ は安定化できない。そこで、出力の導関数（位置決めなら速度）も計測（または推定）して補助的にフィードバックする、図17のような構成も検討しよう。これもプレフィルタの状態を用いることで初めて可能となる。

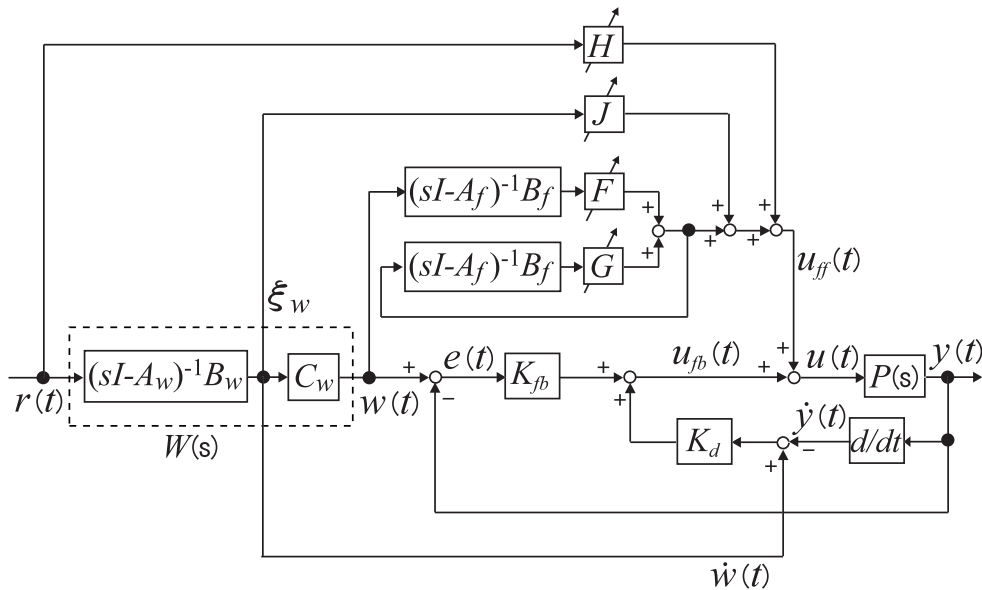


図17 出力 y の導関数をフィードバックに用いた FEL の構成

この時のシミュレーション結果を図18に示す。微分ゲインを $K_d = 4$ としている。誤差の収束精度がさらに良くなっていることがわかる。

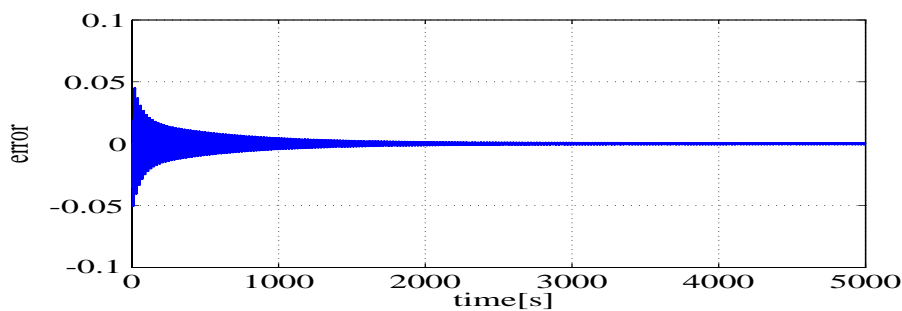


図18 図17の構成における目標軌道追従誤差

3.4 シミュレーション 2 (実問題を想定した例)

本節では、前節よりも実問題に近い例 (具体例) をとりあげ、提案法の有効性を検討する。

3.4.1 模型自動車のモデル (SISO)

SISO プラントの具体例として模型自動車のモデル [48] を図 19 に示す。以下、本節で扱うモデルについて説明する。

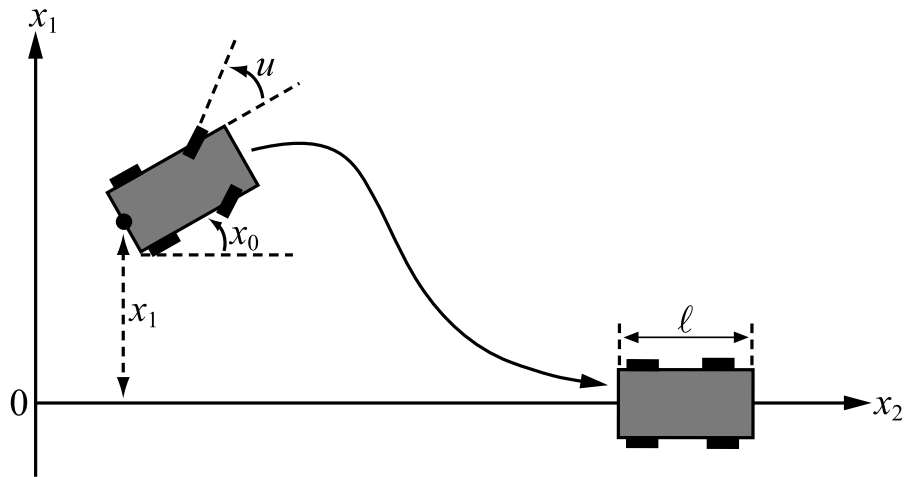


図 19 模型自動車のモデルとその座標系

図 19 において、 $x_0(t)$ は模型自動車の絶対角度 [rad] を、 $x_1(t)$ は垂直位置 [m] を、 $x_2(t)$ は水平位置 [m] を、 $u(t)$ はステアリング角 [rad] を、 l は模型自動車の全長 [m] を表している。ただし、模型自動車は、一定速度 v [m/s] で前進するものとする。ステアリング角を制御することによって、ある時刻における模型自動車の垂直位置 $x_1(t)$ を目標軌道に追従させることを考えよう。模型自動車のモデルは、

$$\frac{d}{dt}x_0(t) = \frac{v}{l} \tan[u(t)] \quad (38)$$

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = v \sin[x_0(t)] \quad (39)$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = v \cos[x_0(t)] \quad (40)$$

で表現される．この微分方程式は，指定したステアリング角によって変化する模型自動車の挙動を表している．しかしながら，上記微分方程式は非線形であるため，FEL には適さない．そこで， $u(t) \cong 0$ かつ $x_0(t) \cong 0$ の仮定のもと，(38) 式と (39) 式を線形化すると，

$$\frac{d}{dt}x_0(t) = \frac{v}{\ell}u(t) \quad (41)$$

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = vx_0(t) \quad (42)$$

が得られる．さらに，状態変数を $x = [x_0, x_1]^T$ ，制御入力および出力をそれぞれ， $u, y = x_1$ とすると，状態方程式

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (43)$$

$$y = Cx \quad (44)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} v/\ell \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

が得られる．ただし，上記の状態方程式には，(40) 式は考慮されていない．それは，模型自動車が $u(t) \cong 0$ かつ $x_0(t) \cong 0$ の範囲内で一定速度 v にて前進することから， x_2 そのものを制御することは不可能であり， x_2 が制御変数としては不要となるためである．以下のシミュレーションでは，パラメータを $v = 1.5, \ell = 0.25$ と設定し，SISO プラント

$$P(s) = (A, B, C) = \frac{9}{s^2} \quad (45)$$

の制御を行う．

3.4.2 模型自動車の制御

ここでは，単一周波数の正弦波を目標軌道とし，提案法 [51] と従来法 [9] とを比較する．プラントは (45) 式に示す模型自動車のモデル $P(s) = \frac{9}{s^2}$ とし， x_2 軸の正方向へ， x_2 軸を中心におきながら正弦波状にくねくねと進行するタスクを実現しよう．この $P(s)$ は分子が定数の 2 重積分器であり，有限零点を持たない相対次数 2 次の不安定プラントである．このため，閉ループ系の安定化に注意を要する．プ

ラントにおいて, $n = 2, \bar{\rho} = \rho = \rho_1 = 2$ であるから, $L(s) = (1/25)s^2 + (2/5)s + 1$ と定めると, プレフィルタは, $W(s) = L(s)^{-1}$ となる. この最小実現 (A_w, B_w, C_w) は,

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_w = \begin{bmatrix} 25 & 0 \end{bmatrix}$$

と与えられる. また, 定数 FB 制御では閉ループ系の安定化は困難であるため, FB 制御器は, 近似 PD 制御器

$$K_{fb}(s) = K_p + K_d \frac{s}{0.01s + 1} = \frac{0.101s + 0.1}{0.01s + 1}$$

を用いる. ただし, $K_p = 0.1, K_d = 0.1$ としている.

以下のシミュレーションでは, 目標軌道として, $r = 0.25 \sin(2\pi(1/5)t)$ を用いるが, ほとんどの場合で追従誤差のみ図示する.

従来法 [9] においては, $\bar{\rho} = 2$ であるから, FF 制御器のフィルタを

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f^2 & -2f \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f = 5 \quad (46)$$

と設定している. また, 提案法 [51] では $\nu = n - \rho = 2 - 2 = 0$ より, FF フィルタは不要となる. 従来法および提案法の学習率 (固定ゲイン) はともに $\alpha = 50$ としている. 以下, シミュレーション結果を示す.

まずは, 上記 FB 制御器 $K_{fb}(s)$ で閉ループ系を安定化させたときの目標軌道追従特性 (FEL なし) を図 20 に示す. 追従できていないことがわかる.

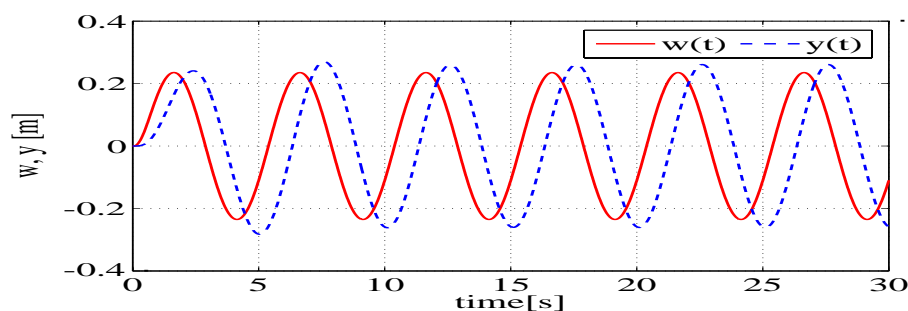


図 20 目標軌道追従特性 (FEL なし)

次に、この閉ループ系に従来法 [9] の FF 制御器を追加する。図 21 に目標軌道追従誤差を、図 22 に学習パラメータの時間発展を示している。良好な目標軌道追従が達成され、学習パラメータも収束していることがわかる。

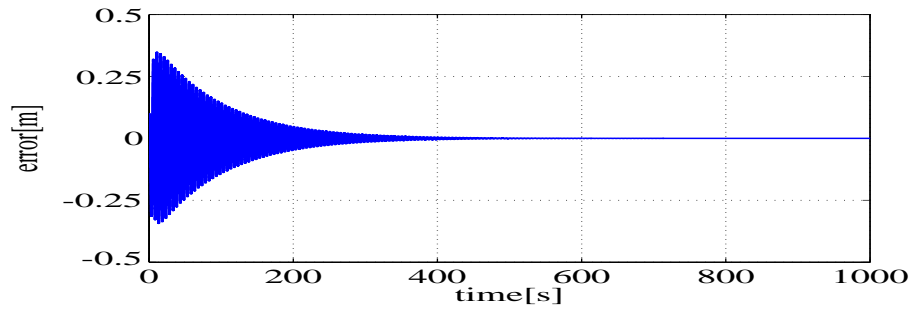


図 21 従来法による目標軌道追従誤差

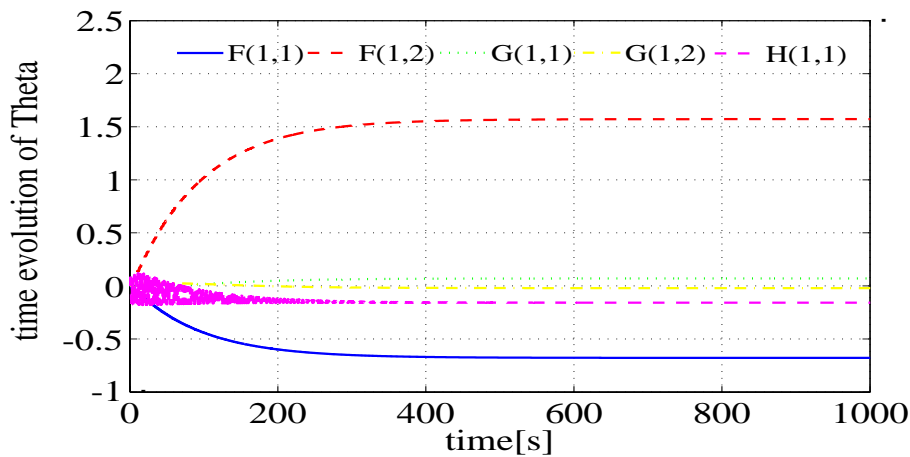


図 22 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展

また、時間の経過に伴う $x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡を図 23 と図 24 に示している。この図では、0.25[s] 毎に印をつけて、 x_2 軸の正方向へ走行していく様子を表している。さらに、図 25 に模型自動車の絶対角度 $x_0(t)$ [rad] を、図 26 に制御入力 $u(t)$ [rad] を示している。これより、模型自動車のモデルが線形近似の範囲 ($x_0(t) \cong 0, u(t) \cong 0$)³ で正しく制御されている（機能している）ことがわかる。

³本論文では、 $|x_0(t)| < \tilde{\theta}, |u(t)| < \tilde{\theta}, \tilde{\theta} = \frac{\pi}{6} \simeq 0.5236$ [rad] を線形近似の範囲として許容する。

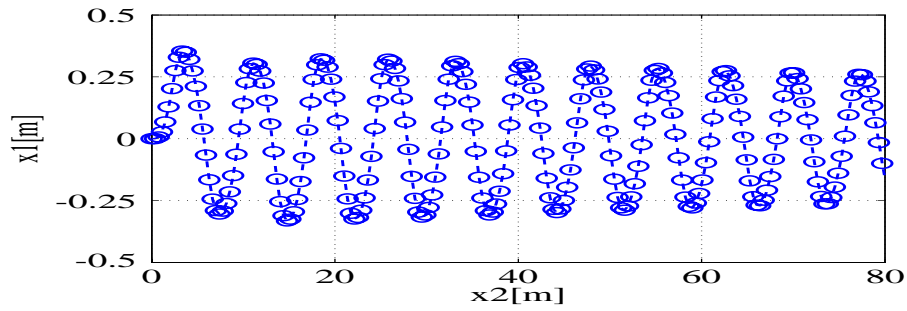


図 23 $x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態)

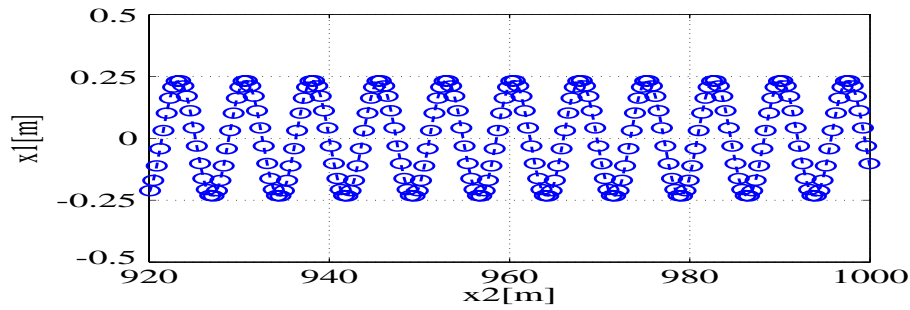


図 24 $x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡 (学習の定常状態)

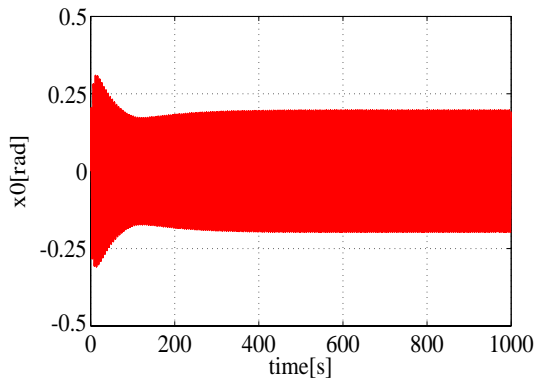


図 25 模型自動車の絶対角度 $x_0(t)$

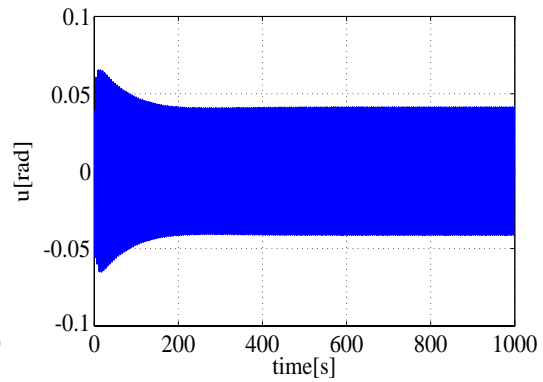


図 26 制御入力 $u(t)$

次に，提案法 [51] について検討する．図 27 に目標軌道追従誤差を，図 28 に学習パラメータの時間発展を示している．従来法と同様，良好な目標軌道追従が達

成され，学習パラメータも収束していることがわかる．提案法では従来法に比べて学習パラメータが5から3に減っているが，この例題では，学習速度に関して従来法との差はあまり顕著でない．

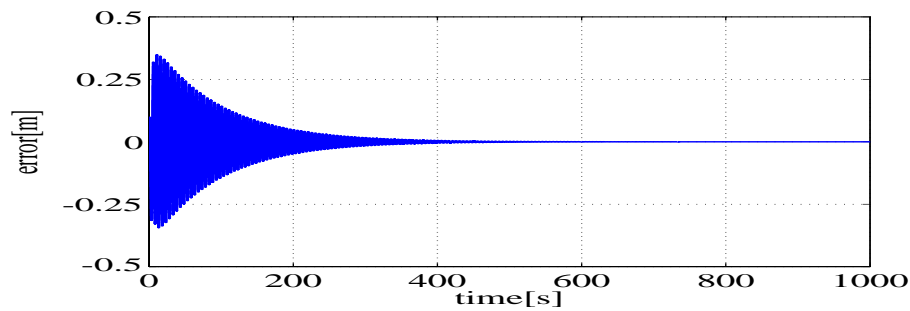


図 27 提案法による目標軌道追従誤差

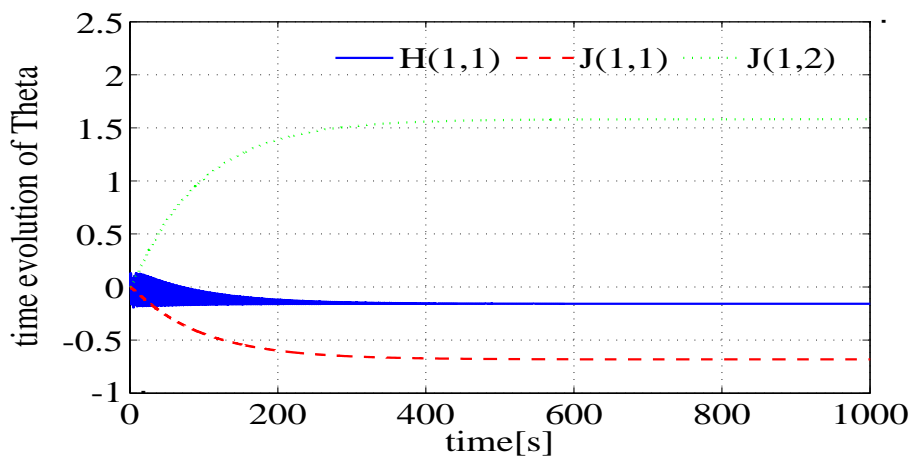


図 28 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展

また，時間の経過に伴う $x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡を図 29 に示す（学習の定常状態における走行軌跡は従来法と同じであるため，初期状態における走行軌跡のみを示す）．さらに，図 30 に $x_0(t)$ を，図 31 に $u(t)$ を示している．従来法と同様，模型自動車のモデルが線形近似の範囲で正しく制御されている（機能している）ことがわかる．

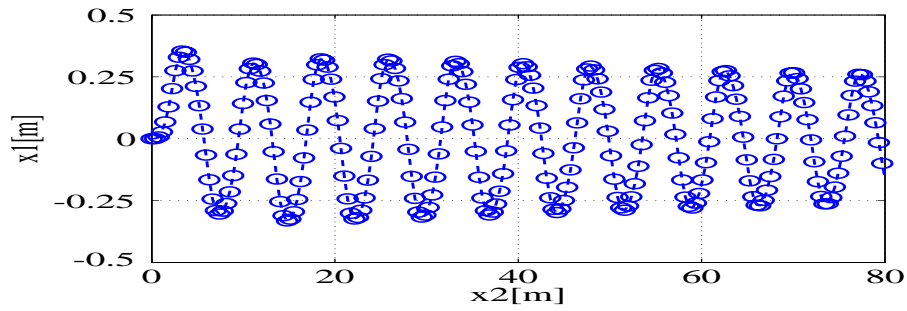


図 29 $x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡（学習の初期状態）

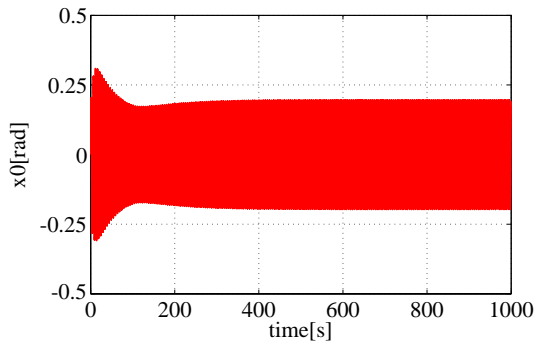


図 30 模型自動車の絶対角度 $x_0(t)$

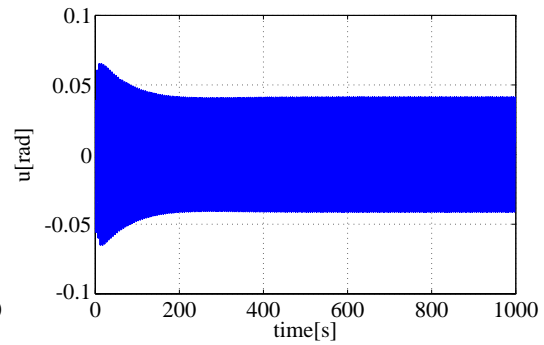


図 31 制御入力 $u(t)$

3.4.3 連結型台車のモデル (MIMO)

MIMO プラントの具体例として連結型台車のモデル [49] を図 32 に示す．以下，本節で扱うモデルについて説明する．

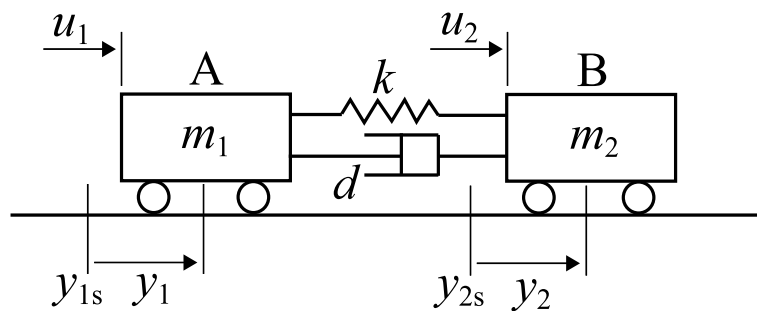


図 32 連結型台車のモデル

図 32 に示すように、質量 m_1 [kg] の物体 A と質量 m_2 [kg] の物体 B が、バネ定数 k [N/m] のバネと減衰定数 d [N · s/m] のダッシュポットによって結合されており、それぞれ任意の力 u_1 [N] および u_2 [N] を加えることができるものとする。これらの力によって、ある平衡位置 y_{1s} , y_{2s} からのずれ y_1 , y_2 の制御を考える。いま、このシステムの状態方程式を求めよう。まず、物体 A については、

$$m_1 \ddot{y}_1 = k(y_2 - y_1) + d(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + u_1 \quad (47)$$

次に、物体 B については、

$$m_2 \ddot{y}_2 = -k(y_2 - y_1) - d(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + u_2 \quad (48)$$

の運動方程式が得られる。ここで、状態変数を $x = [y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2]^T$ とし、また、入力ベクトルおよび出力ベクトルをそれぞれ、 $u = [u_1, u_2]^T$, $y = [y_1, y_2]^T$ とすると、状態方程式

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (49)$$

$$y = Cx \quad (50)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k/m_1 & -d/m_1 & k/m_1 & d/m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k/m_2 & d/m_2 & -k/m_2 & -d/m_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

が得られる。以下のシミュレーションでは、パラメータを $m_1 = 0.5$, $m_2 = 0.3$, $k = 0.5$, $d = 0.1$ と設定し、MIMO プラント

$$P(s) = (A, B, C) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} 2s^2 + 0.6667s + 3.333 & 0.6667s + 3.333 \\ 0.6667s + 3.333 & 3.333s^2 + 0.6667s + 3.333 \end{bmatrix}, \quad (51)$$

$$d(s) = s^4 + 0.5333s^3 + 2.667s^2$$

の制御を行う。

3.4.4 連結型台車の制御

ここでは、単一周波数の正弦波（2種類）を目標軌道とし、提案法 [51] と従来法 [9] とを比較する。プラントは (51) 式に示す連結型台車のモデルとし、出力 $y = [y_1, y_2]^T$ の位置決め制御を行う。この $P(s)$ は有限零点を持たない不安定プラントであり、閉ループ系の安定化に注意を要する。なお、 $P(s)$ の4つの極は、 $[-0.2667 \pm 1.6111i, 0, 0]$ である。このとき、 $n = 4, \rho_1 = 2, \rho_2 = 2, \rho = 4$ であるから、プレフィルタを $W(s) = L(s)^{-1}, L(s) = \text{diag}(\ell_1(s), \ell_2(s)), \ell_1(s) = (1/16)s^2 + (8/16)s + 1, \ell_2(s) = (1/20.25)s^2 + (9/20.25)s + 1$ と定めると、この最小実現 (A_w, B_w, C_w) は、

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_1^2 & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_2^2 & -2a_2 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_w = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 & 0 \end{bmatrix}, a_1 = 4, a_2 = 4.5$$

と与えられる。従来法 [9] では、 $\bar{\rho} = 2$ より、行列 A_f, B_f は4次元となるため、FFフィルタを

$$A_f = I_2 \otimes \bar{A}_f, B_f = I_2 \otimes \bar{B}_f$$

$$\bar{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f^2 & -2f \end{bmatrix}, \bar{B}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f = 5$$

と設定する。また、提案法 [51] では、 $\nu = n - \rho = 0$ より、FFフィルタは不要となる。FB制御器は、近似PD制御器

$$K_{fb} = \text{diag} \left[Kp + Kd \frac{s}{0.01s + 1}, Kp + Kd \frac{s}{0.01s + 1} \right]$$

$$= \text{diag} \left[\frac{2.27s + 2}{0.01s + 1}, \frac{2.27s + 2}{0.01s + 1} \right]$$

を用いる。ただし、 $Kp = 2, Kd = 2.25$ である。目標軌道としては、周期と振幅が異なる2種類の正弦波、すなわち、 $r = [r_1, r_2]^T, r_1 = \sin(2\pi(1/5)t), r_2 =$

$0.8 \cdot \sin(2\pi(1/4)t)$ を用いる．また，従来法および提案法の学習率（固定ゲイン）はともに $\alpha = 100$ としている．以下，シミュレーション結果を示す．

まずは，上記 FB 制御器 $K_{fb}(s)$ で閉ループ系を安定化させたときの目標軌道追従特性（FEL なし）を図 33 に示す．追従できていないことがわかる．

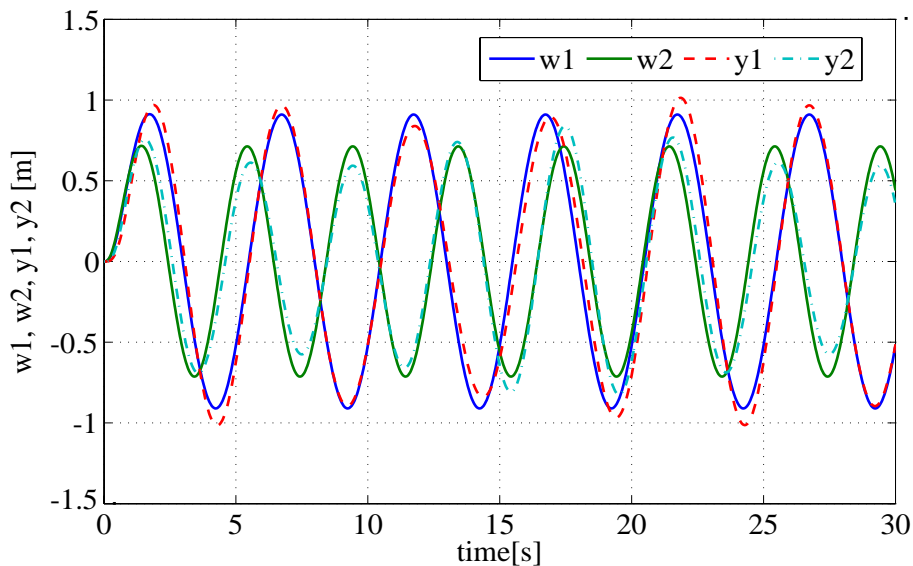


図 33 目標軌道追従特性（FEL なし）

次に，この閉ループ系に従来法 [9] の FF 制御器を追加する．図 34 に目標軌道追従誤差を，図 35 に学習パラメータの時間発展を示している．良好な目標軌道追従が達成され，学習パラメータも収束していることがわかる．

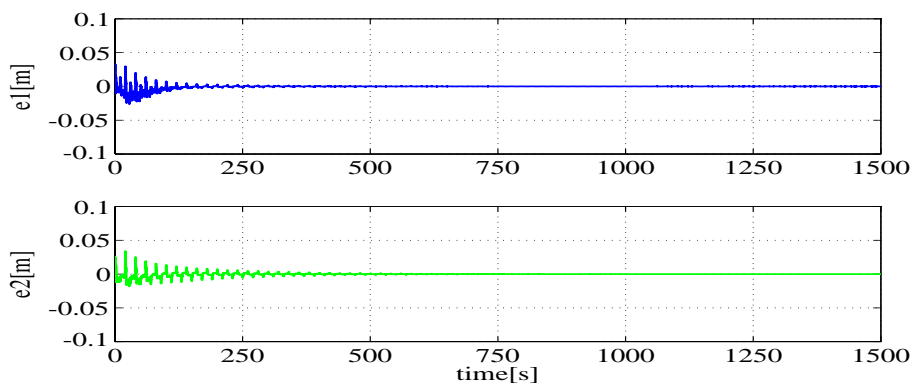


図 34 従来法による目標軌道追従誤差

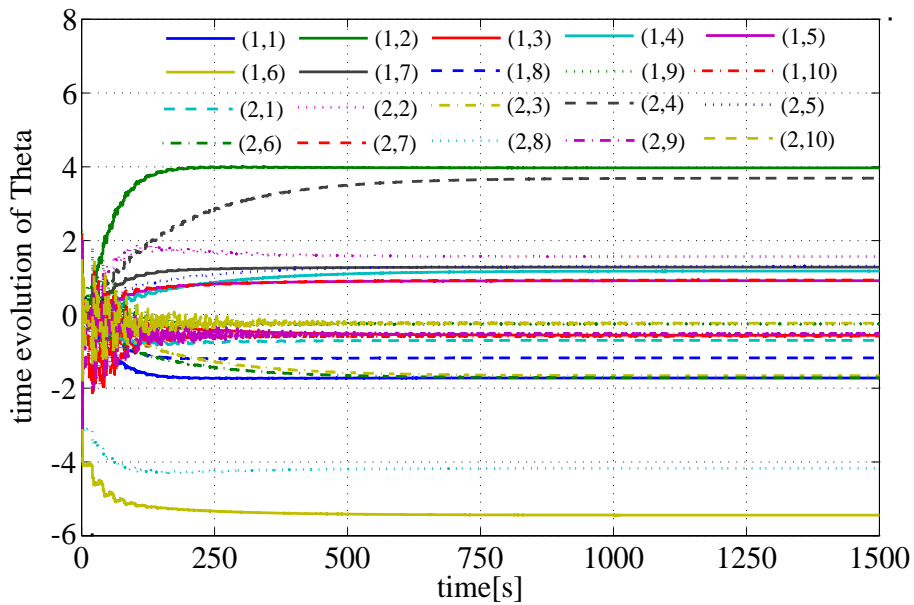


図 35 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展

次に，提案法 [51] について検討する．図 36 に目標軌道追従誤差を，図 37 に学習パラメータの時間発展を示している．従来法と同様，良好な目標軌道追従が達成され，学習パラメータも収束していることがわかる．提案法では従来法に比べて学習パラメータが 20 から 12 に減っているため，学習パラメータの収束が少しだけ速いが，この例題では，従来法との差はあまり顕著でない．

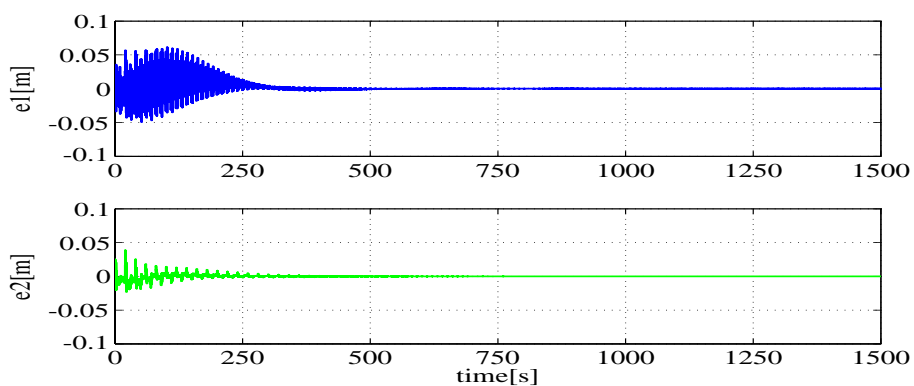


図 36 提案法による目標軌道追従誤差

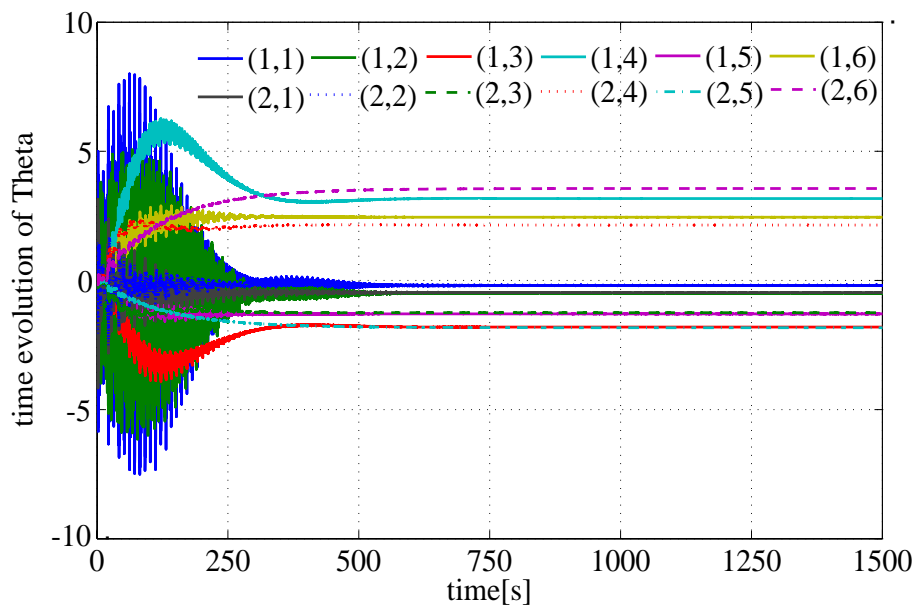


図 37 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展

3.5 シミュレーション 3 (乱数による探索)

ここでは、相対次数が 1 次、次数が 2 次の厳密にプロパなプラント

$$P(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

について、提案法 [51] の有効性を検討する。上記プラントの各係数 a_2, a_1, a_0, b_1, b_0 は、乱数 (生成する範囲は $[-100, 100]$) によって決定するものとする。ただし、これらの係数は、FB 制御器を

$$K_{fb}(s) = 0.5 + 0.5 \frac{s}{0.01s + 1}$$

と予め与えた上で、閉ループ系の極が安定となり、また、プラントが最小位相になるものだけを選択するものとする。前述のシミュレーション 2,3 とは異なり、特定のプラントではなく上記の仮定の範囲で無作為に抽出した 50 種類のプラントに対して学習が成功するかどうかを評価する。以下、表 1 と表 2 のプラントに対する評価をそれぞれ、表 3, 表 4 に示す。

表 1 無作為に抽出したプラント (No.1 ~ 25)

$P(s)$ の No.	$P(s)$ の係数を与えるベクトル $V = [a_2, a_1, a_0, b_1, b_0]$
1	$V = [-20.3120, 34.0915, -11.8931, -73.4252, -12.1593]$
2	$V = [-78.7158, -78.6411, -26.5782, -52.0785, -30.7720]$
3	$V = [-86.9128, 22.0701, 40.3106, -77.6765, -80.8353]$
4	$V = -63.4567, -79.7571, -59.6831, -73.0508, -35.2422]$
5	$V = [94.5210, 21.0637, -32.3528, 85.5967, 79.6849]$
6	$V = [-73.8697, -89.7289, 25.5013, -94.1825, -72.7611]$
7	$V = [38.9111, 3.1358, 8.5165, 61.6967, 58.7372]$
8	$V = [21.2360, 53.2059, 69.2305, 80.3962, 19.1414]$
9	$V = [-54.6292, -10.7938, -46.7557, -8.1807, -13.4189]$
10	$V = [36.9378, -11.3813, -12.8674, 58.6047, 63.1113]$
11	$V = [50.4225, 57.8512, 0.2535, 11.0364, 26.1499]$
12	$V = [37.8249, 43.5763, 11.8058, 6.6708, 75.1448]$
13	$V = [31.8352, 16.0013, 81.9903, 27.2012, 5.1123]$
14	$V = [-68.9077, 0.4735, 13.5466, -62.3456, -35.1607]$
15	$V = [-8.1955, -90.3943, -22.9296, -27.6567, -42.4832]$
16	$V = [-86.5440, -63.6836, 15.1495, -62.8230, -41.7103]$
17	$V = [-7.6672, -30.6045, -36.3669, -8.0171, -52.8210]$
18	$V = [90.8174, -11.1324, -8.6234, 19.9634, 68.5244]$
19	$V = [62.1665, 85.7758, 34.5435, -25.5335, -18.8609]$
20	$V = [32.0144, 38.0210, 70.7447, -6.4197, -8.3043]$
21	$V = [-30.7780, 49.5634, -17.2761, -88.8495, -21.9944]$
22	$V = [-89.1237, -47.9972, 17.8207, -4.0533, -60.2699]$
23	$V = [-19.6987, -7.5229, 41.4564, -19.7579, -97.1229]$
24	$V = [74.2471, -65.4419, 70.0448, 91.9177, 54.0414]$
25	$V = [25.9623, 71.4029, 79.9597, -30.3263, -2.7380]$

表 2 無作為に抽出したプラント (No.26 ~ 50)

$P(s)$ の No.	$P(s)$ の係数を与えるベクトル $V = [a_2, a_1, a_0, b_1, b_0]$
26	$V = [-73.3654, -40.9982, -66.6746, -36.5792, -78.0321]$
27	$V = [57.9693, 82.7041, 6.6509, 60.8153, 12.5321]$
28	$V = [97.0360, 7.8662, -25.2330, 41.3470, 89.4823]$
29	$V = [89.8246, 90.6363, 46.5847, -23.0640, -91.9835]$
30	$V = [-47.0867, -37.0602, -63.3609, -10.5053, -34.6643]$
31	$V = [-20.0762, -34.9165, 11.0780, -40.9160, -26.7760]$
32	$V = [5.0468, -33.7446, -13.6813, 43.5803, 83.2424]$
33	$V = [-59.0095, 24.2510, -65.1958, -42.0920, -96.2994]$
34	$V = [40.2993, 90.4183, 49.8019, 51.3455, 8.4178]$
35	$V = [58.7121, 62.5631, 80.7582, 8.0751, 63.5727]$
36	$V = [-75.0201, 23.4365, -28.8961, -27.4124, -86.3023]$
37	$V = [-16.6469, -43.9414, 19.6201, -92.7050, -87.2627]$
38	$V = [-35.4235, -80.3243, -65.9911, -25.7672, -92.0477]$
39	$V = [-85.0311, -88.5315, -39.8087, 4.3442, 12.3760]$
40	$V = [62.5888, -17.5853, -23.1674, 4.6253, 78.4298]$
41	$V = [-18.8159, 20.8778, -81.0393, -32.8037, -71.0316]$
42	$V = [9.2968, 10.1656, 38.9074, 85.4988, 88.8421]$
43	$V = [34.6793, 37.0534, 39.1490, 59.9663, 32.1210]$
44	$V = [-26.6248, -44.8309, -46.7805, -54.6923, -99.7358]$
45	$V = [-96.2209, -59.5765, -6.1814, -24.3210, -31.9213]$
46	$V = [-66.6794, -79.5812, -70.7506, 34.3130, 27.9706]$
47	$V = [-3.9287, -77.4025, -73.5261, -87.1995, -84.1405]$
48	$V = [25.3908, -17.7332, 27.7179, 71.3114, 52.7150]$
49	$V = [-77.8060, -60.0295, -67.4072, -92.6245, -45.4551]$
50	$V = [36.2512, 42.9073, -8.0438, 83.8537, 97.7887]$

表 3 プラント (No.1 ~ 25) に対する評価

$P(s)$ の No.	$P(s)$ の極	$P(s)$ の零点	$\ e\ _{L_2}$	評価
1	1.1838, 0.4946	-0.1656	0.3293	
2	-0.4995, 0.2969 <i>i</i> , -0.4995 - 0.2969 <i>i</i>	-0.5909	0.7304	
3	0.8197, -0.5658	-1.0407	0.9429	
4	-0.6284 + 0.7386 <i>i</i> , -0.6284 - 0.7386 <i>i</i>	-0.4824	0.1887	
5	-0.7070, 0.4841	-0.9309	0.9212	
6	-1.4524, 0.2377	-0.7726	0.7112	
7	-0.0403 + 0.4661 <i>i</i> , -0.0403 - 0.4661 <i>i</i>	-0.9520	0.4162	
8	-1.2527 + 1.3003 <i>i</i> , -1.2527 - 1.3003 <i>i</i>	-0.2381	0.4825	
9	-0.0988 + 0.9198 <i>i</i> , -0.0988 - 0.9198 <i>i</i>	-1.6403	1.2100	
10	0.7641, -0.4559	-1.0769	0.5392	
11	-1.1429, -0.0044	-2.3694	1.6182	
12	-0.7163, -0.4357	-11.2647	0.6012	
13	-0.2513 + 1.5850 <i>i</i> , -0.2513 - 1.5850 <i>i</i>	-0.1879	0.9424	
14	0.4468, -0.4400	-0.5640	0.9421	
15	-10.7699, -0.2598	-1.5361	0.3947	
16	-0.9251, 0.1892	-0.6639	0.9976	
17	-1.9958 + 0.8717 <i>i</i> , -1.9958 - 0.8717 <i>i</i>	-6.5886	0.1911	
18	0.3755, -0.2529	-3.4325	0.8828	
19	-0.6899 + 0.2823 <i>i</i> , -0.6899 - 0.2823 <i>i</i>	-0.7387	2.9564	×
20	-0.5938 + 1.3628 <i>i</i> , -0.5938 - 1.3628 <i>i</i>	-1.2936	3.0076	×
21	1.1001, 0.5102	-0.2475	0.3738	
22	-0.7913, 0.2527	-14.8694	1.3574	
23	-1.6542, 1.2723	-4.9157	0.4511	
24	0.4407 + 0.8656 <i>i</i> , 0.4407 - 0.8656 <i>i</i>	-0.5879	0.3332	
25	-1.3751 + 1.0904 <i>i</i> , -1.3751 - 1.0904 <i>i</i>	-0.0903	2.1856	×

表 4 プラント (No.26 ~ 50) に対する評価

$P(s)$ の No.	$P(s)$ の極	$P(s)$ の零点	$\ e\ _{L_2}$	評価
26	$-0.2794 + 0.9114i, -0.2794 - 0.9114i$	-2.1332	0.4860	
27	-1.3411, -0.0855	-0.2061	0.3732	
28	-0.5521, 0.4710	-2.1642	0.9831	
29	$-0.5045 + 0.5139i, -0.5045 - 0.5139i$	-3.9882	2.2516	×
30	$-0.3935 + 1.0912i, -0.3935 - 1.0912i$	-3.2997	0.5686	
31	-2.0133, 0.2741	-0.6544	0.5231	
32	7.0698, -0.3834	-1.9101	0.0138	
33	$0.2055 + 1.0308i, 0.2055 - 1.0308i$	-2.2878	0.0605	
34	-1.2725, -0.9711	-0.1639	0.3192	
35	$-0.5328 + 1.0448i, -0.5328 - 1.0448i$	-7.8726	0.5985	
36	$0.1562 + 0.6006i, 0.1562 - 0.6006i$	-3.1483	0.3729	
37	$-3.0288 + 0.0000i, 0.3891 + 0.0000i$	-0.9413	0.3059	
38	$-1.1338 + 0.7599i, -1.1338 - 0.7599i$	-3.5723	0.4010	
39	$-0.5206 + 0.4440i, -0.5206 - 0.4440i$	-2.8488	4.0501	×
40	0.7649, -0.4839	-16.9567	0.4058	
41	$0.5548 + 1.9998i, 0.554 - 1.9998i$	-2.1654	0.6090	
42	$-0.5467 + 1.9713i, -0.5467 - 1.9713i$	-1.0391	0.1428	
43	$-0.5342 + 0.9184i, -0.5342 - 0.9184i$	-0.5357	0.1074	
44	$-0.8419 + 1.0238i, -0.8419 - 1.0238i$	-1.8236	0.1364	
45	-0.4873, -0.1318	-1.3125	1.6615	
46	$-0.5967 + 0.8396i, -0.5967 - 0.8396i$	-0.8152	1.8964	×
47	-18.7010, -1.0008	-0.9649	0.3085	
48	$0.3492 + 0.9847i, 0.3492 - 0.9847i$	-0.7392	0.0988	
49	$-0.3858 + 0.8471i, -0.3858 - 0.8471i$	-0.4907	0.2545	
50	-1.3482, 0.1646	-1.1662	0.4116	

本シミュレーションでは，目標軌道として， $r = \sin(2\pi(1/5)t)$ を用いた．また， $L(s) = (1/25)s^2 + (2/5)s + 1$ と定め，プレフィルタを $W(s) = L(s)^{-1}$ と設定した．さらに，FF フィルタを

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f^2 & -2f \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f = 5 \quad (52)$$

と設定し，学習率 (固定ゲイン) は， $\alpha = 100$ とした．

ここでは，時刻 0 ~ 1000[s] までのシミュレーションを 50 種類のプラントについて行い，これらに対する追従誤差 $e(t)$ の L_2 ノルム $\|e\|_{L_2}$ も参考データとして示している⁴．学習が失敗する場合には， $\|e\|_{L_2}$ が大きくなっていることがわかる．評価の結果，本節にて抽出されたプラントの集合に対しては，提案法は 88[%](=44/50) の確率で学習に成功することがわかる．提案法を実用的に用いることを想定すると，PE 性を満たさない目標軌道を与える場合は少なくないため，単一周波数の正弦波を用いて評価を行った．

上記の結果を得た一方，学習に失敗したプラントに対して，表 5 に示すパラメータ (学習率 α および FB 制御器 $K_{fb}(s)$) のみを再設定し，その他は同じ条件でシミュレーションを行うと，5000[s] 以内に追従誤差 $e(t)$ が零に収束することを確認できる．

表 5 再設定する制御パラメータ

$P(s)$ の No.	学習率 α	FB 制御器 $K_{fb}(s)$
19	5	$K_{fb}(s) = \frac{s^2+3s+3}{s^2+2s+2}$
20	5	$K_{fb}(s) = \frac{s^2+3s+3}{5s^2+2s+2}$
25	5	$K_{fb}(s) = \frac{s^2-3s+3.5}{s^2+2.5s+2.5}$
29	1	$K_{fb}(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2+2s+2}$
39	1	$K_{fb}(s) = \frac{s^2+3s+3}{s^2+3s+3}$
46	1	$K_{fb}(s) = \frac{s^2+3s+3}{s^2+2s+2}$

⁴ここで扱う L_2 ノルムは，有限時間区間 (0 ~ 1000[s]) における信号 $e(t)$ の 2 乗面積の平方根，すなわち， $\sqrt{\int_0^{1000} e(t)^2 dt}$ を表している．

3.6 本章のまとめ

本章では、プレフィルタの状態を有効利用する FEL の手法を提案した。プラント逆システムを多項式行列部分と厳密にプロパな部分に分ける操作はこれまでになく、理論的意義があるものとする。

シミュレーション 1 では、簡単な例を扱ったことと、信号の挙動は従来の FEL でも提案法でも理論上、同じことから、両者の差はあまり顕著でない。学習パラメータの数が 5 から 3 に減ったのが収束精度に影響したものと考えられる。

シミュレーション 2 では、SISO および MIMO プラントの具体例を扱い、従来法と提案法とを比較したが、両者の差はあまり顕著でない（シミュレーション 1 よりも差が見られない）。MIMO プラントの具体例では、学習パラメータの数が 20 から 12 に減ったため、収束精度に影響を与えたものと考えられる。

シミュレーション 1,2 において、学習率 α をさらに大きくすればもちろん収束は改善されるが、これはノイズなどの点から望ましくない。また、シミュレーション 1 では相対次数が 2 次の安定プラントを定数 FB 制御で安定化し、また、シミュレーション 2 では行相対次数の最大値が 2 次の不安定プラントを近似 PD 制御で安定化している。特にシミュレーション 2 で従来法と提案法との差が顕著でないのは、シミュレーションに用いたプラントおよび FB 制御器の違いによるものと推測するが、現時点では明らかでない。

なお、相対次数が高い場合の学習則には本来、Backstepping 法などの対策を講じるべきであるが、これについては今後の課題としたい。

4. プレフィルタ統合型フィードバック誤差学習の改善

4.1 本章の概要

FEL に基づく制御系の設計では，制御対象がバイプロパならば学習は最も効率的に進むが，制御対象が厳密にプロパの場合，フィードフォワード（FF）制御器がインプロパになるのを避けるためプレフィルタで参照信号を遅らせるのが普通である．従来，両者は別々に構成されていたが，前章にて，プレフィルタの状態変数を積極的に利用して FF 制御信号を生成するという，プレフィルタ統合型の FEL を提案した [51]．これにより相対次数が高い程，学習パラメータの数は削減される．しかし，前章のプレフィルタ統合型 FEL で用いていた学習則は Miyamura ら [7] の手法を多入出力化したもので，勾配をもとにしたシンプルな構成ではあるが，近似の問題や正実性が前提となる問題は，やはり残っていた．

そこで，本章では，プレフィルタ統合型 FEL において，まず，Muramatsu ら [8] の手法を MIMO 系に拡張し，パラメータに線形な誤差モデルを導出する（行列の積が可換でないため，この拡張は自明ではない）．これにより，固定ゲイン型の学習則，および，誤差信号の履歴を利用した最小二乗法に基づく学習則（可変ゲイン型と忘却型）を導く．次に，固定および可変ゲイン型の学習則は，閉ループ系が正実条件を満たさなくても，また近似によらずとも，信号が PE ならば真値に収束することを示す．最後に，本手法の有効性をシミュレーションによって確認する．

本章の構成は次の通りである．4.2 ではまず，仮定を追加するなどの準備を行った後で，提案法について説明する．まず，プレフィルタ統合型 FF 制御器を前章の構成 [51] から少し改良し，次に，学習則について説明する．4.3 では，学習則の収束性について検討を行う．4.4~4.6 では，シミュレーションにより本手法を検証する．4.7 で本章のまとめとする．

4.2 提案法

本節ではまず，仮定を追加するなどの準備を行った上で，提案する FF 制御器の構成を示す．

4.2.1 準備

本章では，2章で述べた仮定の他に A4.1 および A4.2 を仮定する．また，図 6 のプレフィルタ $W(s) = L(s)^{-1}$ の構成因子 $\ell_k(s)$ は， $\ell_i(0) = 1$ となる ρ_i 次 Hurwitz 多項式であるとする．このように設定することで， $W(0) = I_m$ となり， $r(t)$ と $w(t)$ の定常値は一致する．

A4.1 プラント $P(s)$ は不安定であってもよい (4.2.1 節末尾の注意 4.1 を参照) ．

A4.2 $P(s)$ は厳密にプロパ，すなわち， $D = 0$ である．

さて，FEL の基本方針は，フィードバック誤差を利用してパラメータ θ を調整し， $e(t) = w(t) - y(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) を達成することである．しかし，(18) 式の $Q(s)$ は設計者が与えた $W(s)$ までも因子として含むという冗長性があった．

そこで，前章ではプレフィルタ統合型の FF 制御器 [51] によって上記の冗長性を解消したが，学習則は Miyamura ら [7] のものを用いたため，

1. パラメータの収束を示すには PE 条件だけでなく，閉ループ系の正実性を仮定せねばならず，また $u(t) \cong u_0(t)$ という近似に基づいていた．
2. 学習アルゴリズムはシンプルではあるが，収束は遅かった．

等の問題があった．特に，MIMO の場合や相対次数が高い場合について，これらを 4.4 節で検証する．

本章の目的は，パラメータの学習則を次のように改良することにある．

1. Muramatsu ら [8] の発想を元に，MIMO での線形誤差モデルを導出する．これはプレフィルタ統合型では初めてであり，行列の積が非可換であるため，決して自明でない．

2. このモデルを元に固定ゲイン型，可変ゲイン型，さらに忘却型の学習則を提案する．構成はやや複雑になるが，収束は極めて速くなる．

【注意 4.1】 図 6 は，FF 制御器が真値 $Q(s)$ となったとき，よく知られた 2 自由度制御系 [16] の特殊な場合に相当している．具体的には，安定有理関数環上の右既約分解 $P(s) = N(s)D(s)^{-1}$ で， $N(s)$ がプレフィルタ $W(s)$ ， $D(s)$ が真値 $Q(s)$ の場合である． $P(s)$ が不安定でも閉ループ系は安定なので，理想的な定常状態では $e = 0$ となるが，そのときも FB 制御器は内部状態を原点に保つ働きをしている．もし外乱により状態が他へ移動すれば，FB 制御器が作動するので過渡的に $e \neq 0$ となる． \diamond

4.2.2 FF 制御器のパラメータ構成と真値

まず，プレフィルタ統合型 FF 制御器のパラメータ構成を改良する．

$$P(s)^{-1} = M(s) + \tilde{R}(s), \quad \tilde{R}(s) = \frac{1}{g(s)}R(s) \quad (53)$$

と，多項式行列 $M(s)$ と厳密にプロパな有理式行列 $\tilde{R}(s)$ の和で一意的に表せることを示そう．第 1 式左辺の (i, j) -成分 $n_{ij}(s)/d_{ij}(s)$ に対し，多項式除算

$$\begin{aligned} n_{ij}(s) &= d_{ij}(s)m_{ij}(s) + \tilde{r}_{ij}(s), \\ \deg(\tilde{r}_{ij}(s)) &< \deg(d_{ij}(s)) \end{aligned}$$

を考え， $M(s) := (m_{ij}(s))$ ， $\tilde{R}(s) := (\tilde{r}_{ij}(s)/d_{ij}(s))$ とおくことで第 1 式は示される．また，第 2 式は $\tilde{R}(s)$ の各成分を改めて既約な有理式で表し，それらの分母の最小公倍多項式を

$$g(s) = s^\nu + g_1 s^{\nu-1} + \cdots + g_\nu$$

とおくことで得られる⁵．

⁵もしも， $P(s)$ が有限零点を持たなければ， $\tilde{R}(s) = 0$ となるが，便宜上，このときは $R(s) = 0$ ， $\nu = 0$ ， $g(s) = g_0 = 1$ と考える．

(17) 式, (18) 式より, FF 制御器の真値の別表現として

$$\begin{aligned} Q(s) &= P(s)^{-1}W(s) = (M(s) + \frac{1}{g(s)}R(s))L(s)^{-1} \\ &= \left(\frac{g(s)}{f(s)}\right)^{-1} (g(s)M(s) + R(s))(f(s)L(s))^{-1} \end{aligned} \quad (54)$$

を考える. ここに $f(s)$ は ν 次モニック Hurwitz 多項式

$$f(s) = s^\nu + f_1 s^{\nu-1} + \cdots + f_\nu$$

として設計者が与える.

【例題 4.1】 SISO 系では特に, 次のように表せる.

$$\begin{aligned} P(s) &= \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{g(s)}{g(s)M(s) + R(s)}, \\ Q(s) &= \left(\frac{g(s)}{f(s)}\right)^{-1} \frac{g(s)M(s) + R(s)}{f(s)\ell_1(s)} \end{aligned} \quad (55)$$

ここで, $g(s) := n(s)$ であり, また, $M(s)$ と $R(s)$ はそれぞれ, $d(s)/g(s)$ の商と余りを表している. 例えば, $P(s) = \frac{s+1}{s^2+s+2} = \frac{s+1}{s(s+1)+2}$ の場合, $g(s) = s+1, M(s) = s, R(s) = 2$ と求まる. (55) 式右辺の前半の因子は分子 $n(s)$ の推定に, 後半の因子は分母 $d(s)$ の推定に役割を果たすことが後に分かる. \square

まず (54) 式において, 後半の因子

$$(g(s)M(s) + R(s))(f(s)L(s))^{-1}$$

の状態空間表現を求める. 可制御正準形によるプレフィルタの最小実現

$$W(s) = L(s)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_w & B_w \\ \hline C_w & 0 \end{array} \right], \quad (56)$$

$$\frac{d}{dt}\xi_w(t) = A_w\xi_w(t) + B_w r(t), \quad w(t) = C_w\xi_w(t)$$

を考え, さらに

$$\bar{A}_f = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -f_\nu & \cdots & -f_2 & -f_1 \end{array} \right], \quad \bar{B}_f = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right],$$

$$A_f = I_m \otimes \bar{A}_f, \quad B_f = I_m \otimes \bar{B}_f$$

とおき,

$$V(s) := (sI_{m\nu} - A_f)^{-1}B_f = \frac{1}{f(s)}I_m \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{\nu-1} \end{bmatrix},$$

$$\frac{d}{dt}\xi_v(t) = A_f\xi_v(t) + B_fw(t)$$

を定義する．次に, ξ_w と ξ_v をまとめて $\xi_f = \begin{pmatrix} \xi_v \\ \xi_w \end{pmatrix}$ とおけば, これは次のフィ
ルタの出力となる (図 38 参照) .

$$\xi_f = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_F \\ \hline I_{m\nu+\rho} & 0 \end{array} \right] r,$$

$$A_F = \begin{bmatrix} A_f & B_f C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}, \quad B_F = \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix}$$

このとき, ある F_0, H_0 によって

$$(g(s)M(s) + R(s))(f(s)L(s))^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_F \\ \hline F_0 & H_0 \end{array} \right] \quad (57)$$

と表すことができる (学習パラメータの真値 F_0, H_0 の導出については, 付録 D を参照) .

次に, (54) 式右辺の前半の因子 $\left(\frac{g(s)}{f(s)}\right)^{-1}$ を実現するために,

$$\frac{g(s)}{f(s)} = 1 - \frac{f(s) - g(s)}{f(s)} = 1 - \bar{G}_0 \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{\nu-1} \end{bmatrix} \frac{1}{f(s)}, \quad (58)$$

$$\bar{G}_0 := \begin{bmatrix} f_\nu - g_\nu & \cdots & f_1 - g_1 \end{bmatrix}$$

と変形する．また m 次元ベクトル信号を扱うために

$$G_0 := I_m \otimes \bar{G}_0$$

とおくと，(58) 式より，

$$I_m - G_0(sI_{m\nu} - A_f)^{-1}B_f = \frac{g(s)}{f(s)}I_m \quad (59)$$

の関係が得られる．以上の準備により，(54) 式は次のようなフィルタにより構成できる．

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}\eta_f(t) &= A_F\eta_f(t) + B_F r(t) \\ \frac{d}{dt}\eta_g(t) &= A_f\eta_g(t) + B_f u_0(t) \\ u_0(t) &= \Theta_0\eta(t) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} F_0 & G_0 & H_0 \end{bmatrix}, \quad \eta(t) = \begin{bmatrix} \eta_f(t) \\ \eta_g(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

4.2.3 学習則

4.2.2 の F_0, G_0, H_0 はプラントから導かれるため，実際には未知となる．本節では Muramatsu ら [8] の発想をもとに，このパラメータを調整するための学習則を導く．(60) 式では FF 信号の真値 u_0 を使っているが，これは未知なので，プラントへの実際の入力 u で置き換え，

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}\xi_f(t) &= A_F\xi_f(t) + B_F r(t) \\ \frac{d}{dt}\xi_g(t) &= A_f\xi_g(t) + B_f u(t) \\ u_{ff}(t) &= \Theta(t)\xi(t) \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix} F(t) & G(t) & H(t) \end{bmatrix}, \quad \xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_f(t) \\ \xi_g(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

なるフィルタを構成する．ここで，パラメータ F_0, G_0, H_0 は調整可能な係数行列 $F(t), G(t), H(t)$ に置き換えられている．ただし

$$G(t) = I_m \otimes \bar{G}(t), \quad \bar{G}(t) \in \mathbf{R}^{1 \times \nu}$$

である．つまり $G(t)$ については ν 個のパラメータのみ調整すればよい．

(61) 式で記述された FF 制御器の出力 $u_{ff}(t)$ を用いて，プラント $P(s)$ への制御入力 $u(t)$ は，次のように与えられる．

$$u = u_{ff} + u_{fb} = u_{ff} + K_{fb}(s)e. \quad (62)$$

以上の構成を図 38 に示す．文献 [51] と同様に，プレフィルタの状態変数 ξ_w を利用しているが， ξ_g のループは [51] と大きく異なる．この構成から（近似によらない）線形誤差モデルを導く．

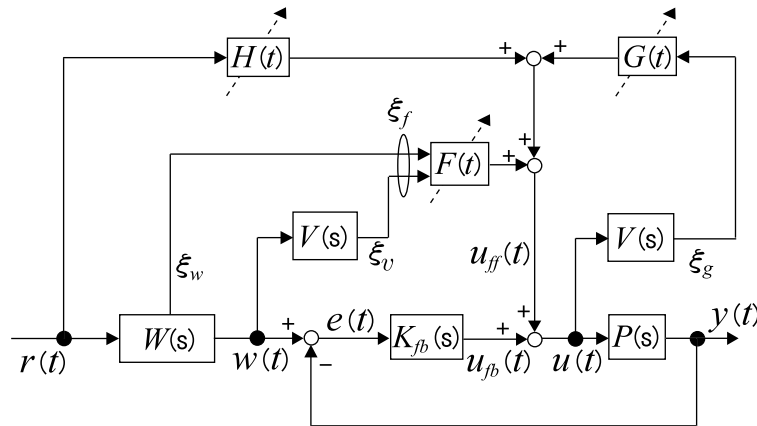


図 38 本章で提案する MIMO-FEL の構成

まず，(61) 式と (60) 式を比較し，さらに，両フィルタの安定性から

$$\left. \begin{aligned} \eta_f &\rightarrow \xi_f \\ \eta_g &\rightarrow \xi_g + (sI_{m\nu} - A_f)^{-1} B_f(u_0 - u) \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

となる．いま (19) 式と $w = P(s)u_0$, $y = P(s)u$ より

$$u_0 - u = P(s)^{-1}e = Q(s)L(s)e \quad (64)$$

となる．パラメータ真値を用いると

$$u_0 = \Theta_0 \eta, \quad \Theta_0 = \begin{bmatrix} F_0 & G_0 & H_0 \end{bmatrix}$$

と書けるので，これを (64) 式に代入すると，

$$u = \Theta_0 \eta - Q(s)L(s)e \quad (65)$$

となる．(65) 式に対して順番に，(63) 式，(59) 式，(54) 式，(57) 式を用い，

$$\begin{aligned} u &= \Theta_0 \xi + (-I_m + G_0(sI_{m\nu} - A_f)^{-1}B_f)Q(s)L(s)e \\ &= \Theta_0 \xi - \left(\frac{g(s)}{f(s)} I_m \right) Q(s)L(s)e \\ &= \Theta_0 \xi - (g(s)M(s) + R(s))(f(s)L(s))^{-1}L(s)e \\ &= \Theta_0 \xi - \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_F \\ \hline F_0 & H_0 \end{array} \right] L(s)e \end{aligned} \quad (66)$$

となる．

Muramatsu ら [8] は SISO のとき (66) 式の両辺を $L(s)$ で割ってプロパにしているが，ここでは $L(s)$ は行列であり，同様の演算はできない．そこで，MIMO 系においてもプロパ性が満たされるよう，適当な $\bar{\rho}$ 次の Hurwitz 多項式 $\ell(s)$ を取り，

$$\frac{1}{\ell(s)}u = \Theta_0 \frac{1}{\ell(s)}\xi - \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_F \\ \hline F_0 & H_0 \end{array} \right] \frac{1}{\ell(s)}L(s)e \quad (67)$$

$$= \begin{bmatrix} F_0 & G_0 & H_0 \end{bmatrix} \tilde{\xi}, \quad (68)$$

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{\ell(s)}\xi - \begin{bmatrix} (sI - A_F)^{-1}B_F \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} \frac{1}{\ell(s)}L(s)e \quad (69)$$

と計算する．

したがって，未知パラメータに線形な誤差モデル

$$\epsilon = \frac{1}{\ell(s)}u - \hat{u}, \quad \hat{u} = \Theta(t)\tilde{\xi}(t) \quad (70)$$

が構築される．そこで，固定ゲイン型のパラメータ調整則は，適当なスカラ α を用いて

$$\frac{d}{dt}\Theta(t) = \alpha\epsilon(t)\tilde{\xi}(t)^T, \quad \alpha > 0 \quad (71)$$

と構成される．次に，可変ゲイン型は，

$$\frac{d}{dt}\Theta(t) = \epsilon(t)\tilde{\xi}(t)^T Z(t) \quad (72)$$

と構成すればよい．ただし， $Z(t)$ は信号ベクトル $\tilde{\xi}(t)$ を含む以下の行列微分方程式の解行列である．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Z(t) &= -Z(t)\tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t)^T Z(t), \\ Z(0) &= \sigma I, \quad \sigma \gg 1 \end{aligned} \quad (73)$$

さらに，これを忘却型の学習則へ拡張するには，(73) 式を忘却係数 λ を用いた行列微分方程式

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \lambda Z(t) - Z(t)\tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t)^T Z(t) \quad (74)$$

に書き改めればよい．なお，これは， $\lambda = 0$ とおけば可変ゲイン型の学習則を含んでいることは当然である．

4.3 安定性解析

ここでは提案した FEL 制御系を解析する．まず，これまで指摘されていないが，Muramatsu ら [8] と本章に共通する注意点を述べる．

【注意 4.2】 前節の構成では FF 制御器の分母多項式 $g(s)$ を実現するため u をフィードバックしているが，これが閉ループ系にも影響を与えることに注意しよう．このことは図 38 のブロック線図を等価変換した図 39 から分かる．実際，学習パラメータが真値であっても (59) 式を用いることで

$$\begin{aligned} u &= (I - G_0(sI - A_f)^{-1}B_f)^{-1} (u_{fb} + (F_0\xi_f + H_0r)) \\ &= \left(\frac{f(s)}{g(s)} I_m \right) (u_{fb} + F_0\xi_f + H_0r) \end{aligned} \quad (75)$$

となり，閉ループに $(f(s)/g(s)) I_m$ という因子が挿入されている．また，学習の途中では，上式の $g(s)$ が

$$G(s) := f(s) - \bar{G}(t)(1, s, \dots, s^{\nu-1})^T$$

で置き換えられる．そこで，この因子が閉ループ系の安定性を損なわないという仮定が必要となる． $K_{fb}(s)$ による安定化が十分にロバストであれば，これは成立する．

◇

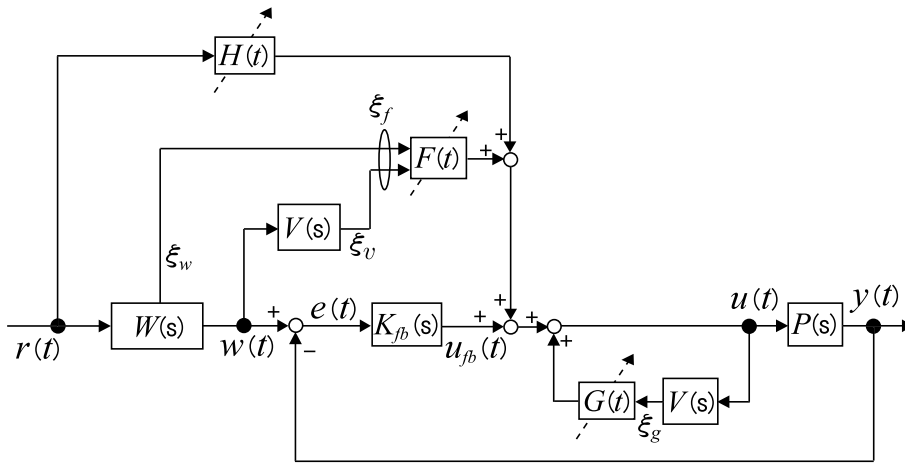


図 39 提案する MIMO-FEL の構成（等価変換されたブロック図）

さて，以下では提案の MIMO-FEL の学習則の安定性について，固定ゲイン型と可変ゲイン型に分けて解析を行う．

4.3.1 固定ゲイン型の学習則の安定性

まず，パラメータの誤差

$$\Psi(t) := \Theta(t) - \Theta_0 \tag{76}$$

を考え，(70) 式に (68) 式を用いると

$$\epsilon(t) = \Theta_0 \tilde{\xi}(t) - \Theta(t) \tilde{\xi}(t) = -\Psi(t) \tilde{\xi}(t) \tag{77}$$

を得る．これを，(71) 式に代入すると，

$$\frac{d}{dt}\Theta(t) = -\alpha\Psi(t)\tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t)^T, \alpha > 0 \quad (78)$$

となる．ここで，(76) 式を時間微分し，(78) 式を代入することで，

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = -\alpha\Psi(t)\tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t)^T, \alpha > 0 \quad (79)$$

が得られる．この系の安定性は以下の補題 4.1 によって確認できる．

【補題 4.1】 $\tilde{\xi}(t)$ を有界な任意の時変ベクトルとするとき，行列微分方程式 (79) の解は， $\Psi_0\tilde{\xi}(t) = 0$ であるような定数行列 Ψ_0 に収束する．もしも， $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たすならば， Ψ_0 は零行列に等しい．

(証明) リアプノフ関数

$$V(t) = \frac{1}{2}\text{tr} [\Psi(t)^T\Psi(t)] \quad (80)$$

を定義すると，この (79) 式に沿った時間微分は，

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \text{tr} [\Psi(t)^T\dot{\Psi}(t)] \\ &= -\alpha\text{tr} [\Psi(t)^T\Psi(t)\tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t)^T] \\ &= -\alpha\|\Psi(t)\tilde{\xi}(t)\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (81)$$

と計算される．これにより， $\dot{V}(t) \rightarrow 0$ ．よって， $\Psi(t)\tilde{\xi}(t) \rightarrow 0$ となる．そして，(79) 式において $\tilde{\xi}(t)$ が有界なので， $\frac{d\Psi(t)}{dt} \rightarrow 0$ となる．したがって， $\Psi(t) \rightarrow \Psi_0$ となり，このとき $\Psi_0\tilde{\xi}(t) = 0$ である．

さらに，もしも， $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たすならば，このとき学習則は大域的に指数安定である．すなわち，”PE と指数安定性定理” [14] に基づき $\Psi(t) \rightarrow 0$ である (詳細には，付録 C の公式を (79) 式に適用することによって示される)．◇

4.3.2 可変ゲイン型の学習則の安定性

以下，可変ゲイン型の学習則 ((72) 式と (73) 式) の安定性について考える [14]．まず，

$$A(t) := \sigma^{-1}I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \quad (82)$$

とおくと，よく知られた公式

$$\frac{d}{dt}(A(t)^{-1}) = -A(t)^{-1} \left(\frac{d}{dt}A(t) \right) A(t)^{-1}$$

により， $Z(t) = A(t)^{-1}$ は方程式 (73) の解であることが分かる．次に，初期値 $\Theta(0) = \Theta_*$ に対して

$$\Theta(t) := \left(\sigma^{-1}\Theta_* + \Theta_0 \int_0^t \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right) Z(t) \quad (83)$$

とおくと，これは方程式 (72) を満たすことが (68)，(70) 式より示される．これらの準備の下，次の補題 4.2 が得られる．

【補題 4.2】 $\tilde{\xi}(t)$ を有界な任意の時変ベクトルとし，可変ゲイン型の学習則 ((72) 式と (73) 式) を用いる．このとき，もしも， $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たすならば，(76) 式に定めるパラメータの誤差 $\Psi(t)$ は，零行列に収束する．

(証明) (82)，(83) 式を用いることで，パラメータの誤差 $\Psi(t)$ は，次式のように記述できる．

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \Theta(t) - \Theta_0 \\ &= \left[\sigma^{-1}\Theta_* + \int_0^t \Theta_0 \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right] \left[\sigma^{-1}I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} - \Theta_0 \\ &= \sigma^{-1}(\Theta_* - \Theta_0) \left[\sigma^{-1}I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} \\ &= \sigma^{-1}\Psi(0) \left[\sigma^{-1}I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} \end{aligned} \quad (84)$$

さて， $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たせば，ある $\alpha_0 > 0$ ， $T_0 > 0$ に対して，

$$\int_t^{t+T_0} \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \geq \alpha_0 T_0 I, \quad \forall t \geq 0 \quad (85)$$

が成り立つ [17]．これより，

$$\begin{aligned} &\int_0^{NT_0} \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \\ &= \int_0^{T_0} \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau + \int_{T_0}^{2T_0} \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau + \cdots \geq \alpha_0 T_0 N I \end{aligned} \quad (86)$$

が成り立つ．さらに，(86) 式の両辺に $\sigma^{-1}I$ を加えると，

$$\sigma^{-1}I + \int_0^{NT_0} \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \geq \sigma^{-1}I + \alpha_0 T_0 N I \quad (87)$$

となる．(87) 式の両辺でそれぞれ逆行列を求めると，

$$0 \leq \left[\sigma^{-1}I + \int_0^{NT_0} \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} \leq \frac{1}{\sigma^{-1} + \alpha_0 T_0 N} I \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty \quad (88)$$

の関係を得る．したがって， $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たせば， $t \rightarrow \infty$ のときに，

$$\left[\sigma^{-1}I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} \rightarrow 0 \quad (89)$$

となり，よって， $\Psi(t) \rightarrow 0$ となる． \diamond

【定理 4.1】 信号 $\tilde{\xi}$ が PE 条件を満たすとの仮定の下，上記の学習則により制御目的

$$e(t) = w(t) - y(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

が達成される．

(証明) PE 条件の下では学習パラメータが真値に収束し，(75) 式が成立する．さらに，(54) 式，(57) 式より

$$u = \frac{f(s)}{g(s)} u_{fb} + Q(s)r$$

となる．一方，このときも閉ループ系が安定であると仮定しているので，学習後の定常状態では

$$e(t) \rightarrow 0, \quad u_{fb}(t) \rightarrow 0$$

が成り立つ．これらより漸近的に $u(t) \rightarrow u_0(t)$ となるので，定理は成立する． \diamond

【注意 4.3】 Muramatsu ら [8] は $\epsilon \rightarrow 0$ からある種の逆システムを介して $e \rightarrow 0$ を示しているが，この逆システムが安定となるとは限らないので，本章では PE 条件を仮定した上記のような議論を行った．例えば， r が矩形波であるような場

合には， $\tilde{\xi}$ が PE 条件を満たすことをシミュレーションにて確認した．しかしながら，現時点においては，どのような外生信号 r に対して， $\tilde{\xi}$ が PE 条件を満たすのかは明らかでない．これについては今後の課題としたい． \diamond

【注意 4.4】 定理では，PE 条件を仮定している．しかしながら，次節のシミュレーションでは，この仮定がなくても， $e(t) \rightarrow 0$ は達成される． \diamond

4.4 シミュレーション 1 (簡単な例)

4.4.1 SISO プラント

本項では，単一周波数の正弦波を目標軌道とし，提案法と従来法，合わせて 4 種類の手法を比較する．

有限零点が存在しない SISO プラント

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 12}$$

を考える．このとき， $n = 2, \bar{\rho} = \rho = \rho_1 = 2$ であるから， $L(s) = (1/4)s^2 + s + 1$ と定めると，プレフィルタは，

$$W(s) = L(s)^{-1} = \frac{1}{(1/4)s^2 + s + 1}$$

となる．この最小実現 (A_w, B_w, C_w) は，

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_w = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

と与えられる．また， $n - \rho = 2 - 2 = 0$ より，行列 A_f, B_f は零次元となるので， $A_F = A_w, B_F = B_w$ であり，プレフィルタ統合型 FEL では状態変数 ξ_w のみによって FF 制御が可能である．さらに，FB 制御器は，Muramatsu ら [8] と同じく，

$$K_{fb}(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

を用いる．このとき，伝達関数

$$M(s) = K_{fb}(s)W(s)\Gamma(s), \tag{90}$$

$$\Gamma(s) = [H_0 + F_0(sI - A_f)^{-1}B_f + K_{fb}(s)W(s)]^{-1}$$

は相対次数が4次となり，強正実条件（Miyamuraら [7] の仮定）を満たさないことに注意しよう．実際， $M(s)$ のナイキスト軌跡は，以下のようになり， $\omega \rightarrow \infty$ で $360[\text{deg}]$ 回転する．

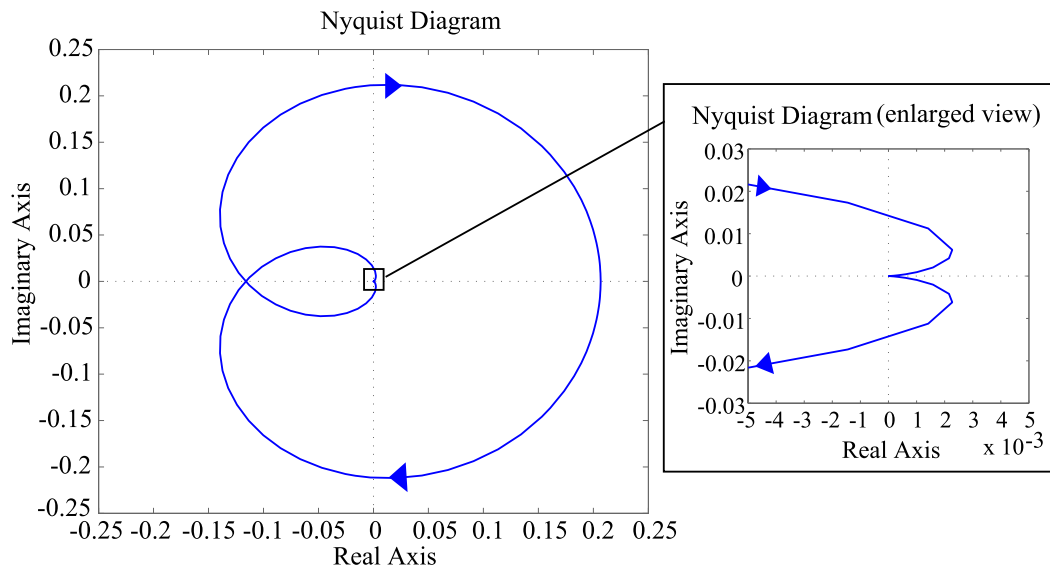


図 40 伝達関数 $M(s)$ のナイキスト軌跡

以下のシミュレーションでは，目標軌道として， $r = \sin(2\pi(1/4)t)$ を用いるが，紙数の節約上，ほとんどの場合で追従誤差のみ図示する．

まず野口ら [51] と Muramatsu ら [8] によるシミュレーションを行う． $\bar{\rho} = 2$ であるから，後者では FF 制御器のフィルタを

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f^2 & -2f \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f = 5 \quad (91)$$

と設定し，また，学習率（固定ゲイン）を，従来法 [51] では $\alpha = 0.2$ と，従来法 [8] では $\alpha = 50$ としている．

野口ら [51] による目標軌道追従誤差を図 41 に，Muramatsu ら [8] による目標軌道追従誤差を図 42 に，示している．前者 [51] では，誤差が収束せず，学習が不安定になっていることがわかる．これは，(90) 式が強正実でないことから予想された通りである．

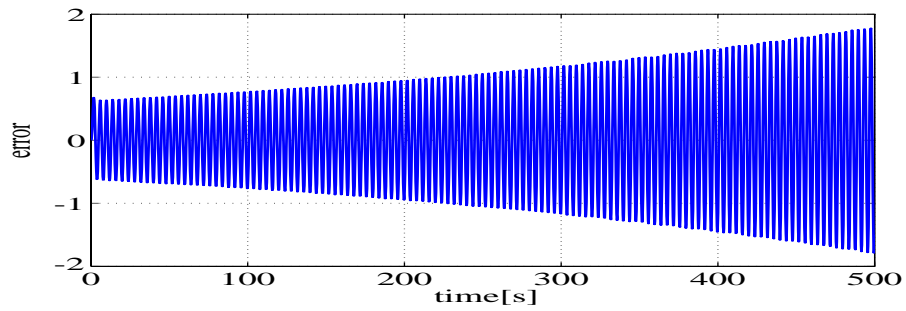


図 41 従来法（野口ら [51]）による目標軌道追従誤差

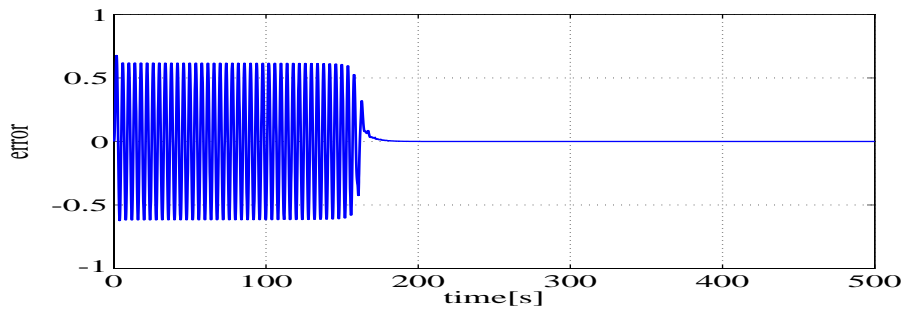


図 42 従来法（Muramatsu ら [8]）による目標軌道追従誤差

次に、提案する固定ゲイン型および可変ゲイン型の学習則を利用した際の目標軌道追従誤差をそれぞれ、図 43 と図 44 に示す。このとき、固定ゲイン型の学習則では、 $\alpha = 50$ とし、可変ゲイン型の学習則では、 $\sigma = 50000$ と設定している。後者の収束が著しく速いことが分かる。

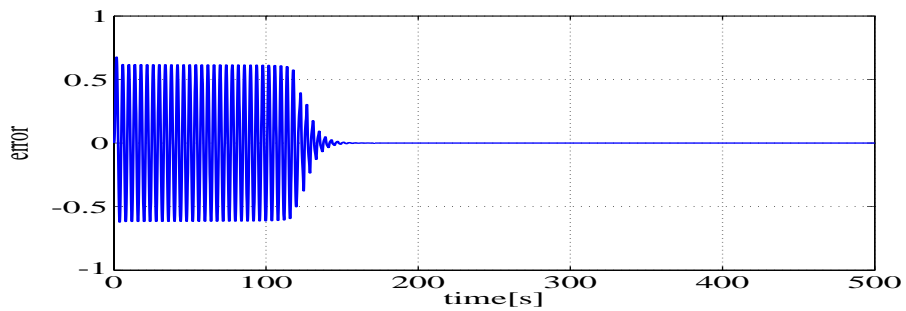


図 43 提案法による目標軌道追従誤差（固定ゲイン型）

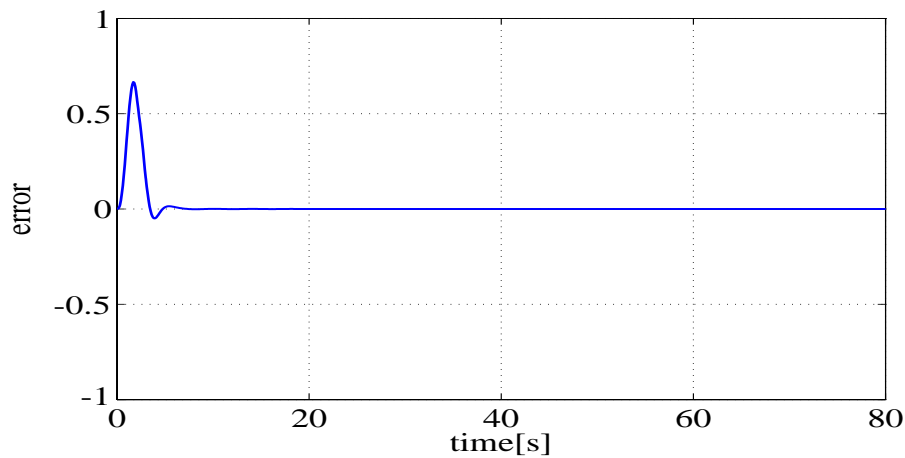


図 44 提案法による目標軌道追従誤差 (可変ゲイン型)

さらに, Muramatsu ら [8] による図 42 と固定ゲイン型の提案法による図 43 を比較しても, 誤差の収束は後者がやや速いことが分かる. これは提案法ではプレフィルタ統合型のため学習が冗長でない (パラメータが少ない) ためと考えられるが, SISO ではその差は顕著とは言えない.

図 44 のケースのみ, 目標軌道追従特性も図 45 に示しておこう. $y(t)$ が $w(t)$ に収束する様子を確認できる.

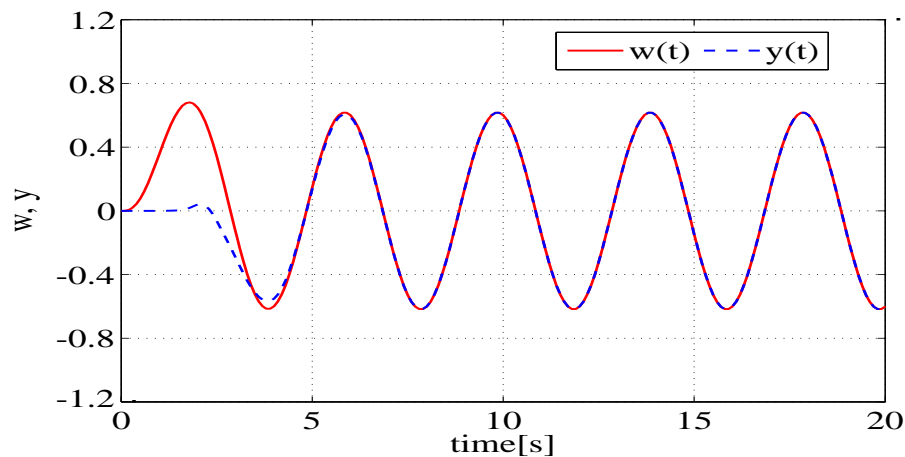


図 45 提案法による目標軌道追従特性 (可変ゲイン型)

提案法における学習パラメータ $\Theta(t)$ の収束を確認しよう. 上記シミュレーショ

ンにおける固定ゲイン型および可変ゲイン型の学習則を利用した際の学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展を図 46, 47 に示している．パラメータは一定値に収束している．一方，提案の FF 制御器の真値を求めると，

$$\begin{aligned}
 Q(s) &= P(s)^{-1}W(s) = \frac{4(s^2 + 7s + 12)}{s^2 + 4s + 4} = 4 + \frac{12s + 32}{s^2 + 4s + 4} \\
 &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \\ \hline 32 & 12 & 4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_w & B_w \\ \hline F_0 & H_0 \end{array} \right] \tag{92}
 \end{aligned}$$

と計算できる．よって，パラメータの真値が， $F_0 = [32 \ 12]$ ， $H_0 = 4$ と求まるが，図 46, 47 の収束値はこれらに一致しない．これは $r(t)$ が正弦波のため $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たさないことの帰結である．にも関わらず出力 $y(t)$ が $w(t)$ に正しく追従している．このことは証明できていないが，多くの例題にて十分な検証を行い，提案法の有効性を確認している．

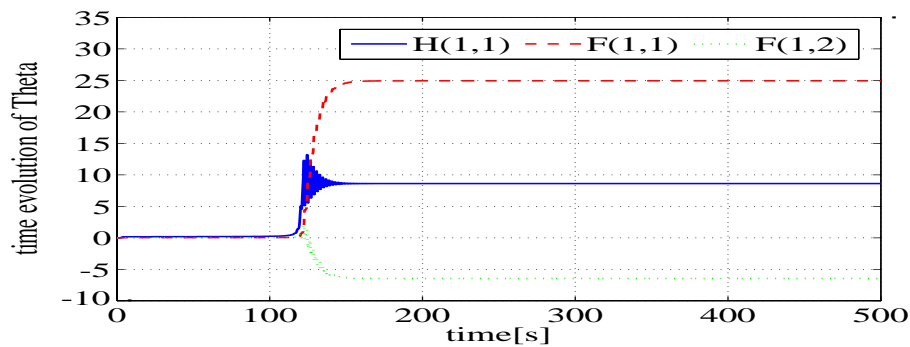


図 46 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (固定ゲイン型)

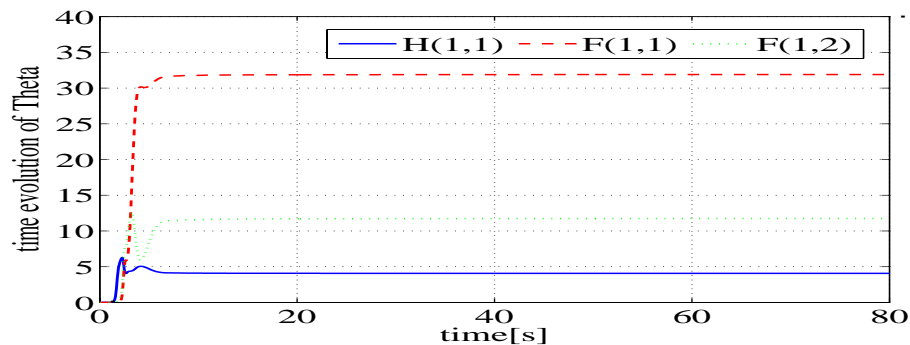


図 47 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)

4.4.2 MIMO プラント 1 (安定なプラント)

プラントとして、有限零点が存在しない例

$$P(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} s+2 & -s \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

を考える．このとき， $n = 2, \rho_1 = 1, \rho_2 = 1, \rho = \rho_1 + \rho_2 = 2, \bar{\rho} = \max(\rho_1, \rho_2) = 1$ であるから， $L(s) = \text{diag}((1/4)s + 1,$

$(1/4.5)s + 1)$ と定めると，プレフィルタは，

$$W(s) = L(s)^{-1} = \text{diag} \left[\frac{1}{(1/4)s + 1}, \frac{1}{(1/4.5)s + 1} \right]$$

となる．よって，この最小実現 (A_w, B_w, C_w) は，

$$A_w = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4.5 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_w = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4.5 \end{bmatrix}$$

と与えられる．また， $n - \rho = 2 - 2 = 0$ より，行列 A_f, B_f は零次元となる．このため， $A_F = A_w, B_F = B_w$ であり，プレフィルタの状態変数 ξ_w のみによって FF 制御が可能である．FB 制御器は，

$$K_{fb}(s) = \text{diag} \left[\frac{1}{s^2 + 3s + 3}, \frac{1}{s^2 + 3s + 3} \right]$$

を用いる．

いま，PE 性を満たさない典型的な例である正弦波を目標軌道として与える．以下のシミュレーションでは，周期と振幅が異なる 2 種類の正弦波，すなわち， $r = [r_1, r_2]^T$ ， $r_1 = \sin(2\pi(1/5)t), r_2 = 0.8 \cdot \sin(2\pi(1/4)t)$ を用いている．

まず，Alali ら [9] によるシミュレーションを行った (Muramatsu らの方法は MIMO ではないため，ここでは比較できない)． $\bar{\rho} = 1$ であるから，FF 制御器のフィルタを

$$A_f = \begin{bmatrix} -f & 0 \\ 0 & -f \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, f = 3 \quad (93)$$

と設定し，また，学習率 (固定ゲイン) を $\alpha = 0.3$ としている．

従来法による目標軌道追従誤差を図 48 に示している．誤差が収束せず，学習が不安定になっていることがわかる．

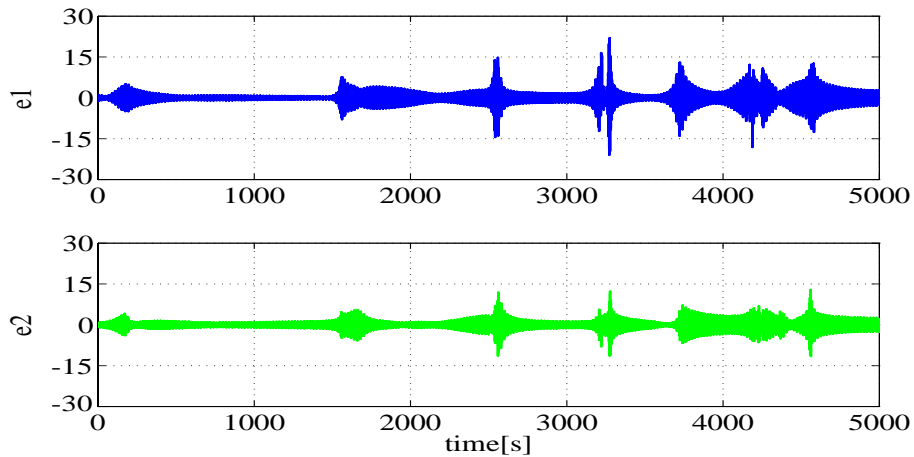


図 48 従来法 (Basel ら [9]) による目標軌道追従誤差

次に提案の固定ゲイン型および可変ゲイン型の学習則を利用した際の目標軌道追従誤差をそれぞれ，図 49 と図 50 に示している．このとき，固定ゲイン型の学習則では， $\alpha = 100$ とし，可変ゲイン型の学習則では， $\sigma = 50000$ と設定している．

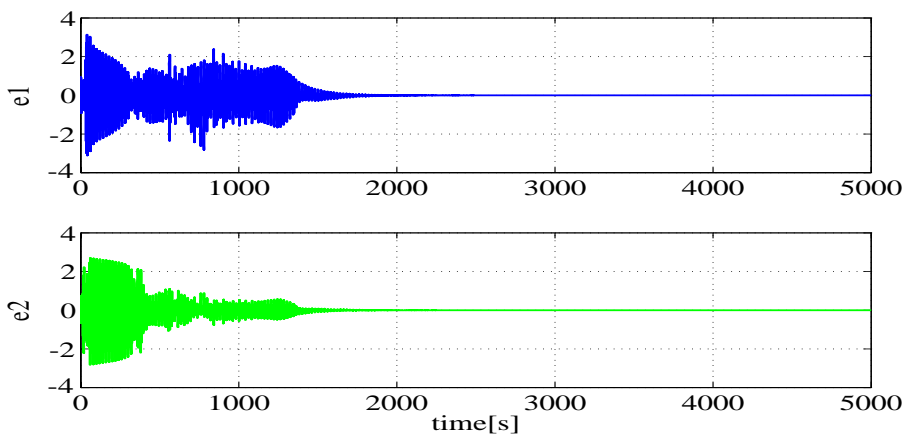


図 49 提案法による目標軌道追従誤差 (固定ゲイン型)

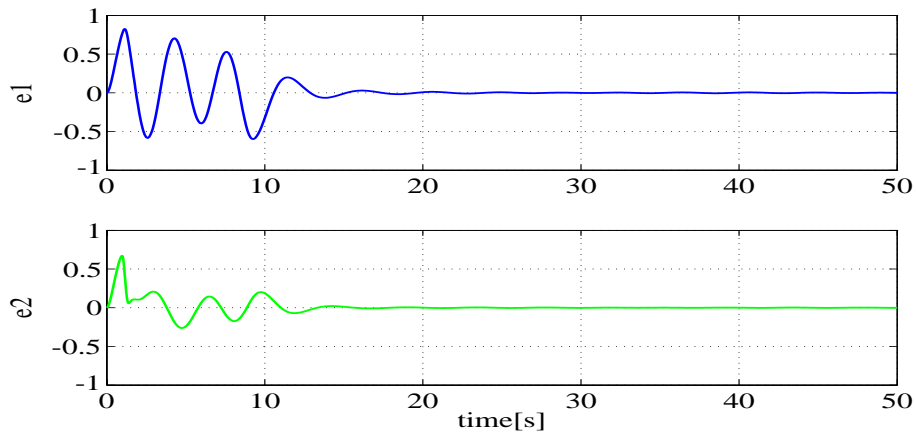


図 50 提案法による目標軌道追従誤差 (可変ゲイン型)

MIMO でも同様に，提案法における学習パラメータ $\theta(t)$ の収束を確認しよう．
 まず，提案の FF 制御器の真値を求める．FF 制御器 $Q(s)$ は，

$$\begin{aligned}
 Q(s) &= P(s)^{-1}W(s) \\
 &= \begin{bmatrix} s+1 & s \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{s+4} & 0 \\ 0 & \frac{4.5}{s+4.5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{4s+4}{s+4} & \frac{4.5s}{s+4.5} \\ \frac{4}{s+4} & \frac{4.5s+9}{s+4.5} \end{bmatrix} \\
 &= \left[\begin{array}{cc|cc} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4.5 & 0 & 1 \\ \hline -12 & -20.25 & 4 & 4.5 \\ 4 & -11.25 & 0 & 4.5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_w & B_w \\ \hline F_0 & H_0 \end{array} \right] \tag{94}
 \end{aligned}$$

と計算できる．よって，パラメータの真値が，

$$F_0 = \begin{bmatrix} -12 & -20.25 \\ 4 & -11.25 \end{bmatrix}, \quad H_0 = \begin{bmatrix} 4 & 4.5 \\ 0 & 4.5 \end{bmatrix}$$

と求まる．

次に，提案法の上記シミュレーションにおける学習パラメータの時間発展を示す．固定ゲイン型および可変ゲイン型の学習則を利用した際の学習パラメータ $\theta(t)$ の時間発展を図 51, 52 に示している．

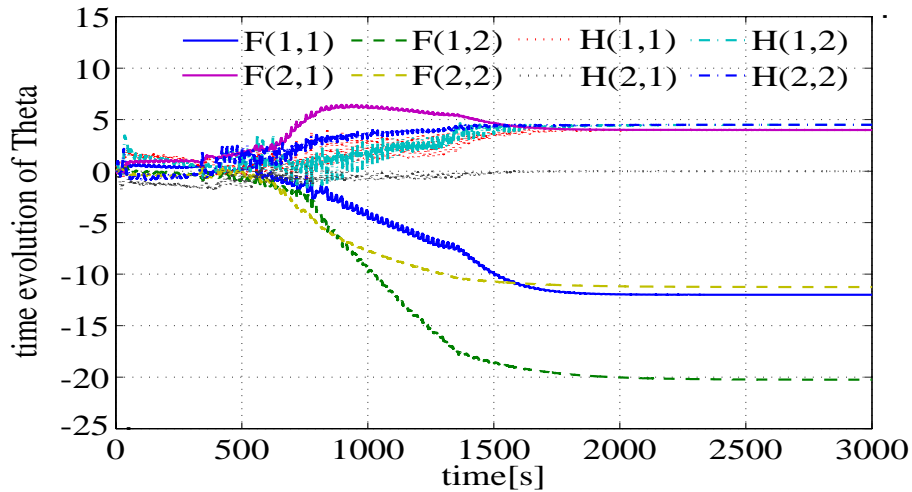


図 51 学習パラメータ $\theta(t)$ の時間発展（固定ゲイン型）

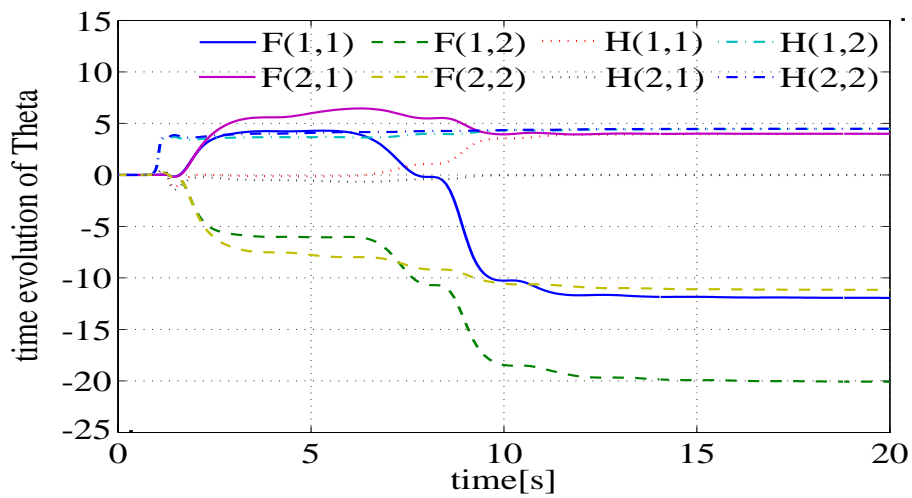


図 52 学習パラメータ $\theta(t)$ の時間発展（可変ゲイン型）

パラメータは確かに収束しているが，真値には収束していない．これは $r(t)$ が正弦波のため $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たさないことの帰結である．にも関わらず出力 $y(t)$ が $w(t)$ に正しく追従している．

4.4.3 MIMO プラント 2 (不安定なプラント)

プラントとして、不安定かつ有限零点が存在しない例

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{s^2+5s} & \frac{1}{s^2+5s} \\ \frac{2}{s^2-s} & \frac{3}{s^2-s} \end{bmatrix}$$

を考える． $P(s)$ の 4 つの極は， $[0, 0, -5, 1]$ である．このとき， $n = 4, \rho_1 = 2, \rho_2 = 2, \rho = 4$ であるから，プレフィルタを $W(s) = L(s)^{-1} = \text{diag}(\ell_1(s), \ell_2(s))$ ， $\ell_1(s) = (1/16)s^2 + (8/16)s + 1$ ， $\ell_2(s) = (1/20.25)s^2 + (9/20.25)s + 1$ と定めると，この最小実現 (A_w, B_w, C_w) は，

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_1^2 & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_2^2 & -2a_2 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_w = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = 4.5$$

と与えられる．また， $n - \rho = 0$ より，フィルタ $V(s)$ は不要となる．安定化には定数 FB ゲイン $K_{fb} = \text{diag}[10, 10]$ を用いる．目標軌道は前例と同じ正弦波（2 種類）を用いることとする．

可変ゲイン型の学習則を利用した際の目標軌道追従誤差を図 53 に示している．ここで，可変ゲインは $\sigma = 50000$ と設定している．

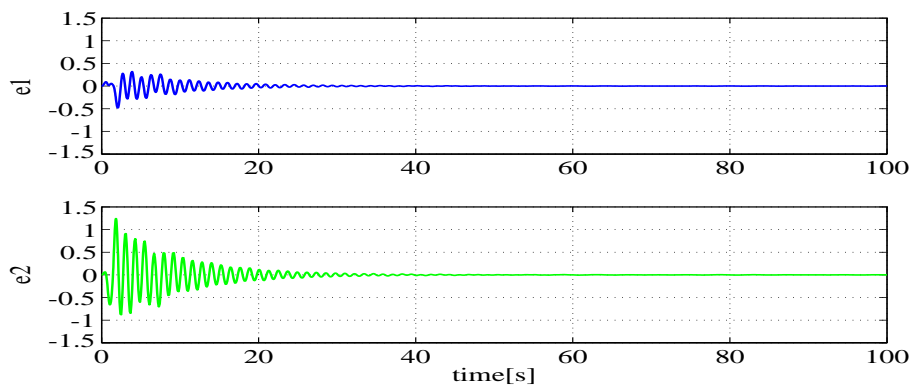


図 53 提案法による目標軌道追従誤差（可変ゲイン型）

この結果より，提案法は不安定プラントに対しても有効であることがわかる．また，上記シミュレーションにおける学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展を図 54 に示している．学習パラメータが一定値に収束していることがわかる．ただし， $r(t)$ が正弦波であり， $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たさないため， $\Theta(t)$ は真値には収束していない．

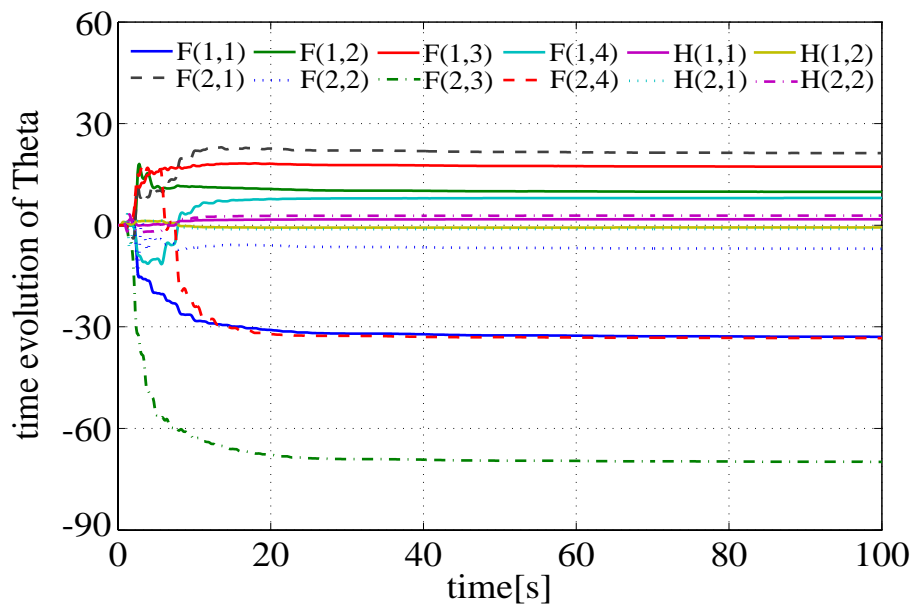


図 54 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展（可変ゲイン型）

4.5 シミュレーション 2（実問題を想定した例）

本節では，前節よりも実問題に近い例（具体例）をとりあげ，提案法の有効性を検討する．

4.5.1 模型自動車の制御

ここでは 3 章と同様に，(45) 式に示す模型自動車のモデル $P(s) = \frac{9}{s^2}$ の制御を行う． x_2 軸の正方向へ， x_2 軸を中心におきながら正弦波状にくねくねと進行するタスクを実現しよう．シミュレーションにおける条件は，3 章のものと同様であるとす

る．単一周波数の正弦波を目標軌道とし，提案法 [52] と従来法 [8] とを比較する．プラントにおいて， $n = 2, \bar{\rho} = \rho = \rho_1 = 2$ であるから， $L(s) = (1/25)s^2 + (2/5)s + 1$ と定めると，プレフィルタは， $W(s) = L(s)^{-1}$ となる．この最小実現 (A_w, B_w, C_w) は，

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_w = \begin{bmatrix} 25 & 0 \end{bmatrix}$$

と与えられる．また，FB 制御器は近似 PD 制御器

$$K_{fb}(s) = K_p + K_d \frac{s}{0.01s + 1} = \frac{0.101s + 0.1}{0.01s + 1}$$

を用いる．ただし， $K_p = 0.1, K_d = 0.1$ としている．

以下のシミュレーションでは，目標軌道として， $r = 0.25 \sin(2\pi(1/5)t)$ を用いるが，ほとんどの場合で追従誤差のみ図示する．

従来法 [8] においては， $\bar{\rho} = 2$ であるから，FF 制御器のフィルタを

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f^2 & -2f \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f = 5 \quad (95)$$

と設定し，また，学習率 (固定ゲイン) を $\alpha = 50$ としている．提案法 [52] では $\nu = n - \rho = 2 - 2 = 0$ より，FF フィルタは不要であり，また，固定ゲインおよび可変ゲインをそれぞれ， $\alpha = 50, \sigma = 1 \times 10^4$ としている．以下，シミュレーション結果を示す．

まずは，上記 FB 制御器 $K_{fb}(s)$ で閉ループ系を安定化させたときの目標軌道追従特性 (FEL なし) を図 55 に示す．追従できていないことがわかる．

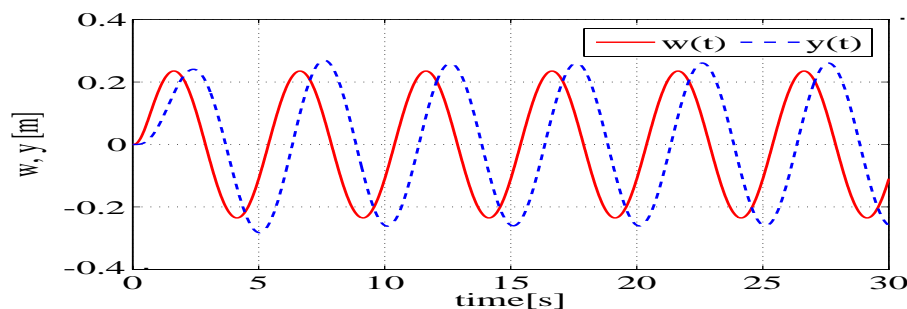


図 55 目標軌道追従特性 (FEL なし)

次に、この閉ループ系に従来法 [8] の FF 制御器を追加する．図 56 に目標軌道追従誤差を、図 57 に学習パラメータの時間発展を示している．良好な目標軌道追従が達成され、学習パラメータも収束していることがわかる．

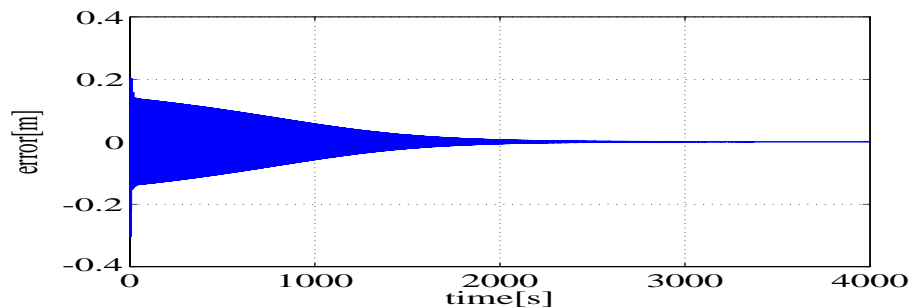


図 56 従来法による目標軌道追従誤差

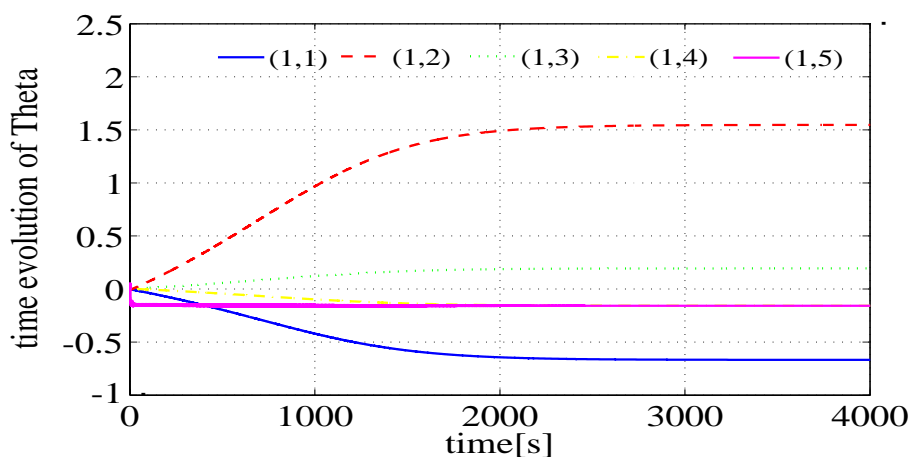


図 57 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展

また、時間の経過に伴う $x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡を図 58 と図 59 に示している．なお、この図では、0.25[s] 毎に印をつけて、 x_2 軸の正方向へ走行していく様子を表している．さらに、図 60 に模型自動車の絶対角度 $x_0(t)$ [rad] を、図 61 に制御入力 $u(t)$ [rad] を示している．これより、模型自動車のモデルが線形近似の範囲 ($x_0(t) \cong 0, u(t) \cong 0$) で正しく制御されている（機能している）ことがわかる．

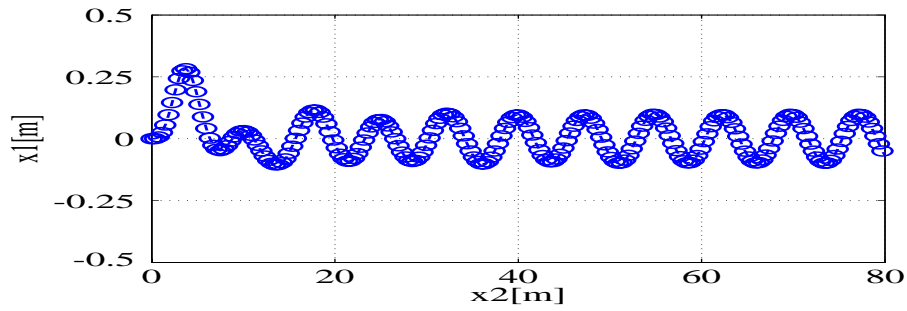


図 58 $x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態)

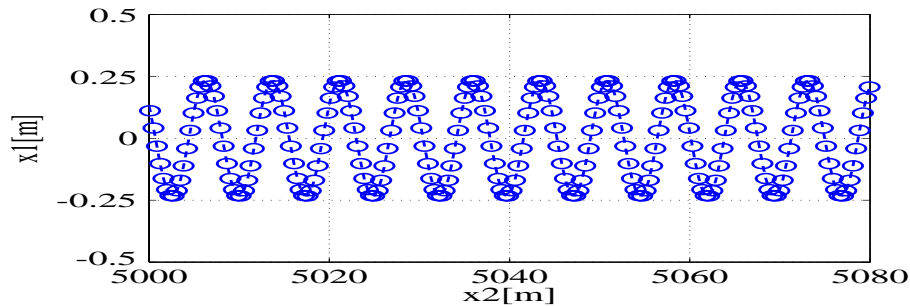


図 59 $x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡 (学習の定常状態)

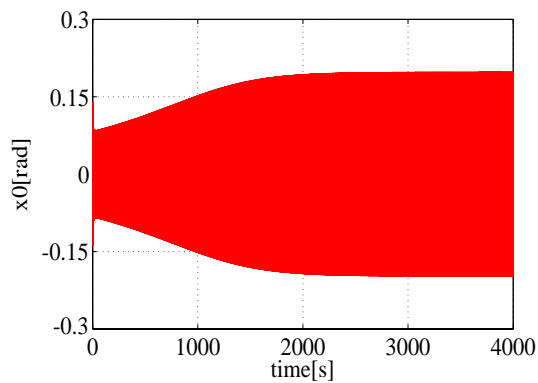


図 60 模型自動車の絶対角度 $x_0(t)$

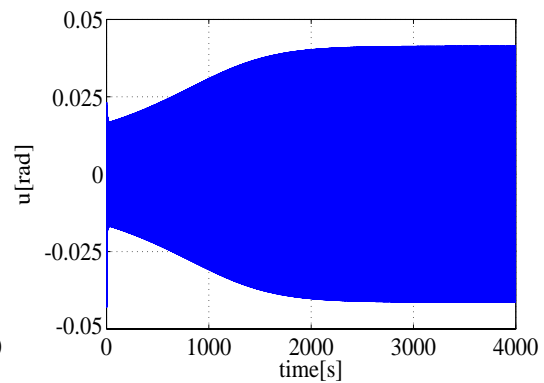


図 61 制御入力 $u(t)$

提案の固定ゲイン型および可変ゲイン型の学習則 [52] を利用した際の目標軌道追従誤差をそれぞれ, 図 62 と図 63 に示している. また, 対応する学習パラメー

タの時間発展をそれぞれ，図 64 と図 65 に示している．良好な目標軌道追従が達成され，学習パラメータも収束していることがわかる．提案法では従来法に比べて学習パラメータが 5 から 3 に減っているが，この例題では，学習速度に関して従来法と提案法（固定ゲイン型）との差はあまり顕著でない．それに対して，可変ゲイン型では収束が速い．

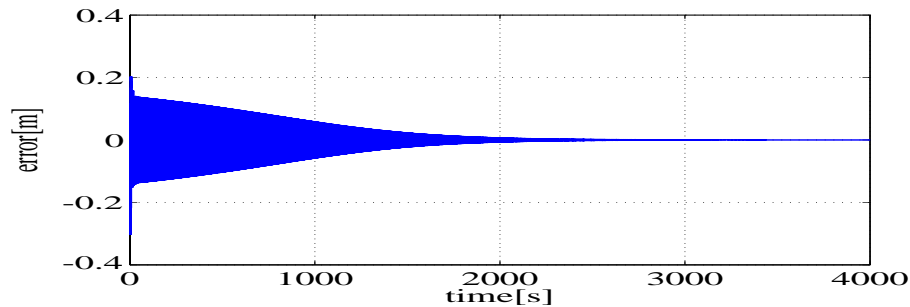


図 62 提案法による目標軌道追従誤差（固定ゲイン型）

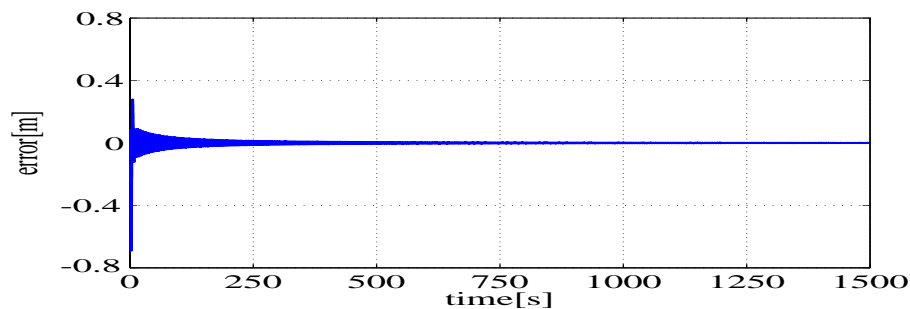


図 63 提案法による目標軌道追従誤差（可変ゲイン型）

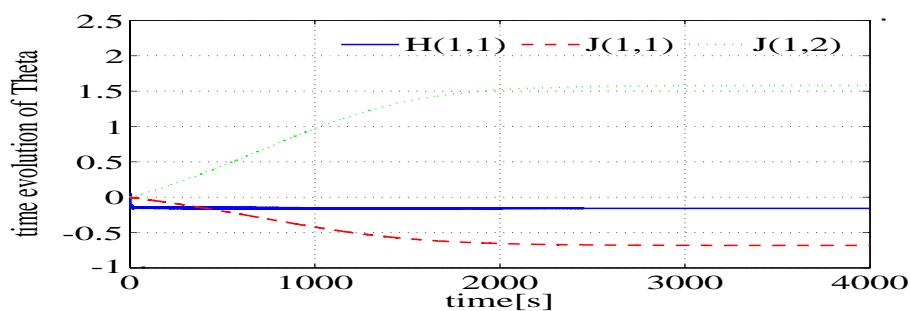


図 64 学習パラメータ $\theta(t)$ の時間発展（固定ゲイン型）

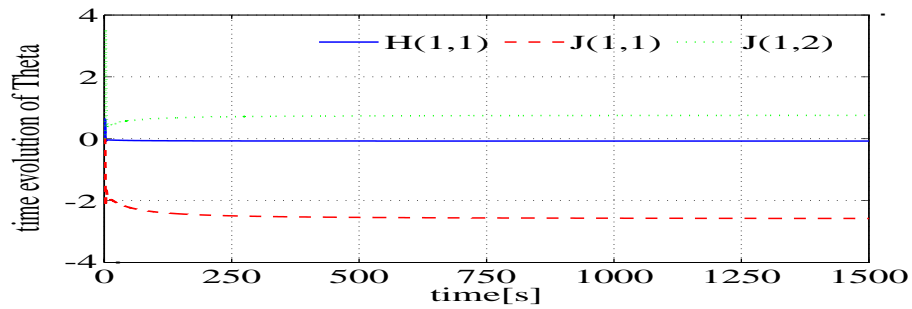


図 65 学習パラメータ $\theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)

また、時間の経過に伴う $x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡を、固定ゲイン型および可変ゲイン型についてそれぞれ、図 66 と図 67 に示す (学習の定常状態における走行軌跡は従来法と同じであるため、初期状態における走行軌跡のみを示す)。

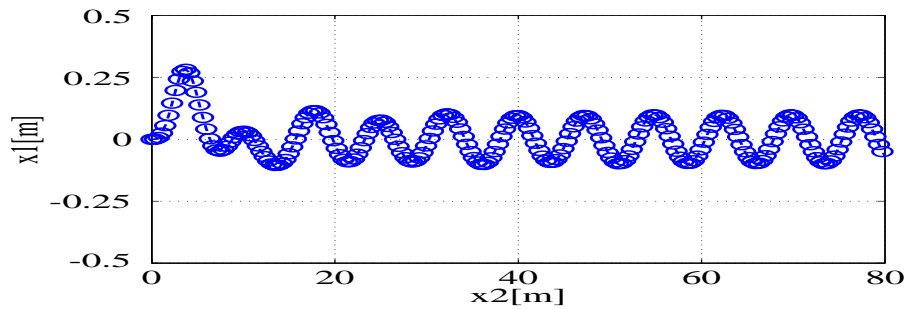


図 66 模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態, 固定ゲイン型)

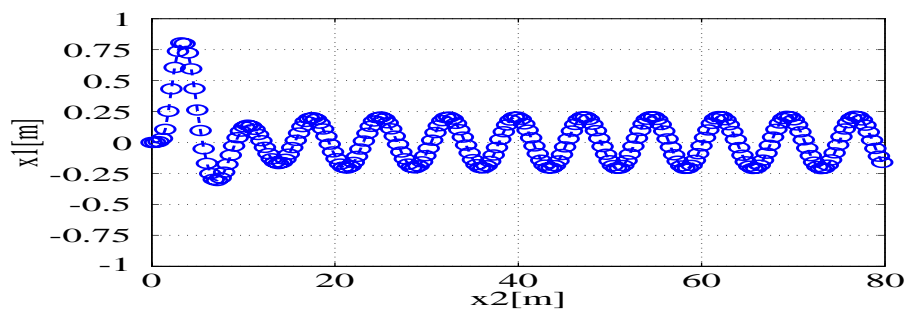


図 67 模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態, 可変ゲイン型)

さらに， $x_0(t)$ および $u(t)$ を，固定ゲイン型および可変ゲイン型についてそれぞれ，図 68,69, 図 70,71 に示している．従来法と同様，模型自動車のモデルが線形近似の範囲で正しく制御されている（機能している）ことがわかる．可変ゲインをさらに大きな値に設定すれば収束速度を改善できるが， $x_0(t)$ および $u(t)$ が線形近似の範囲から外れてしまうので，大きな値は扱えない．そのため，この例題においてはこれ以上の収束速度の改善は困難である．

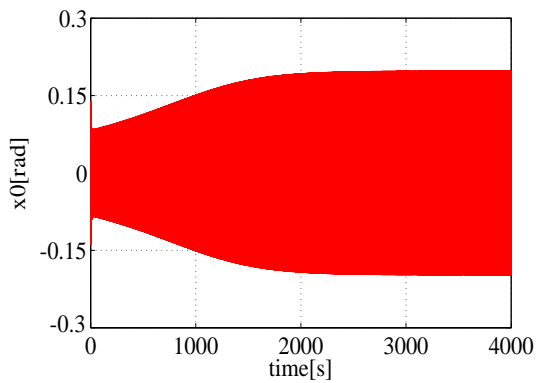


図 68 $x_0(t)$ (固定ゲイン型)

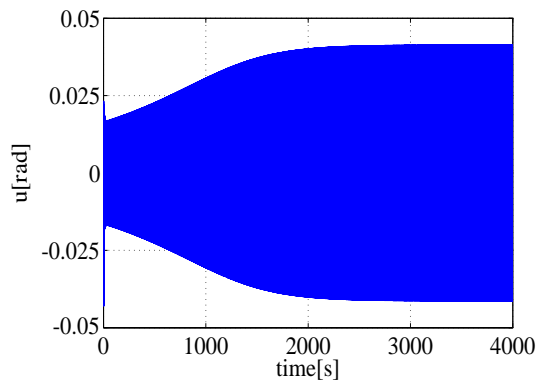


図 69 $u(t)$ (固定ゲイン型)

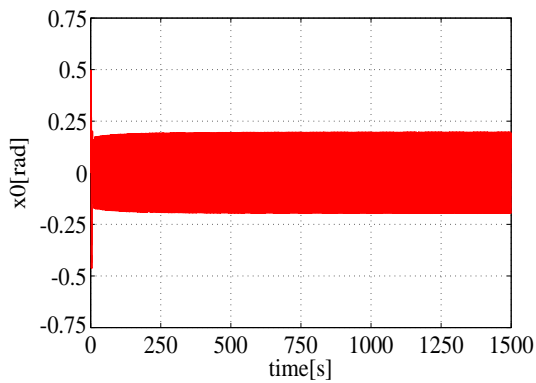


図 70 $x_0(t)$ (可変ゲイン型)

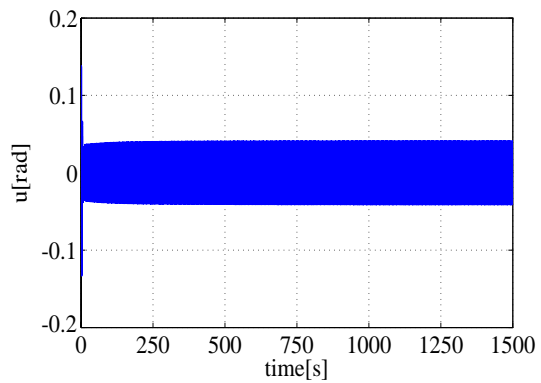


図 71 $u(t)$ (可変ゲイン型)

4.5.2 連結型台車の制御

ここでは3章と同様に, (51) 式に示す連結型台車のモデル

$$P(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} 2s^2 + 0.6667s + 3.333 & 0.6667s + 3.333 \\ 0.6667s + 3.333 & 3.333s^2 + 0.6667s + 3.333 \end{bmatrix},$$

$$d(s) = s^4 + 0.5333s^3 + 2.667s^2$$

の制御を行い, 提案法 [52] の有効性を検討する. 制御目的は, 出力 $y = [y_1, y_2]^T$ の位置決めであり, シミュレーションにおける条件は, 3章のものと同様であるとする. この $P(s)$ は有限零点を持たない不安定プラントであり, 閉ループ系の安定化に注意を要する. なお, $P(s)$ の4つの極は, $[-0.2667 \pm 1.6111i, 0, 0]$ である. このとき, $n = 4, \rho_1 = 2, \rho_2 = 2, \rho = 4$ であるから, プレフィルタを $W(s) = L(s)^{-1}, L(s) = \text{diag}(\ell_1(s), \ell_2(s)), \ell_1(s) = (1/16)s^2 + (8/16)s + 1, \ell_2(s) = (1/20.25)s^2 + (9/20.25)s + 1$ と定めると, この最小実現 (A_w, B_w, C_w) は,

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_1^2 & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_2^2 & -2a_2 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_w = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 & 0 \end{bmatrix}, a_1 = 4, a_2 = 4.5$$

と与えられる. また, $\nu = n - \rho = 0$ より, FF フィルタは不要となる. FB 制御器は, 近似 PD 制御器

$$K_{fb} = \text{diag} \left[Kp + Kd \frac{s}{0.01s + 1}, Kp + Kd \frac{s}{0.01s + 1} \right]$$

$$= \text{diag} \left[\frac{2.27s + 2}{0.01s + 1}, \frac{2.27s + 2}{0.01s + 1} \right]$$

を用いる. ただし, $Kp = 2, Kd = 2.25$ である. 目標軌道としては, 周期と振幅が異なる2種類の正弦波, すなわち, $r = [r_1, r_2]^T, r_1 = \sin(2\pi(1/5)t), r_2 = 0.8 \cdot \sin(2\pi(1/4)t)$ を用いる. また, 固定ゲインおよび可変ゲインをそれぞれ, $\alpha = 100, \sigma = 5 \times 10^4$ としている. 以下, シミュレーション結果を示す.

なお、本節では、提案法によるシミュレーション結果のみを示す（従来法 [9] との比較については、本節と同じ条件下で行った 3 章の連結型台車の制御シミュレーションを参照のこと）。

まずは、上記 FB 制御器 $K_{fb}(s)$ で閉ループ系を安定化させたときの目標軌道追従特性（FEL なし）を図 72 に示す。追従できていないことがわかる。

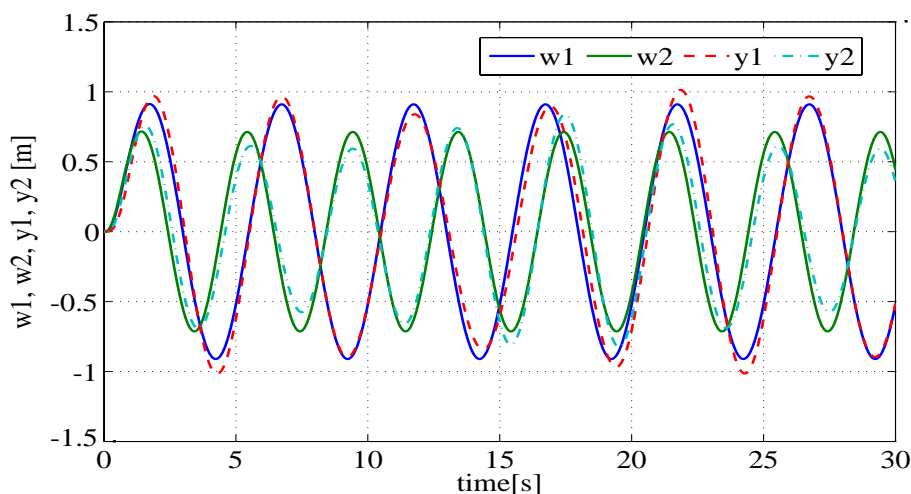


図 72 目標軌道追従特性（FEL なし）

提案の固定ゲイン型および可変ゲイン型の学習則 [52] を利用した際の目標軌道追従誤差をそれぞれ、図 73 と図 74 に示している。ここで、可変ゲイン型のみ目標軌道追従特性も図 75 に示す。また、対応する学習パラメータの時間発展をそれぞれ、図 76 と図 77 に示している。良好な目標軌道追従が達成され、学習パラメータも収束していることがわかる。可変ゲイン型は特に収束が速い。

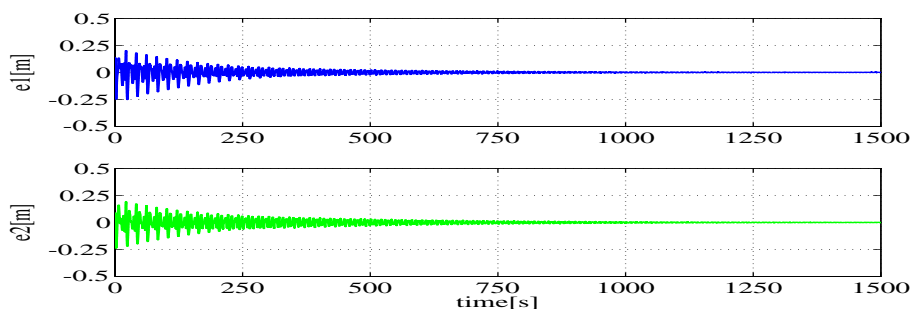


図 73 提案法による目標軌道追従誤差（固定ゲイン型）

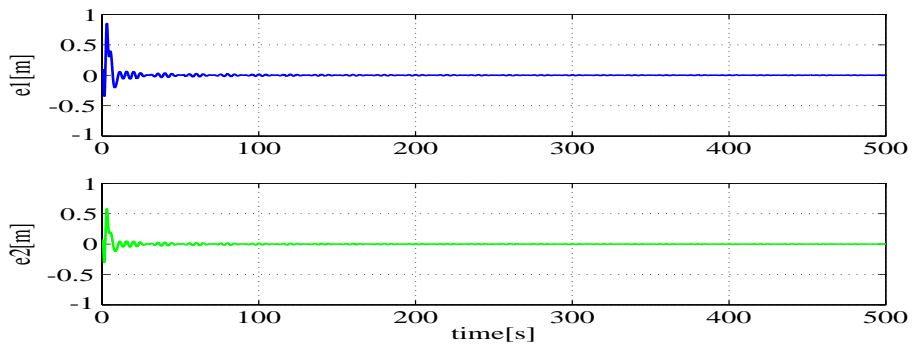


図 74 提案法による目標軌道追従誤差 (可変ゲイン型)

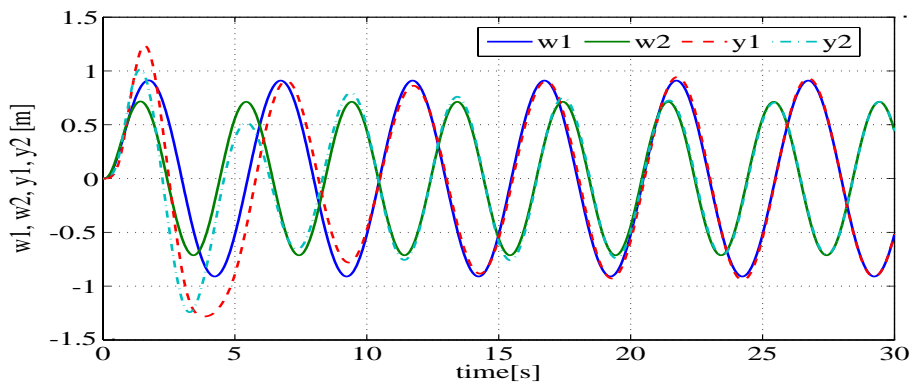


図 75 提案法による目標軌道追従特性 (可変ゲイン型)

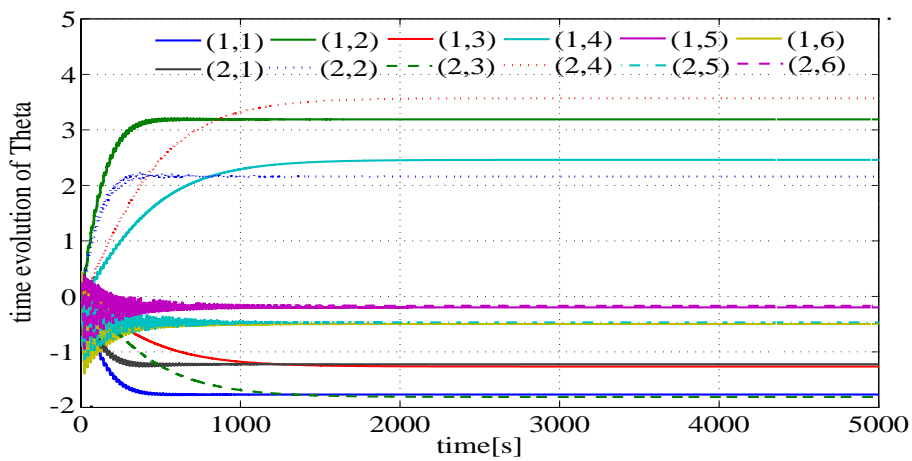


図 76 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (固定ゲイン型)

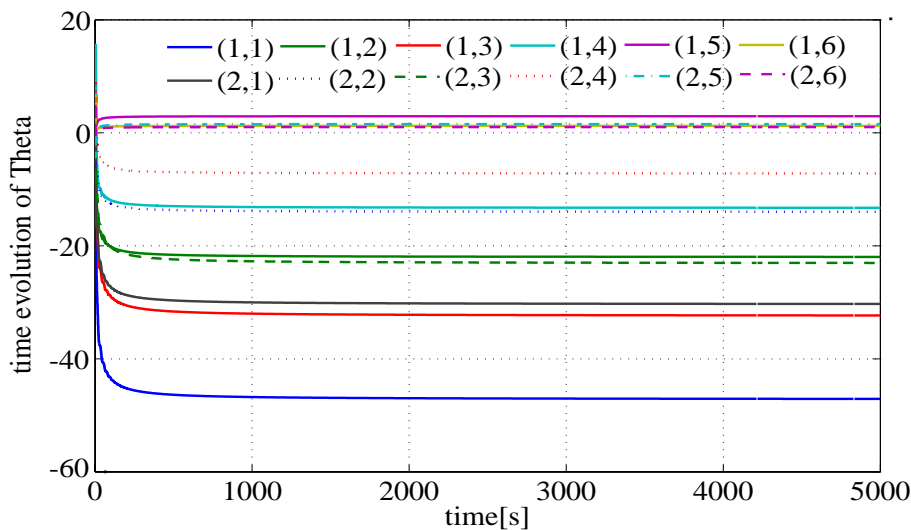


図 77 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)

4.6 シミュレーション 3 (乱数による探索)

ここでは 3 章と同様に，厳密にプロパなプラント

$$P(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

について，提案法 [52] の有効性を検討する．上記プラントの各係数は，乱数（生成する範囲は $[-100, 100]$ ）によって決定するものとする．ただし，これらの係数は，FB 制御器を

$$K_{fb}(s) = 0.5 + 0.5 \frac{s}{0.01s + 1}$$

と予め与えた上で，閉ループ系の極が安定となり，また，プラントが最小位相になるものだけを選択するものとする．前述のシミュレーション 2,3 とは異なり，特定のプラントではなく上記の仮定の範囲で無作為に抽出した 50 種類のプラントに対して学習が成功するかどうかを評価する．以下，表 6 と表 7 のプラントに対する評価をそれぞれ，表 8，表 9 に示す．

表 6 無作為に抽出したプラント (No.1 ~ 25)

$P(s)$ の No.	$P(s)$ の係数を与えるベクトル $V = [a_2, a_1, a_0, b_1, b_0]$
1	$V = [-78.1332, -22.0139, 18.1809, -8.1240, -89.9320]$
2	$V = [-71.9489, -47.9740, -82.6370, -14.1205, -48.5434]$
3	$V = [-51.2853, 57.0140, -85.1821, -21.2233, -99.3212]$
4	$V = [-55.8646, -99.7399, -62.1641, -71.5032, -46.3848]$
5	$V = [87.1323, 63.7429, 45.6524, -64.8377, -27.9258]$
6	$V = [-62.2420, -99.7603, -36.7161, 39.9234, 25.0510]$
7	$V = [-69.6106, -20.5782, -25.0555, -73.7771, -12.9919]$
8	$V = [28.4630, -55.7469, 67.4113, 94.2150, 69.2746]$
9	$V = [-9.5585, 50.4456, -78.0277, -78.0515, -46.0233]$
10	$V = [42.3313, 74.2953, -34.2621, 30.0236, 94.9672]$
11	$V = [-84.8065, 17.4038, -17.2227, -38.1727, -47.2332]$
12	$V = [11.7118, 51.3261, 99.0962, 92.4863, 7.0134]$
13	$V = [80.3982, 40.4133, -24.5090, 46.9912, 90.8206]$
14	$V = [-99.7162, -93.9229, -58.3060, -9.0068, -74.5468]$
15	$V = [26.6667, 24.8001, -34.4117, 60.5931, 99.8956]$
16	$V = [90.1581, -0.4846, 51.0292, 48.4810, 66.2259]$
17	$V = [-71.2183, 21.1918, -49.1038, -35.1692, -19.6418]$
18	$V = [-18.7253, -22.7618, 21.9604, -66.6219, -62.3816]$
19	$V = [38.5637, 64.8156, 65.5955, -41.3264, -38.1262]$
20	$V = [4.6060, -34.9402, 66.3685, 62.0590, 11.3997]$
21	$V = [-28.9186, -90.5845, -57.2679, -20.4322, -33.2664]$
22	$V = [86.4937, 52.6526, 65.2899, 14.6927, 58.5163]$
23	$V = [-34.1918, -55.3076, -37.5227, 16.9047, 65.9828]$
24	$V = [-54.3135, 30.3994, -86.7680, -44.9137, -43.6360]$
25	$V = [76.0133, -11.1339, 51.1828, 20.6593, 56.6532]$

表 7 無作為に抽出したプラント (No.26 ~ 50)

$P(s)$ の No.	$P(s)$ の係数を与えるベクトル $V = [a_2, a_1, a_0, b_1, b_0]$
26	$V = [55.0056, 82.8376, 56.5101, -40.8932, -69.6309]$
27	$V = [-47.8977, 37.9276, -73.6339, -75.2998, -61.8194]$
28	$V = [85.1716, -1.4723, 30.9766, 78.0247, 7.7051]$
29	$V = [-90.4425, -89.2045, -95.8764, 36.2957, 19.7257]$
30	$V = [-77.1940, 59.2491, 23.5701, -85.9573, -86.1442]$
31	$V = [-81.6256, -19.5823, -40.9638, -38.7006, -78.8878]$
32	$V = [2.2213, -26.6333, 47.8959, 4.9480, 60.9042]$
33	$V = [-60.0332, 21.4680, 8.6090, -67.5351, -98.8694]$
34	$V = [-0.3791, -2.5139, -54.1062, -82.8896, -86.5233]$
35	$V = [77.6782, -53.3665, 72.3192, 42.3470, 74.5626]$
36	$V = [30.6914, -2.0689, 94.5704, 49.6980, 13.5682]$
37	$V = [-44.3466, -32.0486, -42.5301, -65.8194, -20.1473]$
38	$V = [88.9568, 42.8943, 35.8439, 91.8761, 55.0669]$
39	$V = [-57.3459, -23.4124, -94.0664, -5.5358, -33.3255]$
40	$V = [65.2613, 98.2406, 4.7895, 85.0874, 47.8044]$
41	$V = [13.4860, 93.7555, 64.8999, 91.9219, 29.2692]$
42	$V = [-42.1030, -86.3258, -83.0059, -86.3321, -18.0367]$
43	$V = [14.2714, 25.7387, 75.5528, 32.4703, 75.0827]$
44	$V = [34.2328, 30.4842, 6.2098, 43.0214, 0.9621]$
45	$V = [66.5508, 45.3274, 5.9491, 65.8161, 2.3749]$
46	$V = [-2.3029, -68.0262, 33.3677, -96.4159, -76.0649]$
47	$V = [86.3232, 56.6204, 37.1374, -6.7561, -47.9364]$
48	$V = [13.8536, -50.2459, -36.1397, 82.1604, 77.0440]$
49	$V = [82.6365, 32.7937, -22.1614, 48.0015, 63.5270]$
50	$V = [-80.2740, 46.9118, 27.4613, -85.2316, -75.8984]$

表 8 プラント (No.1 ~ 25) に対する評価

$P(s)$ の No.	$P(s)$ の極	$P(s)$ の零点	$\ e\ _{L_2}$	評価
1	-0.6434, 0.3617	-11.0699	6.8761	
2	$-0.3334 + 1.0185i, -0.3334 - 1.0185i$	-3.4378	0.4513	
3	$0.5559 + 1.1627i, 0.5559 - 1.1627i$	-4.6798	0.7944	
4	$-0.8927 + 0.5620i, -0.8927 - 0.5620i$	-0.6487	0.1028	
5	$-0.3658 + 0.6246i, -0.3658 - 0.6246i$	-0.4307	5.9048	×
6	-1.0302, -0.5726	-0.6275	0.3819	
7	$-0.1478 + 0.5815i, -0.1478 - 0.5815i$	-0.1761	0.3266	
8	$0.9793 + 1.1872i, 0.9793 - 1.1872i$	-0.7353	0.5521	
9	$2.6388 + 1.0954i, 2.6388 - 1.0954i$	-0.5897	0.5517	
10	-2.1343, 0.3792	-3.1631	0.7976	
11	$0.1026 + 0.4388i, 0.1026 - 0.4388i$	-1.2374	0.7222	
12	$-2.1912 + 1.9131i, -2.1912 - 1.9131i$	-0.0758	0.3481	
13	-0.8580, 0.3553	-1.9327	0.7458	
14	$-0.4710 + 0.6024i, -0.4710 - 0.6024i$	-8.2768	0.9966	
15	-1.6925, 0.7625	-1.6486	0.5795	
16	$0.0027 + 0.7523i, 0.0027 - 0.7523i$	-1.3660	0.4924	
17	$0.1488 + 0.8169i, 0.1488 - 0.8169i$	-0.5585	0.5814	
18	-1.8496, 0.6341	-0.9364	0.5132	
19	$-0.8404 + 0.9974i, -0.8404 - 0.9974i$	-0.9226	3.9796	×
20	$3.7929 + 0.1514i, 3.7929 - 0.1514i$	-0.1837	0.6449	
21	-2.2537, -0.8787	-1.6281	0.1407	
22	$-0.3044 + 0.8138i, -0.3044 - 0.8138i$	-3.9827	0.6554	
23	$-0.8088 + 0.6658i, -0.8088 - 0.6658i$	-3.9032	12.3506	×
24	$0.2799 + 1.2326i, 0.2799 - 1.2326i$	-0.9716	0.5631	
25	$0.0732 + 0.8173i, 0.0732 - 0.8173i$	-2.7423	0.9245	

表 9 プラント (No.26 ~ 50) に対する評価

$P(s)$ の No.	$P(s)$ の極	$P(s)$ の零点	$\ e\ _{L_2}$	評価
26	$-0.7530 + 0.6785i, -0.7530 - 0.6785i$	-1.7028	1.3749	
27	$0.3959 + 1.1750i, 0.3959 - 1.1750i$	-0.8210	0.5300	
28	$0.0086 + 0.6030i, 0.0086 - 0.6030i$	-0.0988	0.4424	
29	$-0.4932 + 0.9038i, -0.4932 - 0.9038i$	-0.5435	7.5390	×
30	1.0565, -0.2890	-1.0022	0.8719	
31	$-0.1200 + 0.6982i, -0.1200 - 0.6982i$	-2.0384	0.4762	
32	9.7869, 2.2032	-12.3088	0.3367	
33	0.5976, -0.2400	-1.4640	0.5750	
34	$-3.3156 + 11.4773i, -3.3156 - 11.4773i$	-1.0438	859.09	×
35	$0.3435 + 0.9017i, 0.3435 - 0.9017i$	-1.7608	0.6629	
36	$0.0337 + 1.7551i, 0.0337 - 1.7551i$	-0.2730	0.4593	
37	$-0.3613 + 0.9102i, -0.3613 - 0.9102i$	-0.3061	0.3067	
38	$-0.2411 + 0.5872i, -0.2411 - 0.5872i$	-0.5994	0.2578	
39	$-0.2041 + 1.2644i, -0.2041 - 1.2644i$	-6.0200	0.7379	
40	-1.4549, -0.0504	-0.5618	0.3052	
41	-6.1724, -0.7797	-0.3184	0.2075	
42	$-1.0252 + 0.9594i, -1.0252 - 0.9594i$	-0.2089	0.2712	
43	$-0.9018 + 2.1168i, -0.9018 - 2.1168i$	-2.3123	0.1071	
44	-0.5750, -0.3154	-0.0224	0.2052	
45	-0.5036, -0.1775	-0.0361	0.1828	
46	-30.0225, 0.4826	-0.7889	259708	×
47	$-0.3280 + 0.5680i, -0.3280 - 0.5680i$	-7.0952	3.8099	
48	4.2419, -0.6150	-0.9377	0.7948	
49	-0.7530, 0.3562	-1.3234	0.8175	
50	0.9460, -0.3616	-0.8905	0.9193	

本シミュレーションでは，目標軌道として， $r = \sin(2\pi(1/5)t)$ を用いた．また， $L(s) = (1/25)s^2 + (2/5)s + 1$ と定め，プレフィルタを $W(s) = L(s)^{-1}$ と設定した．さらに，FF フィルタを

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f^2 & -2f \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f = 5 \quad (96)$$

と設定した．ここでは，提案法の能力を最も発揮できる可変ゲイン型の学習則を用い，その初期値を $\sigma = 1 \times 10^4$ と設定した．

3章と同様に，時刻 0~1000[s] までのシミュレーションを 50 種類のプラントについて行い，これらに対する追従誤差 $e(t)$ の L_2 ノルム $\|e\|_{L_2}$ も参考データとして示している．学習が失敗する場合には， $\|e\|_{L_2}$ が大きくなっていることがわかる（ただし，No.1 および No.47 のプラントは，初期時刻に大きなオーバーシュートがあり，結果 $\|e\|_{L_2}$ が大きくなっているが，表に示す通り，学習は成功している）．評価の結果，本節にて抽出されたプラントの集合に対しては，提案法は 88[%](=44/50) の確率で学習に成功することがわかる．これは手法 [51] と同じ成功率である．また，PE 性を満たさない目標軌道を与える場合は少なくないため，単一周波数の正弦波を用いて評価を行った．

上記の結果を得た一方，学習に失敗した全てのプラント（No.5, No.19, No.23, No.29, No.34, No.46）に対して，FB 制御器のみを $K_{fb}(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 3s + 3}$ と再設定し，その他は同じ条件でシミュレーションを行うと，5000[s] 以内に追従誤差 $e(t)$ が零に収束することを確認できる．

4.7 本章のまとめ

本章では，まず，プレフィルタ統合型 FF 制御器において，Muramatsu らの手法を多入出力系に拡張し，PE 条件の下，閉ループ系が正実でなくても出力誤差が 0 に収束する固定ゲイン型の学習則を示した．さらに，学習の効率改善を図るため，可変ゲイン型や忘却型の学習則を導入した．

シミュレーション 1 においては，正実性によらない提案法の有効性を確認するために，極端な例題を取り挙げているが，それにもかかわらず，提案法は十分な性能を示していることがわかる．

シミュレーション 2 では，SISO および MIMO プラントの具体例を扱った．提案法は具体例に対しても十分な性能を示すことがわかる．特に MIMO プラントでは，可変ゲイン型の学習則を用いると収束速度が格段に速くなる．

本章では，誤差信号の収束性に関して PE 条件の下での解析しか行っていない．そのため，一般の場合（PE 条件を満たさない場合）における解析が必要である．これについては今後の課題としたい．

5. 仮想フィードバック誤差学習

5.1 本章の概要

FELに基づく制御系の設計においては，閉ループ系が正実性を満たさなければならぬという条件は，非常に厳しい制約であった．そこで，前章にて，この問題を解決する手法を提案した．具体的には，プレフィルタ統合型 FEL[51]において，Muramatsuら [8]の手法を MIMO 系に拡張し，未知パラメータに線形な誤差モデルを導出した [52]．また，可変ゲイン型の学習則を導入し，パラメータの収束を速めた．

学習パラメータの冗長性や正実性の仮定の除去が行われたが，それでもなお，既存の FEL には，以下の (1) ~ (3) に示すように，文献 [8, 52] の手法に対する問題点が 1 つ，FEL の構成自体に対する問題点が 2 つ存在する．

- (1) 上記文献の手法では，正実性の仮定を除去した副作用で閉ループ系に時変ブロックが挿入される [8, 52]．そのため，閉ループ系が十分にロバストであり，その安定性をこの時変ブロックが損なわないという仮定が必要となる．
- (2) 一般に FEL では，閉ループ系への信号入力点が 2 点必要となる 2 自由度構成をとるため制御系の構成自体が複雑になる．また，プラントは正方 ($m \times m$) に限定され，その出力（整形したい被制御量）と目標信号の差のみをフィードバック（FB）制御器に加えるという制約があった．
- (3) FEL では，プラントの直前に入力される FF 制御信号は速応性の代償として急激な変化を伴うため，いわば入力外乱と見なせ，この外乱に閉ループ系が十分に耐えられることが必要である（特に，実験では影響が大きいと考えられる）．

そこで，本章では，上記問題点の解決を目的として，通常の 2 自由度構成によらない FEL 制御系（目標値フィルタ型の 2 自由構成による FEL 制御系）を提案する．まず FB 制御器を与えて閉ループ系を構成し，その応答特性を整形するために学習型 FF 制御器を直列結合により前置する．このため閉ループ系への入力

点が1つに削減され，FB制御器も自由に設計できるなど，問題点(2)，(3)を回避できる．つまり閉ループ系とFF制御器を分離して扱える．

次に，この学習型FF制御器が閉ループ系の逆システムとして動作するよう，Muramatsuら[8]の手法を改良する．すなわち，2自由度構成での誤差の代わりに，目標値と被制御量との差を利用することで問題点(1)も解決する．この差は実際にはフィードバックに用いられないことから本手法を“仮想フィードバック誤差学習”と呼ぶ．さらに，提案の学習則の収束性について，PE条件のもと解析する．最後に，本手法の有効性をシミュレーションによって確認する．

本章の構成は次の通りである．5.2では，まず準備として従来のFELについて簡単に説明した後，問題の定式化を行う．5.3では，提案法について説明する．まず，FF制御器の構成を示し，次に，その学習則について説明する．5.4では，提案の学習則の収束性について検討を行う．5.5～5.7では，シミュレーションにより本手法を検証する．

5.2 準備

本節では，まず従来のFELとその問題点について述べる．次に，本章で扱う制御系は3章および4章の構成と大幅に異なるため，プラント等に対する仮定を置き直すなど，あらためて問題の定式化を行う．

5.2.1 従来のFELと問題点

まず，既存の多入出力フィードバック誤差学習(MIMO-FEL)の構成を図78に示す．これは，文献[52]の構成を示すと同時に文献[9, 8, 51]を全て包含する図となっている．FF制御器に向かう点線で示された信号 $\xi_{w,u}(t)$ はそれぞれ，プレフィルタの状態変数(信号A)，制御入力(信号B)を取り出している．文献[9]では，点線A, Bの両方が存在しないが，文献[8]では，点線Aが存在せず，また，文献[51]では，点線Bが存在しない．

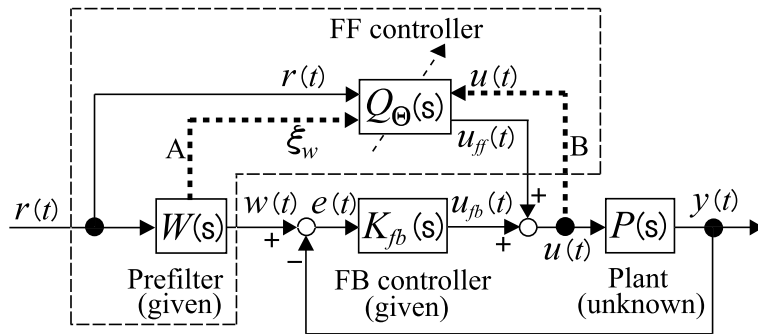


図 78 従来法による MIMO-FEL の構成

さて，FEL では，フィードバック誤差 $e(t)$ （もしくは $u_{fb}(t)$ ）に基づき，FF 制御器 $Q_{\Theta}(s)$ のパラメータ Θ を調整することによって，制御目的 $y(t) \rightarrow w(t)$ を達成していた．そしてこれまでに，多入出力化 [9] や学習則における正実性の除去 [8]，さらには，学習における冗長性の排除 [51][52] などが行われてきた．しかしながら，これら既存の FEL には，以下に示すように，3 つの問題点が存在する（特に (1),(3) については，実用上，深刻な問題と成り得る．学習が失敗し，出力が大きく振動もしくは発散する可能性がある．）．

1. 文献 [8, 52] の手法では， $P(s)$ が有限零点を含む場合，正実性の仮定を除去するため図 78 の信号 B を FF 制御に用いている．しかし，これを等価変換すると図 79 のようになり，点線で囲まれている時変ブロックが閉ループ系に挿入されてしまう．これは未知パラメータに線形な誤差モデルを構成するための副作用である．そのため，閉ループ系が十分にロバストであり，この時変ブロックが閉ループ系の安定性を損なわないという仮定が必要となる．
2. 一般に FEL では，図 78 に示すように，閉ループ系への信号入力点が 2 点必要（プレフィルタ $W(s)$ の出力信号 $w(t)$ の接続が 1 点，FF 制御器 $Q_{\Theta}(s)$ の出力信号 $u_{ff}(t)$ の接続が 1 点）となる 2 自由度構成をとるため制御系の構成自体が複雑になる．このため，正方 ($m \times m$) なプラントに限定され，その出力（整形したい被制御量）と目標信号の差のみをフィードバック (FB) 制御器に加えるという前提があった⁶．

⁶例えば，状態 FB は扱えない．

3. FEL では，プラントの直前に FF 制御信号 $u_{ff}(t)$ の接続が必要となる 2 自由度構成をとることにより，速応性を改善する．しかしながら，その代償として FF 制御信号 $u_{ff}(t)$ は急激な変化を伴うため，これに閉ループ系が十分に耐えられることが必要である（特に，実験では影響が大きいと考えられる）．

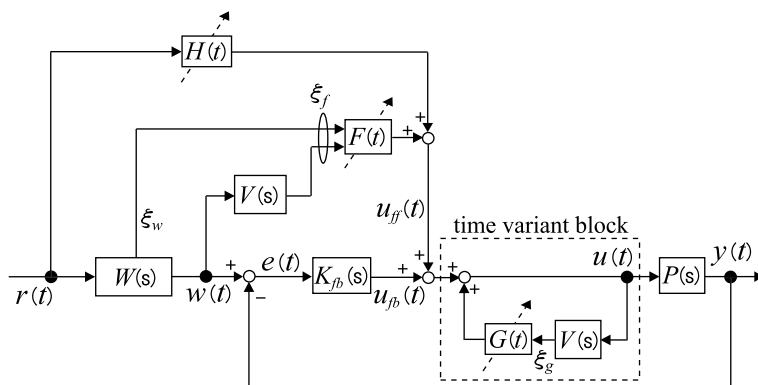


図 79 従来法による FEL の構成（野口ら [52]）

5.2.2 問題の定式化

本章の目的は，上記 (1) ~ (3) の問題点を解決する新しい手法を提案することである．そのために，新しく図 80 のような構成，すなわち，通常の 2 自由度構成によらない新しい FEL⁷（多入出力仮想フィードバック誤差学習（MIMO - Virtual Feedback Error Learning : MIMO-VFEL））を提案する．これにより，閉ループ系への入力点が 1 つに削減されるため，問題点 (2), (3) を回避でき，また，仮想フィードバック誤差（詳細は後述）を学習に用いるため，問題点 (1) も回避できる．以下，問題の定式化を行っていく．図 80 において， $P(s)$ は未知のプラント， $K_{fb}(s)$ は $P(s)$ を安定化するために設計者が与えるフィードバック（FB）制御器， $\tilde{P}(s)$ は $P(s)$ と $K_{fb}(s)$ を含む閉ループ系， $\tilde{u}(t)$ と $y(t)$ は $\tilde{P}(s)$ の入力および出力信号， $e(t)$ は $\tilde{P}(s)$ 内の誤差信号， $u(t)$ は $P(s)$ の制御入力， $r(t)$ は外生信号， $w(t) := W(s)r(t)$ は $\tilde{Q}_\Theta(s)$ 内に統合されているプレフィルタ $W(s)$ の出力で

⁷目標値フィルタ型の 2 自由度構成 [50] による FEL 制御系．

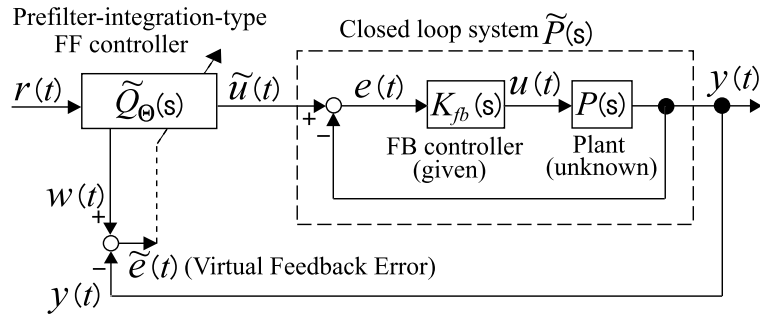


図 80 提案する MIMO-VFEL の構成

目標値信号, $\tilde{e}(t)$ は仮想フィードバック誤差信号 ($:= w(t) - y(t)$), $\tilde{Q}_\Theta(s)$ は調整パラメータ Θ を含むプレフィルタ統合型 FF 制御器, を表している. $u(t)$ を除く全ての信号は, m 次元ベクトル値を取る連続時間関数であるとする ($u(t)$ は \bar{m} 次元ベクトル値を取る連続時間関数である).

まず, プラント $P(s)$ と FB 制御器 $K_{fb}(s)$ に対して, 以下の仮定をおく.

A5.1 プラント $P(s)$ は, $m \times \bar{m}$ の多入出力線形時不変系

$$P(s) = (A, B, C, D) \quad (97)$$

であり, n 次の最小実現であるとする. 行列 A, B, C, D は未知であるとする. $P(s)$ は安定でなくてもよいが, 最小位相であるとする.

A5.2 FB 制御器 $K_{fb}(s)$ は, $\bar{m} \times m$ の多入出力線形時不変系

$$K_{fb}(s) = (A_K, B_K, C_K, D_K) \quad (98)$$

であり, ℓ 次の最小実現であるとする. これは, モデルを用いずに (PID 制御など) 設計者が与える. $K_{fb}(s)$ は最小位相であるとする.

A5.3 $P(s), K_{fb}(s)$ の間で極と零点の消去は無く,

$$P(s)K_{fb}(s) = (A_q, B_q, C_q, D_q) \quad (99)$$

は, $q := n + \ell$ 次の最小実現である.

さらに，以下の仮定をおく．

A5.4 $P(s)$ が未知であることから，閉ループ系

$$\begin{aligned}\tilde{P}(s) &= (I + P(s)K_{fb}(s))^{-1} P(s)K_{fb}(s) \\ &= (A_p, B_p, C_p, D_p)\end{aligned}\quad (100)$$

の行列 A_p, B_p, C_p, D_p は未知となるが，行相対次数 ρ_1, \dots, ρ_m は既知とし，これらの和，最大値をそれぞれ $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i$, $\bar{\rho} = \max_{1 \leq i \leq m} \rho_i$ とおく（行相対次数の詳細については 2 章を参照 [51]）．ただし， $D_p \neq 0$ のときは， $\det D_p \neq 0$ であるとする．

以上の前提の下，プレフィルタ $W(s)$ を

$$W(s) = L(s)^{-1}, \quad L(s) = \text{diag}(\ell_1(s), \dots, \ell_m(s)) \quad (101)$$

と設定する．ただし $\ell_i(s)$ は $\ell_i(0) = 1$ となる $\bar{\rho}$ 次 Hurwitz 多項式 ($L(s)$ の全対角要素の次数が $\bar{\rho}$) であり，設計者が任意に与える．

上記仮定より $\tilde{P}(s)$ が安定かつ最小位相であることから，

$$\tilde{P}(s)\tilde{Q}(s) = W(s) \quad (102)$$

を満たす安定バイプロパな FF 制御器 $\tilde{Q}(s)$ が存在する．本章では，このような $\tilde{Q}(s)$ を，FF 制御器の真値と呼ぶことにする．図 80 において， $\tilde{Q}_\Theta(s) = \tilde{Q}(s)$ のときは，どのような $r(t)$ に対しても仮想フィードバック誤差が以下ようになる．

$$\tilde{e}(t) = w(t) - y(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (103)$$

いま，FB 制御器 $K_{fb}(s)$ によって閉ループ系 $\tilde{P}(s)$ は安定化されているが，目標値追従特性は十分でないとして仮定する．そのため，FF 制御器 $\tilde{Q}_\Theta(s)$ を接続し， Θ を調整することによって改善を図る．よって，制御目的は， $y(t)$ が $w(t)$ に追従するように入力信号 $\tilde{u}(t)$ を加えることである．

以下では，まず，閉ループ系に対して直列結合される学習型 FF 制御器の構成を示す．次に，学習型 FF 制御器が閉ループ系の逆システムとして動作するよう，

Muramatsu ら [8] の手法を援用し，学習則を導く．さらに，学習則の収束性について解析し，シミュレーションによって提案法の有効性を検討する．

5.3 提案法

5.3.1 プレフィルタ統合型 FF 制御器の構成と真値

FF 信号の真値は，

$$\tilde{u}_0(t) = \tilde{Q}(s)r(t) = \tilde{P}(s)^{-1}W(s)r(t) \quad (104)$$

と与えられる．閉ループ系 $\tilde{P}(s)$ が未知であるため仮想フィードバック誤差 $\tilde{e}(t)$ を利用して学習パラメータ Θ を調整したい．まず，以下の補題 1 によって，プレフィルタ統合型 FF 制御器の真値を与える．

【補題 5.1】 ν 次モニック Hurwitz 多項式 $f(s) = s^\nu + f_1s^{\nu-1} + \dots + f_\nu$ を設定し，

$$A_f = I_m \otimes \bar{A}_f \quad B_f = I_m \otimes \bar{B}_f, \quad (105)$$

$$\bar{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -f_\nu & \cdots & -f_2 & -f_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおく．ただし， $\nu := q - \rho$ ， $A_f \in \mathbf{R}^{\nu m \times \nu m}$ ， $B_f \in \mathbf{R}^{\nu m \times m}$ である．このとき，(101) 式の因子 $W(s)$ を統合した FF 制御器の真値は，上記のフィルタ (A_f, B_f) を用いることで，

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}\eta_1(t) &= A_f\eta_1(t) + B_fw(t) \\ \frac{d}{dt}\eta_2(t) &= A_f\eta_2(t) + B_f\tilde{u}_0(t) \\ \tilde{u}_0(t) &= \Theta_0\eta(t) \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

$$\Theta_0 = [F_0, G_0, E_0] \in \mathbf{R}^{m \times \kappa}, \quad (107)$$

$$E_0 = [H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}] \quad (108)$$

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \xi_w(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^\kappa, \quad \kappa := (2\nu + \bar{\rho} + 1)m, \quad (109)$$

$$\xi_w = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{\bar{\rho}} \end{bmatrix} \otimes W(s) \right) r \quad (110)$$

と構成できる．つまり，パラメータ $F_0, G_0, H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}$ が存在して，(106) 式の第3式がFF制御器の出力の真値信号 $\tilde{u}_0(t) = \tilde{Q}(s)r(t) = \tilde{P}(s)^{-1}W(s)r(t)$ を実現できる．

(証明) まず，

$$V_F(s) := (sI - A_f)^{-1}B_f = G_F(s) \frac{1}{f(s)}, \quad (111)$$

$$G_F(s) = I_m \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{\nu-1} \end{bmatrix}, \quad (112)$$

を定義する．次に，これを(106)式に利用すると， $r(t)$ から $\tilde{u}_0(t)$ への関係は，

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(t) &= \{I_m - G_0V_F(s)\}^{-1} \\ &\quad \times \{F_0V_F(s)W(s) + H_0W(s) + J_{01}sW(s) + \dots + J_{0\bar{\rho}}s^{\bar{\rho}}W(s)\}r(t), \end{aligned} \quad (113)$$

$$= [\tilde{X}(s)]^{-1}\tilde{Y}(s)W(s)r(t), \quad (114)$$

$$:= \tilde{Q}_{\Theta_0}(s)r(t), \quad (115)$$

$$\tilde{X}(s) = [f(s)I_m - G_0G_F(s)],$$

$$\tilde{Y}(s) = [s^{\bar{\rho}}f(s)J_{0\bar{\rho}} + s^{\bar{\rho}-1}f(s)J_{0(\bar{\rho}-1)} + \dots + sf(s)J_{01} + f(s)H_0 + F_0G_F(s)]$$

と表される．これが $\tilde{P}(s)^{-1}W(s)$ に一致するように， $F_0, G_0, H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}$ を求めれば良い．これらのパラメータは，極零相殺がなければ，SISO 系では，分母，分子の係数となる．よって， $r(t)$ から $\tilde{u}_0(t)$ への伝達行列は $\tilde{P}(s)^{-1}W(s)$ に一致し，これは FF 制御器の真値 $\tilde{Q}(s)$ に等しい． \diamond

5.3.2 学習則

前節のパラメータ $F_0, G_0, H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}$ を適切に設定することで，FF 制御器の真値 $\tilde{Q}(s)$ を (114) 式の形式で得ることができる．しかしながら，閉ループ系 $\tilde{P}(s)$ は未知となるため，本節では Muramatsu ら [8] の発想をもとに，パラメータを調整するための学習則を導く．(106) 式では，FF 制御器の出力の真値信号 $\tilde{u}_0(t)$ を使っているが，これは未知なので，閉ループ系 $\tilde{P}(s)$ への入力 $\tilde{u}(t)$ を用いると，実際の前置型 FF 制御器 $\tilde{Q}_\Theta(s)$ の構成は，以下ようになる．

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}\xi_1(t) &= A_f\xi_1(t) + B_fw(t) \\ \frac{d}{dt}\xi_2(t) &= A_f\xi_2(t) + B_f\tilde{u}(t) \\ u_{ff}(t) &= \Theta(t)\xi(t) \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

$$\Theta(t) = [F(t), G(t), E(t)] \in \mathbf{R}^{m \times \kappa}, \quad (117)$$

$$E(t) = [H(t), J_1(t), \dots, J_{\bar{\rho}}(t)], \quad (118)$$

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_w(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^\kappa \quad (119)$$

ここで，学習パラメータ $F_0, G_0, H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}$ を調整可能な係数行列 $F(t), G(t), H(t), J_1(t), \dots, J_{\bar{\rho}}(t)$ に置き換え，調整パラメータ行列 $\Theta(t)$ としてまとめている．ただし，学習が開始されるためには，初期値 $\Theta(0) \neq 0$ を与えなければならない．したがって，(116) 式の第 3 式で記述される FF 制御器の出力 $u_{ff}(t)$ を用いて，閉ループ系 $\tilde{P}(s)$ への制御入力は， $\tilde{u}(t) = u_{ff}(t) = \Theta(t)\xi(t)$ と与えられる．提案法では，文献 [51, 52] と同様に，閉ループ系 $\tilde{P}(s)$ が有限零点を持たない場合 (SISO では分子が定数の場合) には， $\nu = 0$ となり，フィルタ $V_F(s)$ は不要となる．

(117) 式のパラメータを調整するために，本手法では，Muramatsu ら [8] と同じ発想で，誤差信号 $\tilde{e}(t)$ を効果的に用いる．これは， $\tilde{Q}_{\Theta}(s) \rightarrow \tilde{P}(s)^{-1}W(s)$ が達成されるときに， $\tilde{e}(t) \rightarrow 0$ になるという基本的な考え方に基づいている．以下，学習則を導くために，制御入力 $\tilde{u}(t)$ を， Θ_0 によって線形パラメータ表示することを考える．ここで，

$$\tilde{u}_0(t) - \tilde{u}(t) = \tilde{P}(s)^{-1}W(s)r(t) - \tilde{P}(s)^{-1}y(t) = \tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e} \quad (120)$$

の関係を，(107)，(109) 式と一緒に使うことで， $\tilde{u}(t)$ をまず，次のように記述する．

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}_0(t) - \tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e}(t) = \Theta_0\eta(t) - \tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e}(t) \quad (121)$$

(121) 式の記述で， $\eta(t)$ の要素 $\eta_2(t)$ は学習に利用できない．なぜなら， $\eta_2(t)$ は，未知の信号 $\tilde{u}_0(t)$ を用いて (106) 式の第 2 式によって生成されるからである．その問題を回避するため，(121) 式を，学習に利用できる $\xi(t)$ を用いた形式へ変形する．まず，(106) 式と (116) 式を比較し，両フィルタの安定性から

$$\left. \begin{array}{l} \eta_1(t) \rightarrow \xi_1(t) \\ \eta_2(t) \rightarrow \xi_2(t) + V_F(s)\tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e}(t) \end{array} \right\} \quad (122)$$

となる．ただし，(120) 式を用いている．以上の準備のもと，(121) 式に (122) 式を代入すると，

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= [F_0, G_0, E_0] \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) + V_F(s)\tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e}(t) \\ \xi_w(t) \end{bmatrix} - \tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e}(t) \\ &= \Theta_0\xi(t) + G_0V_F(s)\tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e}(t) - \tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e}(t) \\ &= \Theta_0\xi(t) - (I_m - G_0V_F(s))\tilde{P}(s)^{-1}\tilde{e}(t) \end{aligned} \quad (123)$$

となる．

ここで，(113) 式，(115) 式および $\tilde{Q}_{\Theta_0}(s) = \tilde{P}(s)^{-1}W(s)$ より，

$$\{I_m - G_0V_F(s)\}\tilde{P}(s)^{-1} = \{F_0V_F(s) + H_0 + sJ_{01} + \cdots + s^{\bar{p}}J_{0\bar{p}}\} \quad (124)$$

となり，これを (123) 式へ代入すると，

$$\tilde{u}(t) = \Theta_0 \xi(t) - \{F_0 V_F(s) + H_0 + sJ_{01} + \cdots + s^{\bar{\rho}} J_{0\bar{\rho}}\} \tilde{e}(t) \quad (125)$$

となる．いま，(125) 式がプロパ性を満たすように，両辺に安定な伝達関数 $\frac{1}{\ell(s)}$ を掛ける．ただし， $\ell(s)$ は $\bar{\rho}$ 次モニック Hurwitz 多項式であり，設計者が任意に与える．したがって，以下のようなになる⁸．

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell(s)} \tilde{u}(t) &= \Theta_0 \frac{1}{\ell(s)} \xi(t) \\ &\quad - \left\{ F_0 V_F(s) \frac{1}{\ell(s)} \tilde{e}(t) + H_0 \frac{1}{\ell(s)} \tilde{e}(t) + J_{01} s \frac{1}{\ell(s)} \tilde{e}(t) + \cdots + J_{0\bar{\rho}} s^{\bar{\rho}} \frac{1}{\ell(s)} \tilde{e}(t) \right\} \end{aligned} \quad (126)$$

$$= \Theta_0 \tilde{\xi}(t), \quad (127)$$

$$\tilde{\xi}(t) = \frac{1}{\ell(s)} \xi(t) - \begin{bmatrix} V_F(s) \frac{1}{\ell(s)} \tilde{e}(t) \\ 0 \\ \xi_e(t) \end{bmatrix}, \quad \xi_e = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{\bar{\rho}} \end{bmatrix} \otimes \left(I_m \frac{1}{\ell(s)} \right) \right) \tilde{e} \quad (128)$$

したがって，未知パラメータに線形な誤差モデル

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\ell(s)} \tilde{u}(t) - \hat{u}(t), \quad \hat{u} = \Theta(t) \tilde{\xi}(t) \quad (129)$$

が構築される．そこで，固定ゲイン型のパラメータ調整則は，適当なスカラ α を用いて

$$\frac{d}{dt} \Theta(t) = \alpha \epsilon(t) \tilde{\xi}(t)^T, \quad \alpha > 0 \quad (130)$$

と構成される．次に，可変ゲイン型は，

$$\frac{d}{dt} \Theta(t) = \epsilon(t) \tilde{\xi}(t)^T Z(t) \quad (131)$$

⁸ $s^k \frac{1}{\ell(s)}$ ($k = 1, \dots, \bar{\rho}$) はプロパである．

と構成すればよい．ただし， $Z(t)$ は信号ベクトル $\tilde{\xi}(t)$ を含む以下の行列微分方程式の解行列である．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Z(t) &= -Z(t)\tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t)^T Z(t), \\ Z(0) &= \sigma I, \sigma \gg 1\end{aligned}\tag{132}$$

5.4 安定性解析

本章では，提案の MIMO-VFEL の学習則の安定性について，固定ゲイン型と可変ゲイン型に分けて解析を行う．基本的には，前章の解析手法 [52] に従う．

5.4.1 固定ゲイン型の学習則の安定性

まず，パラメータの誤差

$$\Psi(t) := \Theta(t) - \Theta_0\tag{133}$$

を考え，(129) 式に (127) 式を用いると

$$\epsilon(t) = \Theta_0\tilde{\xi}(t) - \Theta(t)\tilde{\xi}(t) = -\Psi(t)\tilde{\xi}(t)\tag{134}$$

を得る．これを，(130) 式に代入すると，

$$\frac{d}{dt}\Theta(t) = -\alpha\Psi(t)\tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t)^T, \alpha > 0\tag{135}$$

となる．ここで，(133) 式を時間微分し，(135) 式を代入することで，

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = -\alpha\Psi(t)\tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t)^T, \alpha > 0\tag{136}$$

が得られる．この系の安定性は以下の補題 5.2 によって確認できる．

【補題 5.2】 $\tilde{\xi}(t)$ を有界な任意の時変ベクトルとするととき，行列微分方程式 (136) の解は， $\Psi_0\tilde{\xi}(t) = 0$ であるような定数行列 Ψ_0 に収束する．もしも， $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たすならば， Ψ_0 は零行列に等しい．

(証明) 付録 E を参照．

◇

5.4.2 可変ゲイン型の学習則の安定性

以下，可変ゲイン型の学習則 ((131) 式と (132) 式) の安定性について考える [14]．まず，

$$A(t) := \sigma^{-1}I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \quad (137)$$

とおくと，よく知られた公式

$$\frac{d}{dt}(A(t)^{-1}) = -A(t)^{-1} \left(\frac{d}{dt}A(t) \right) A(t)^{-1}$$

により， $Z(t) = A(t)^{-1}$ は方程式 (132) の解であることが分かる．次に，初期値 $\Theta(0) = \Theta_*$ に対して

$$\Theta(t) := \left(\sigma^{-1}\Theta_* + \Theta_0 \int_0^t \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right) Z(t) \quad (138)$$

とおくと，これは方程式 (131) を満たすことが (127)，(129) 式より示される．これらの準備の下，次の補題 5.3 が得られる．

【補題 5.3】 $\tilde{\xi}(t)$ を有界な任意の時変ベクトルとし，可変ゲイン型の学習則 ((131) 式と (132) 式) を用いる．このとき，(133) 式に定めるパラメータの誤差 $\Psi(t)$ は，定数行列 Ψ_0 に収束する．もしも， $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たすならば， Ψ_0 は零行列に等しい．

(証明) 付録 F を参照． ◇

【定理 5.1】 信号 $\tilde{\xi}$ が PE 条件を満たすとの仮定の下，上記の学習則により制御目的

$$\tilde{e}(t) = w(t) - y(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

が達成される．

(証明) 学習パラメータが真値に収束するので，漸近的に

$$u_{ff}(t) \rightarrow \tilde{u}_0(t)$$

が成立する．従って， $y(t) \rightarrow w(t)$ より， $\tilde{e}(t) \rightarrow 0$ となるため，定理が成立する． ◇

5.5 シミュレーション1 (簡単な例)

【注意5.1】 以下のシミュレーションにおいては，プラント $P(s)$ の行相対次数を $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ とおく．また，行相対次数の和，最大値をそれぞれ $\gamma = \sum_{i=1}^m \gamma_i$ ， $\bar{\gamma} = \max_{1 \leq i \leq m} \gamma_i$ とおく．

5.5.1 SISO プラント

本節では，矩形波を目標軌道とし，シミュレーションにより，提案法と従来法とを比較する．特に，従来法 [8, 52] における問題点，すなわち，正実性の仮定を除去した副作用で閉ループ系に挿入されてしまう時変ブロック (以下，ループ $G(t)$ と呼ぶ) の影響に対して検討を行う．

まず，従来法 [52] について検討する．SISO プラント

$$P(s) = \frac{s+1}{(s^2+s+1)(s+2)} = \frac{s+1}{s^3+3s^2+3s+2}$$

を考える．このとき， $n=3, \bar{\gamma} = \gamma = \gamma_1 = 2$ であるから， $L(s) = (1/25)s^2 + (2/5)s + 1$ と定めると，プレフィルタは， $W(s) = L(s)^{-1}$ となる．この最小実現 (A_w, B_w, C_w) は，

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_w = \begin{bmatrix} 25 & 0 \end{bmatrix}$$

と与えられる．また， $\nu = n - \gamma = 3 - 2 = 1$ より，行列 A_f, B_f は1次元となる (このことから，FEL 制御系に対して，ループ $G(t)$ が挿入されることがわかる)．よって，FF フィルタを $A_f = [-a]$ ， $B_f = [1]$ ， $a = 1.5$ とする．また，FB 制御器には，PI 制御器 $K_{fb}(s) = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s}$ を用いる．以下のシミュレーションでは，目標軌道として，振幅1，周期5[sec]の矩形波を用いる．また，固定ゲイン型の学習則を用い，固定ゲイン $\alpha = 0.1$ と設定している．従来法 [52] による目標軌道追従特性を図 81 に示している．図 81 からわかる通り，従来法ではループ $G(t)$ の影響を受け，閉ループ系が不安定化し，目標軌道追従誤差が発散してしまう．

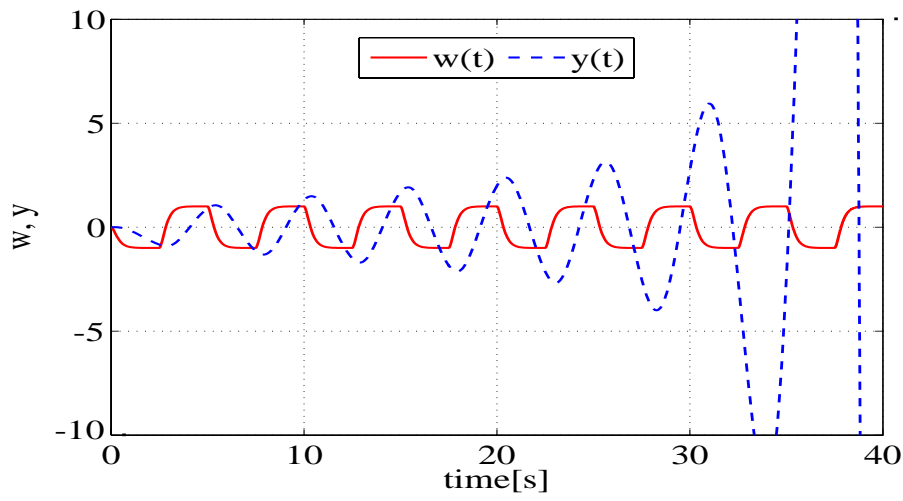


図 81 従来法による目標軌道追従特性

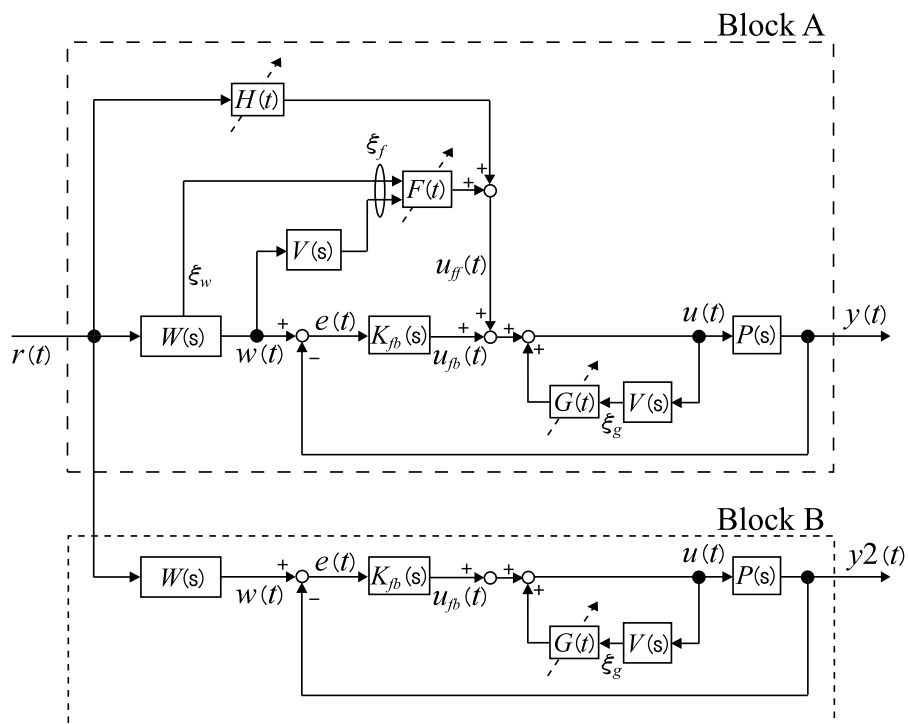


図 82 従来の FEL に基づく試験用 FEL 制御系 (Block A と Block B から構成)

いま, ループ $G(t)$ の影響によって, 閉ループ系が不安定化したことを確認す

るために，図 82 の構成にて追加シミュレーションを試みる．シミュレーションの条件は前のものと同じである．図 82 は，先程検討したオリジナルの FEL 制御系（Block A）とループ $G(t)$ のみをもつ FEL 制御系（Block B）の 2 ブロックからなり，全く同じ閉ループ系を核として構成されている．これらのブロックは，1 つの外生信号 $r(t)$ を入力信号として，Block A では信号 $y(t)$ を，Block B では信号 $y_2(t)$ を出力する．そして，Block B のパラメータ行列 $G(t)$ は，Block A のそれに完全に同期して発展する．

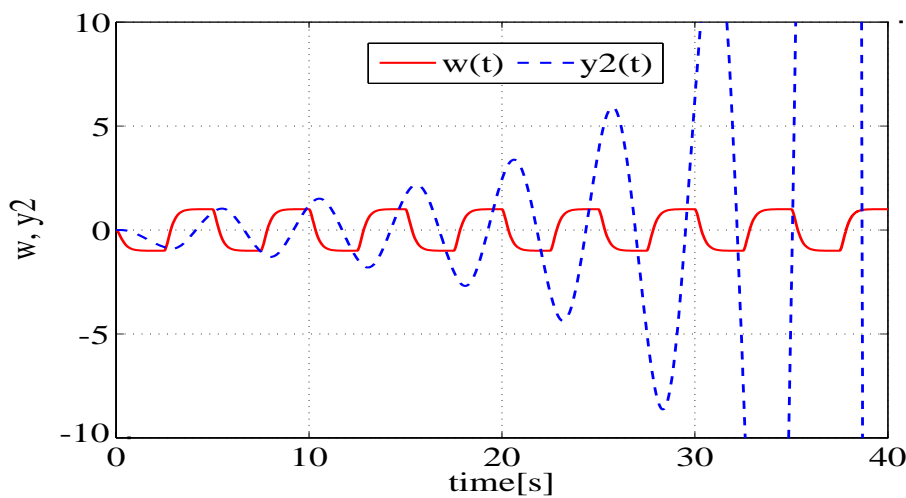


図 83 試験用 FEL 制御系の Block B における目標軌道追従特性

図 83 に図 82 の Block B における目標軌道追従特性を示している．図 83 から，Block B の出力 $y_2(t)$ が不安定化していることがわかる．すなわち，本例題においては，ループ $G(t)$ の影響が顕著に現れて閉ループ系の安定性が乱されてしまい，図 81 に示すように，Block A の出力 $y(t)$ が不安定化してしまったと言える．

次に，提案法について検討する．上記と同じ SISO プラント $P(s)$ および FB 制御器 $K_{fb}(s)$ を用いる．このとき，閉ループ系は，

$$\tilde{P}(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 4s + 1}$$

であり， $q = 4, \bar{\rho} = \rho = \rho_1 = 2$ となるから， $L(s) = (1/25)s^2 + (2/5)s + 1$ と定めると，プレフィルタは， $W(s) = L(s)^{-1}$ となる．また， $\nu = q - \rho = 4 - 2 = 2$

より，行列 A_f, B_f は 2 次元となる（FEL 制御系がループ $G(t)$ を持つことがわかる）．よって，FF フィルタを

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & -2a \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a = 1.5$$

とする．以下のシミュレーションでは，従来法と同様に，目標軌道として，振幅 1，周期 5[sec] の矩形波を用いる．また，固定ゲイン型の学習則を用い，固定ゲイン $\alpha = 2$ と設定している．提案法による目標軌道追従誤差を図 84 に示している（ここでは，簡単のため，誤差のみを示す）．提案法はループ $G(t)$ を持つにもかかわらず，良好な目標軌道追従を達成できていることがわかる．ただし，図 84 に示している通り，目標軌道追従誤差の収束は極めて遅い．これは，従来法と VFEL との比較を行うために固定ゲイン型を用いたためである．5.5.2 節で述べるよう，可変ゲイン型を用いれば収束速度ははるかに速いが，従来法における過渡状態と比較する必要から，収束速度をあえて遅くするために固定ゲイン型を用いている．

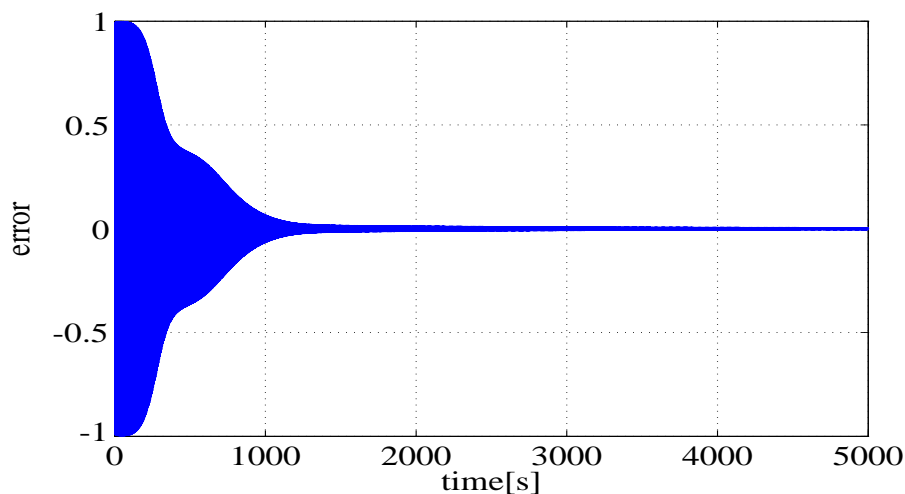


図 84 VFEL による目標軌道追従誤差（固定ゲイン型）

5.5.2 MIMO プラント

本節でも同様，矩形波を目標軌道とし，シミュレーションにより，提案法と従来法とを比較する．SISO の場合と同様，特に，ループ $G(t)$ の影響に対して検討

を行う。

まず，従来法 [52] について検討する．MIMO プラント

$$P(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} s^2 + 4s + 1 & -2s - 19 \\ 2s^2 + 9s + 7 & s^2 + 5s - 18 \end{bmatrix},$$
$$d(s) = s^3 + 8s^2 + 19s + 23$$

を考える．このとき， $n = 3, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 2, \bar{\gamma} = \max(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ であるから， $L(s) = \text{diag}((1/6)s + 1, (1/7)s + 1)$ と定めると，プレフィルタは， $W(s) = L(s)^{-1}$ となる．よって，この最小実現 (A_w, B_w, C_w) は，

$$A_w = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_w = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

と与えられる．また， $\nu = n - \gamma = 3 - 2 = 1$ より，行列 A_f, B_f は 2 次元となる (FEL 制御系に対して，ループ $G(t)$ が挿入されることがわかる)．よって，FF フィルタを

$$A_f = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a = 3$$

とする．また，FB 制御器は， $K_{fb}(s) = \text{diag}[0.5, 0.5]$ を用いる．以下のシミュレーションでは，振幅と周期が異なる 2 種類の矩形波を用いる．すなわち， $r = [r_1, r_2]^T$ ， r_1 は振幅 1，周期 5[sec]， r_2 は振幅 0.8，周期 4[sec]，を用いる．また，可変ゲイン型の学習則を用い， $\sigma = 200$ と設定している．従来法 [52] による目標軌道追従特性を図 85 に示している．図 85 からわかる通り，従来法ではループ $G(t)$ の影響を受け，閉ループ系が不安定化し，目標軌道追従誤差が発散してしまう．

いま，ループ $G(t)$ の影響によって閉ループ系が不安定化したことを確認するために，SISO の場合と同様，図 82 に基づく追加シミュレーションを試みる．シミュレーションの条件は前のものと同じである．ここに，図 82 の Block B における目標軌道追従特性を図 86 に示す．図 86 から，Block B の出力 $y_2(t) = [y_{2.1}(t), y_{2.2}(t)]^T$ が不安定化していることがわかる．このことから，本例題においても，ループ $G(t)$ の影響が顕著に現れて閉ループ系の安定性が乱されてしまったことがわかる．

よって，図 85 に示すように，Block A の出力 $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$ が不安定化してしまっただけである．

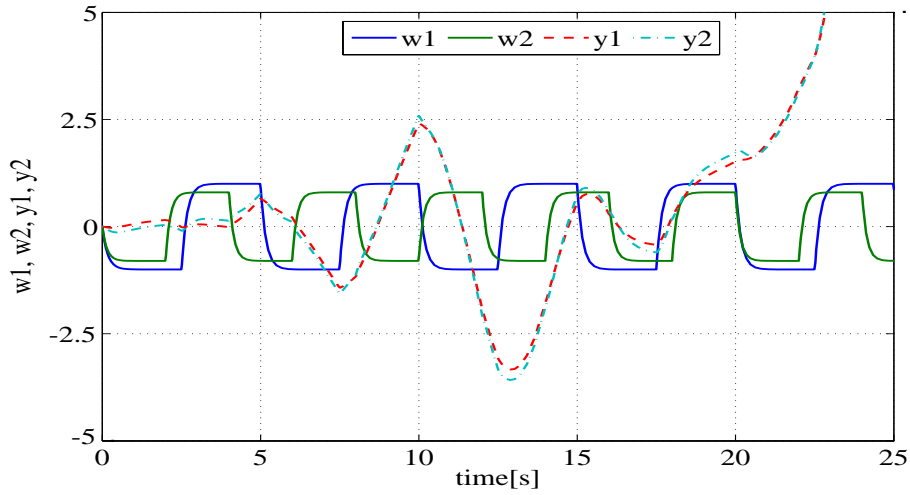


図 85 従来法による目標軌道追従特性

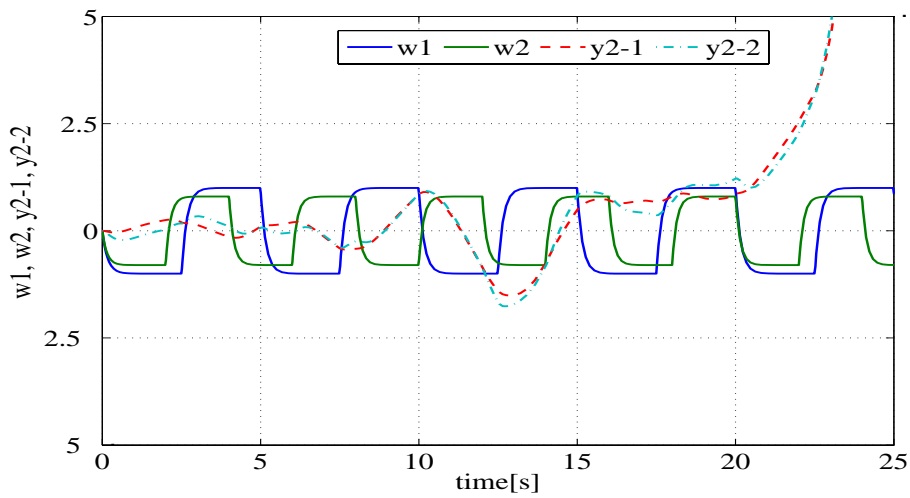


図 86 試験用 FEL 制御系の Block B における目標軌道追従特性

次に，提案法について検討する．上記と同じ MIMO プラント $P(s)$ および FB

制御器 $K_{fb}(s)$ を用いる．このとき，閉ループ系は，

$$\tilde{P}(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix},$$

$$P_{11}(s) = \frac{0.5}{s + 4.5}, \quad P_{12}(s) = \frac{-s - 9.5}{s^3 + 9s^2 + 23.75s + 15.75},$$

$$P_{21}(s) = \frac{1}{s + 4.5}, \quad P_{22}(s) = \frac{0.5s^2 + 2.75s - 7.75}{s^3 + 9s^2 + 23.75s + 15.75}$$

であり， $q = 3, \rho_1 = 1, \rho_2 = 1, \rho = \rho_1 + \rho_2 = 2, \bar{\rho} = \max(\rho_1, \rho_2) = 1$ となるから， $L(s) = \text{diag}((1/6)s + 1, (1/7)s + 1)$ と定めると，プレフィルタは， $W(s) = L(s)^{-1}$ となる．また， $\nu = q - \rho = 3 - 2 = 1$ より，行列 A_f, B_f は2次元となる（FEL制御系がループ $G(t)$ を持つことがわかる）．よって，FFフィルタを

$$A_f = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a = 3$$

とする．以下のシミュレーションでは，従来法と同じ矩形波の目標軌道を用いる．また，可変ゲイン型の学習則を用い， $\sigma = 5 \times 10^4$ と設定している．提案法による目標軌道追従特性を図 87 に示している．提案法はループ $G(t)$ を持つにもかかわらず，MIMO においても良好な目標軌道追従を達成できていることがわかる．最後に，提案法における学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展を以下に示す．短時間で収束していることがわかる．

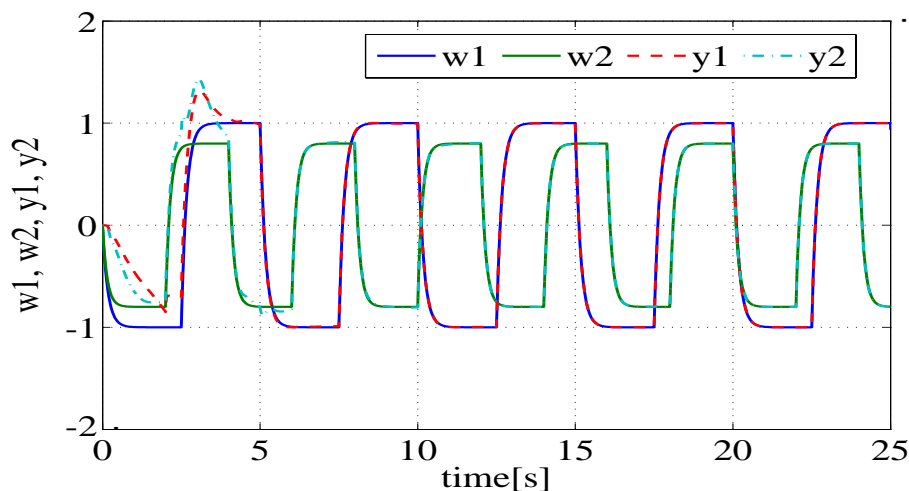


図 87 MIMO-VFEL による目標軌道追従特性（可変ゲイン型）

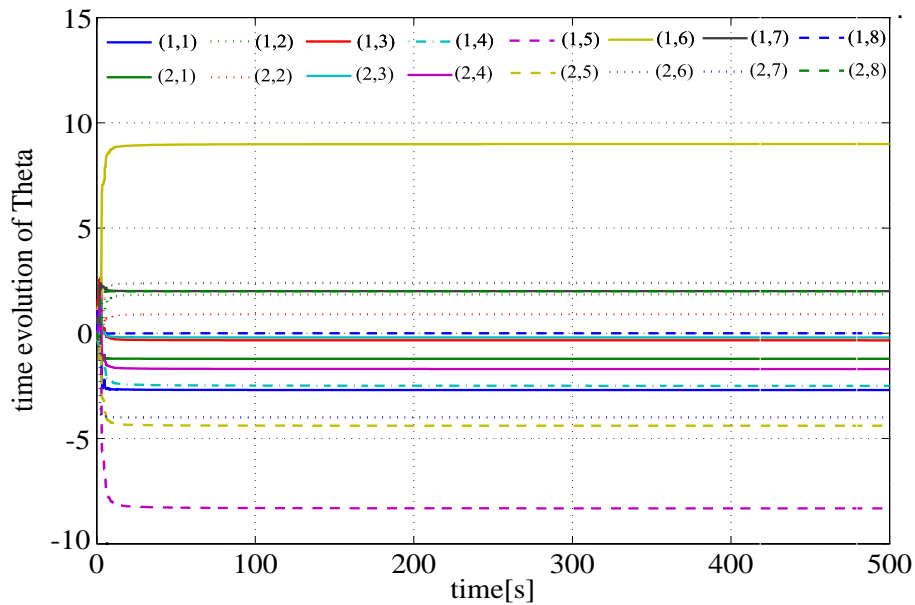


図 88 MIMO-VFEL による学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)

5.6 シミュレーション 2 (実問題を想定した例)

本節では、前節よりも実問題に近い例 (具体例) をとりあげ、提案法の有効性を検討する。

5.6.1 模型自動車の制御

ここでは 3 章と同様、(45) 式に示す模型自動車のモデル $P(s) = \frac{9}{s^2}$ の制御を行う。 x_2 軸の正方向へ、 x_2 軸を中心におきながら正弦波状にくねくねと進行するタスクを実現しよう。シミュレーションにおける条件は、3 章のものと同様であるとする。単一周波数の正弦波を目標軌道とし、提案法 (VFEL) の有効性を検討する。FB 制御器には近似 PD 制御器

$$K_{fb}(s) = K_p + K_d \frac{s}{0.01s + 1} = \frac{0.101s + 0.1}{0.01s + 1}$$

を用いる。ただし、 $K_p = 0.1, K_d = 0.1$ としている。このとき、閉ループ系は、

$$\tilde{P}(s) = \frac{0.909s + 0.9}{0.01s^3 + s^2 + 0.909s + 0.9}$$

であり, $q = 3, \bar{\rho} = \rho = \rho_1 = 2$ となるから, $L(s) = (1/25)s^2 + (2/5)s + 1$ と定めると, プレフィルタは, $W(s) = L(s)^{-1}$ となる. また, $\nu = q - \rho = 3 - 2 = 1$ より, 行列 A_f, B_f は 1 次元となる. よって, FF フィルタを $A_f = [-f], B_f = [1], f = 5$ と設定する.

以下のシミュレーションでは, 目標軌道として, $r = 0.25 \sin(2\pi(1/5)t)$ を用いるが, ほとんどの場合で追従誤差のみ図示する. 提案の学習則の固定ゲインおよび可変ゲインをそれぞれ, $\alpha = 50, \sigma = 1 \times 10^4$ としている. 以下, シミュレーション結果を示す.

本節では, VFEL の有効性についてのみ検討する (従来法との比較については, 同じ条件で閉ループ系を構成し, シミュレーションを行った 3, 4 章の結果を参照のこと). まずは, 上記 FB 制御器 $K_{fb}(s)$ で閉ループ系を安定化させたときの目標軌道追従特性 (FEL なし) を図 89 に示す. 追従できていないことがわかる.

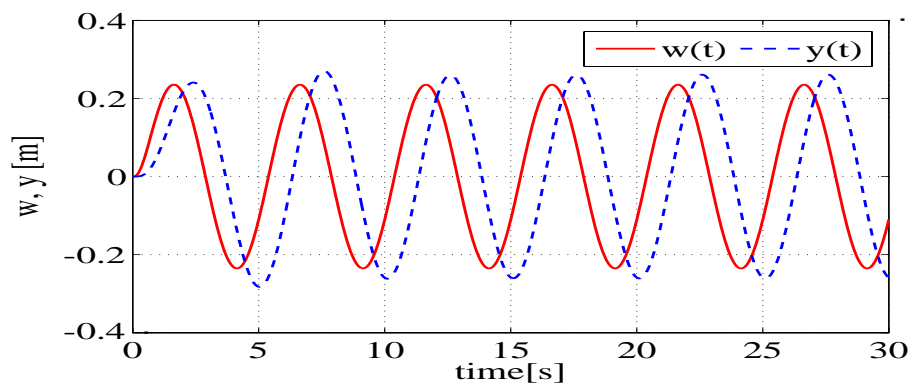


図 89 目標軌道追従特性 (FEL なし)

提案する VFEL において固定ゲイン型および可変ゲイン型の学習則を利用した際の目標軌道追従誤差をそれぞれ, 図 90 と図 91 に示している. また, 対応する学習パラメータの時間発展をそれぞれ, 図 92 と図 93 に示している. 従来法と同様, 良好な目標軌道追従が達成され, 学習パラメータも収束していることがわかる. また, 時間の経過に伴う $x_2 - x_1$ 平面上の模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態) を, 固定ゲイン型および可変ゲイン型についてそれぞれ, 図 94 と図 95 に示し, さらに両者に共通する学習の定常状態における走行軌跡を図 96 に示し

ている。なお、この図では、0.25[s] 毎に 印をつけて、 x_2 軸の正方向へ走行していく様子を表している。

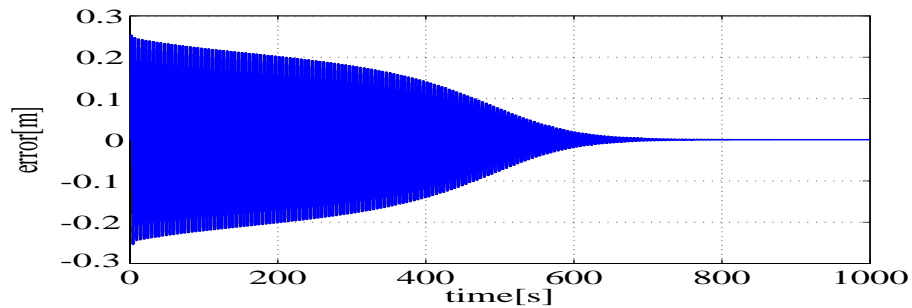


図 90 提案法による目標軌道追従誤差（固定ゲイン型）

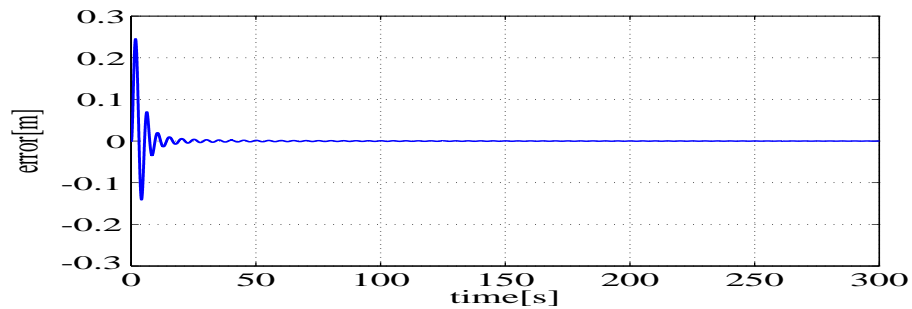


図 91 提案法による目標軌道追従誤差（可変ゲイン型）

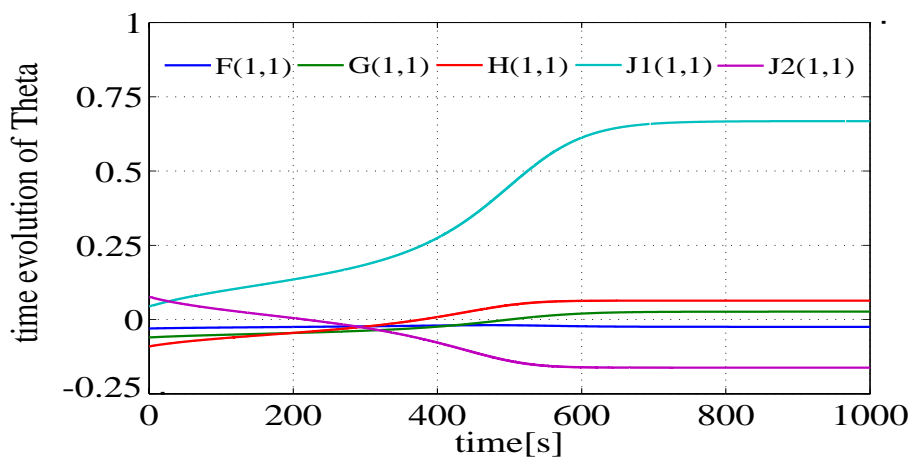


図 92 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展（固定ゲイン型）

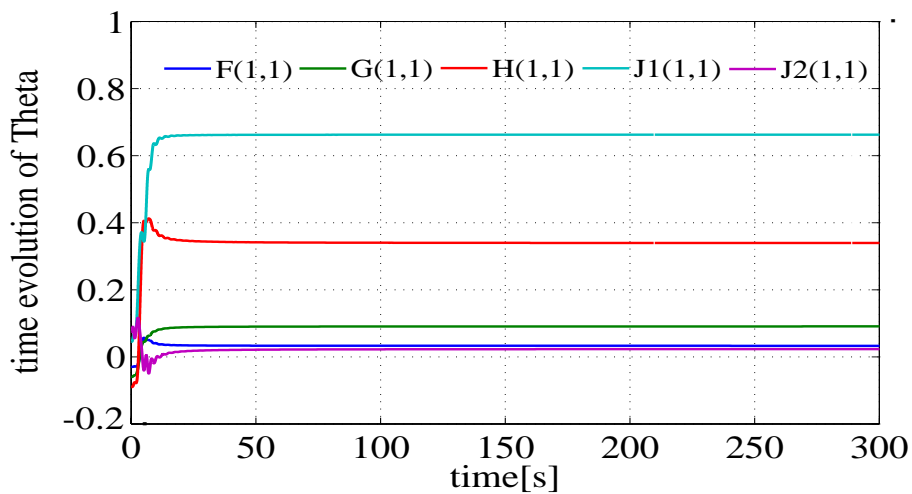


図 93 学習パラメータ $\theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)

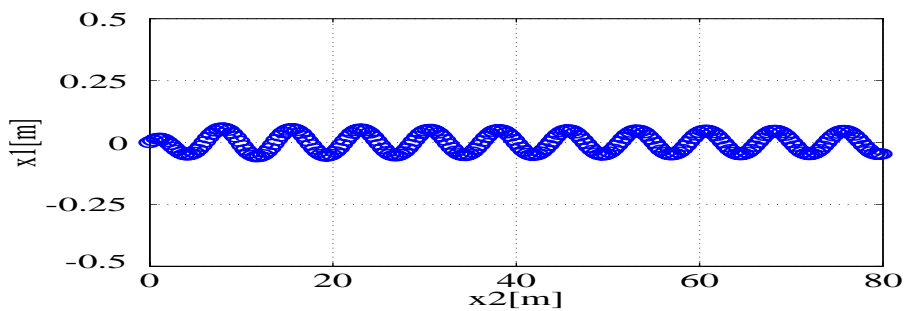


図 94 模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態, 固定ゲイン型)

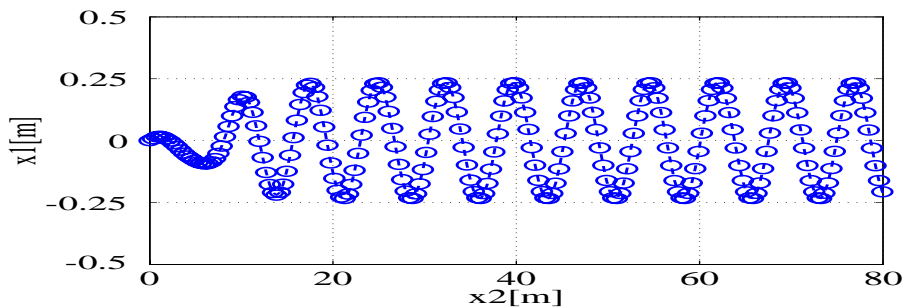


図 95 模型自動車の走行軌跡 (学習の初期状態, 可変ゲイン型)

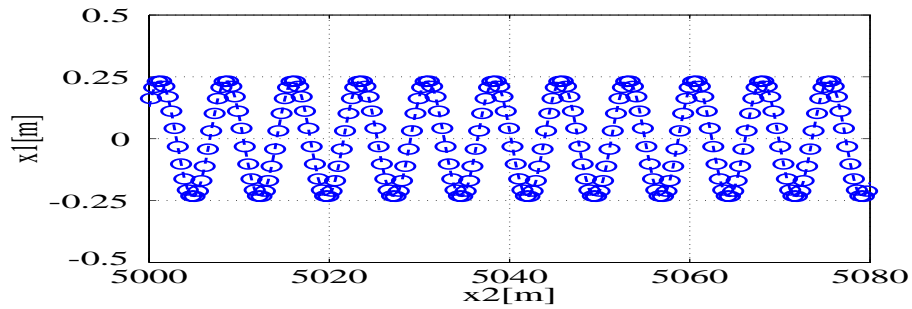


図 96 模型自動車の走行軌跡 (学習の定常状態)

さらに, $x_0(t)$ および $u(t)$ を, 固定ゲイン型および可変ゲイン型についてそれぞれ, 図 97,98, 図 99,100 に示している. 従来法と同様, 模型自動車のモデルが線形近似の範囲で正しく制御されている (機能している) ことがわかる.

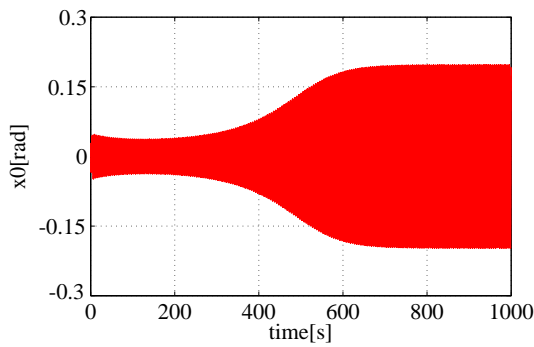


図 97 $x_0(t)$ (固定ゲイン型)

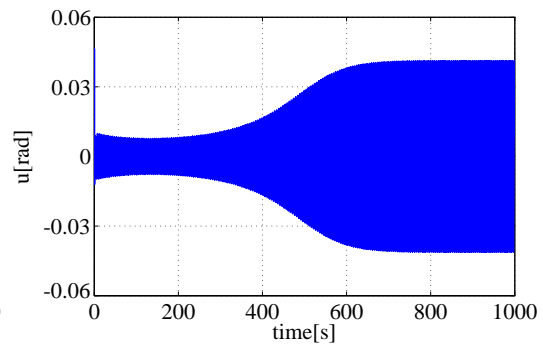


図 98 $u(t)$ (固定ゲイン型)

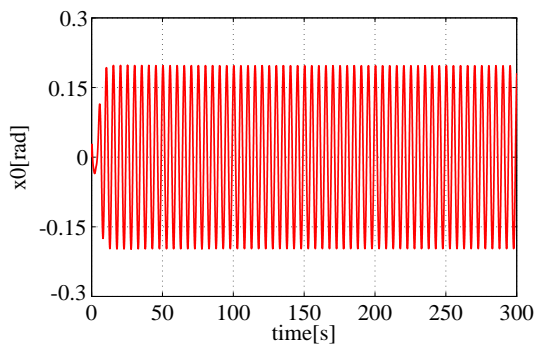


図 99 $x_0(t)$ (可変ゲイン型)

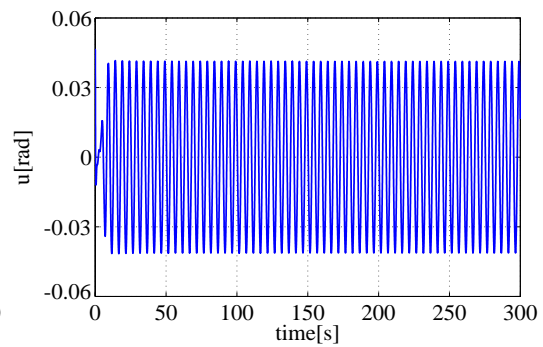


図 100 $u(t)$ (可変ゲイン型)

5.6.2 連結型台車の制御

ここでは3章と同様に, (51) 式に示す連結型台車のモデル

$$P(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} 2s^2 + 0.6667s + 3.333 & 0.6667s + 3.333 \\ 0.6667s + 3.333 & 3.333s^2 + 0.6667s + 3.333 \end{bmatrix},$$

$$d(s) = s^4 + 0.5333s^3 + 2.667s^2$$

の制御を行い, 提案法 (VFEL) の有効性を検討する. 制御目的は, 出力 $y = [y_1, y_2]^T$ の位置決めであり, シミュレーションにおける条件は, 3章のものと同様であるとする. FB 制御器には近似 PD 制御器

$$K_{fb} = \text{diag} \left[Kp + Kd \frac{s}{0.01s + 1}, Kp + Kd \frac{s}{0.01s + 1} \right]$$

$$= \text{diag} \left[\frac{2.27s + 2}{0.01s + 1}, \frac{2.27s + 2}{0.01s + 1} \right]$$

を用いる. ただし, $Kp = 2, Kd = 2.25$ である. このとき, 閉ループ系は,

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix},$$

$$P_{11}(s) = 454s^4 + (4.595 \times 10^4)s^3 + (3.996 \times 10^5)s^2$$

$$+ (6.95 \times 10^5)s + (3.333 \times 10^5),$$

$$P_{12}(s) = 151.3s^3 + (1.602 \times 10^4)s^2 + (8.967 \times 10^4)s + (6.667 \times 10^4),$$

$$P_{21}(s) = 151.3s^3 + (1.602 \times 10^4)s^2 + (8.967 \times 10^4)s + (6.667 \times 10^4),$$

$$P_{22}(s) = 756.7s^4 + (7.648 \times 10^4)s^3 + (4.262 \times 10^5)s^2$$

$$+ (6.95 \times 10^5)s + (3.333 \times 10^5),$$

$$d(s) = s^6 + 200.5s^5 + (1.132 \times 10^4)s^4 + (1.283 \times 10^5)s^3$$

$$+ (5.089 \times 10^5)s^2 + (7.847 \times 10^5)s + (4 \times 10^5)$$

であり, $q = 6, \rho_1 = 2, \rho_2 = 2, \rho = \rho_1 + \rho_2 = 4, \bar{\rho} = \max(\rho_1, \rho_2) = 2$ となるから, プレフィルタを $W(s) = L(s)^{-1}, L(s) = \text{diag}(\ell_1(s), \ell_2(s)), \ell_1(s) = (1/16)s^2 + (8/16)s + 1, \ell_2(s) = (1/20.25)s^2 + (9/20.25)s + 1$ と定めると, この最小実現

(A_w, B_w, C_w) は，次のように与えられる．

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_1^2 & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_2^2 & -2a_2 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_w = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = 4.5$$

また， $\nu = q - \rho = 6 - 4 = 2$ より，行列 A_f, B_f は 4 次元となる．FF フィルタを

$$A_f = I_2 \otimes \bar{A}_f, \quad B_f = I_2 \otimes \bar{B}_f$$

$$\bar{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f^2 & -2f \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f = 5$$

と設定する．目標軌道としては，周期と振幅が異なる 2 種類の正弦波，すなわち， $r = [r_1, r_2]^T$ ， $r_1 = \sin(2\pi(1/5)t)$ ， $r_2 = 0.8 \cdot \sin(2\pi(1/4)t)$ を用いる．また，固定ゲインおよび可変ゲインをそれぞれ， $\alpha = 100$ ， $\sigma = 5 \times 10^4$ としている．以下，シミュレーション結果を示す．本節では，VFEL の有効性についてのみ検討する（従来法 [9] 等との比較については，同じ条件で閉ループ系を構成し，シミュレーションを行った 3,4 章の結果を参照のこと）．まずは，上記 FB 制御器 $K_{fb}(s)$ で閉ループ系を安定化させたときの目標軌道追従特性（FEL なし）を図 101 に示す．追従できていないことがわかる．

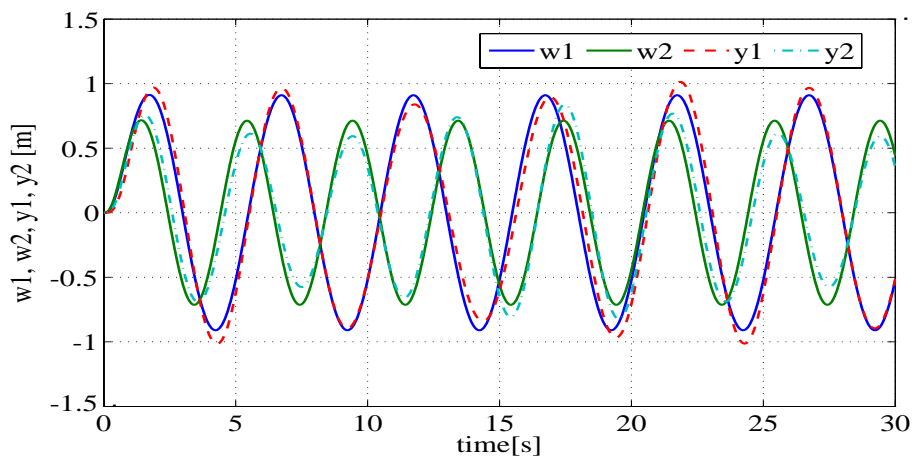


図 101 目標軌道追従特性（FEL なし）

提案する VFEL において固定ゲイン型および可変ゲイン型の学習則を利用した際の目標軌道追従誤差をそれぞれ，図 102 と図 103 に示している．ここで，可変ゲイン型のみ目標軌道追従特性も図 104 に示す．また，対応する学習パラメータの時間発展をそれぞれ，図 105 と図 106 に示している．VFEL では，閉ループ系 $\tilde{P}(s)$ の逆システムを学習するため，この例題では学習パラメータの数が非常に多くなる．それにもかかわらず，良好な目標軌道追従が達成され，学習パラメータも収束していることがわかる．可変ゲイン型は特に収束が速い．

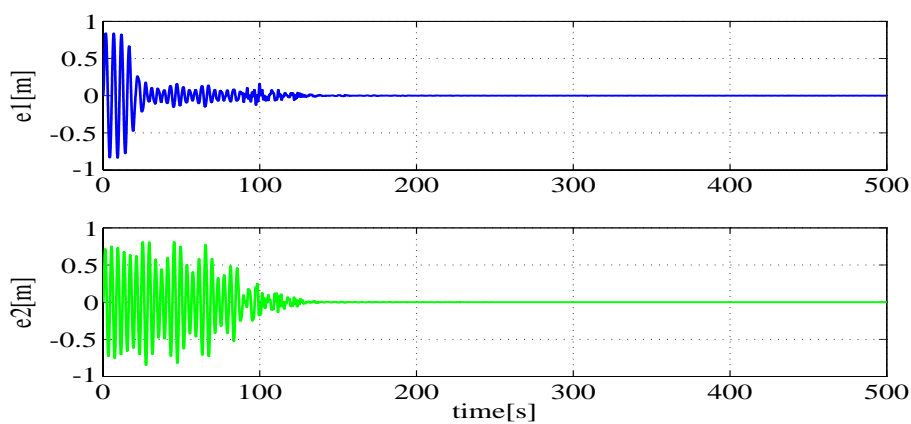


図 102 提案法による目標軌道追従誤差（固定ゲイン型）

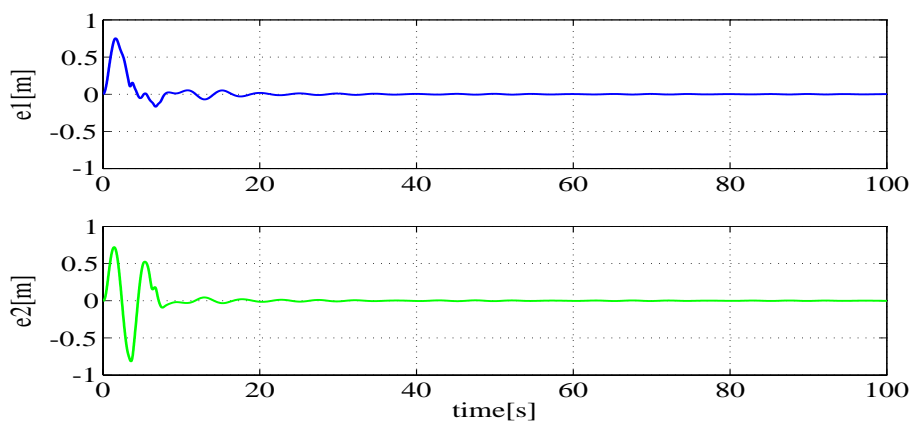


図 103 提案法による目標軌道追従誤差（可変ゲイン型）

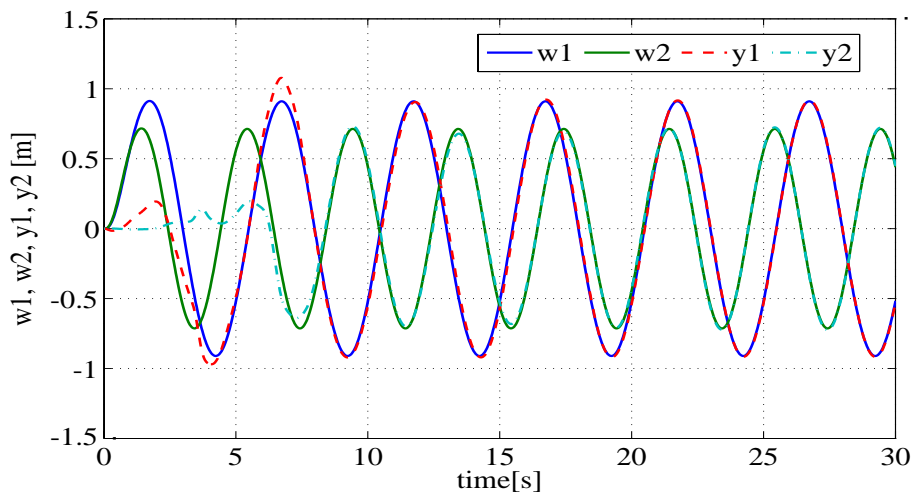


図 104 提案法による目標軌道追従特性（可変ゲイン型）

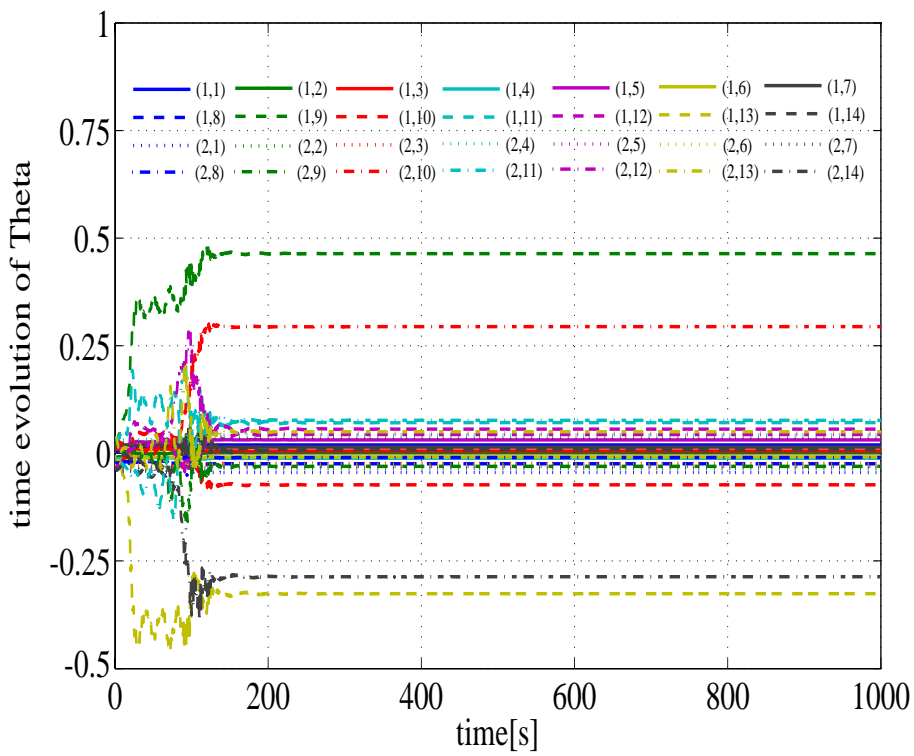


図 105 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展（固定ゲイン型）

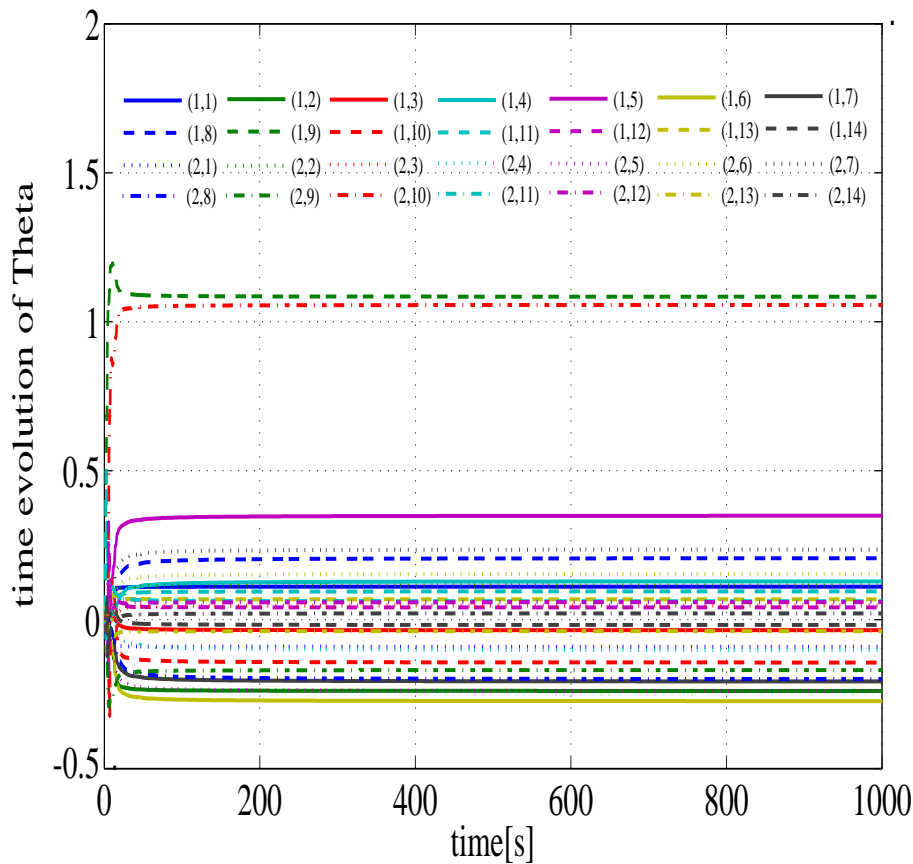


図 106 学習パラメータ $\Theta(t)$ の時間発展 (可変ゲイン型)

5.7 シミュレーション 3 (乱数による探索)

3章と同様に、厳密にプロパなプラント $P(s) = \frac{b_1s+b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}$ について、提案法 (VFEL) の有効性を検討する。上記プラントの係数は、乱数 (生成する範囲は $[-100, 100]$) で与えるものとする。ただし、これらの係数は、FB 制御器を $K_{fb}(s) = (0.5 + 0.5\frac{s}{0.01s+1})$ と予め与えた上で、閉ループ系が安定かつ最小位相になるものだけを選択するものとする。前述のシミュレーション 2,3 とは異なり、特定のプラントではなく上記の仮定の範囲で無作為に抽出した 50 種類のプラントに対して学習が成功するかどうかを評価する。以下、表 10 と表 11 のプラントに対する評価をそれぞれ、表 12、表 13 に示す。

表 10 無作為に抽出したプラント (No.1 ~ 25)

$P(s)$ の No.	$P(s)$ の係数を与えるベクトル $V = [a_2, a_1, a_0, b_1, b_0]$
1	$V = [89.1893, 77.2824, 3.0009, 35.8817, 95.3587]$
2	$V = [-14.2717, -97.1087, -34.9429, -73.0596, -9.8965]$
3	$V = [14.4550, 58.4047, -16.0527, 6.5073, 85.1409]$
4	$V = [10.9525, 75.8557, 11.5715, 50.4668, 78.9802]$
5	$V = [45.5395, 30.1974, 32.9230, 87.7560, 7.0163]$
6	$V = [-20.3120, 34.0915, -11.8931, -73.4252, -12.1593]$
7	$V = [-78.7158, -78.6411, -26.5782, -52.0785, -30.7720]$
8	$V = [-86.9128, 22.0701, 40.3106, -77.6765, -80.8353]$
9	$V = [-63.4567, -79.7571, -59.6831, -73.0508, -35.2422]$
10	$V = [94.5210, 21.0637, -32.3528, 85.5967, 79.6849]$
11	$V = [-73.8697, -89.7289, 25.5013, -94.1825, -72.7611]$
12	$V = [38.9111, 3.1358, 8.5165, 61.6967, 58.7372]$
13	$V = [21.2360, 53.2059, 69.2305, 80.3962, 19.1414]$
14	$V = [-54.6292, -10.7938, -46.7557, -8.1807, -13.4189]$
15	$V = [36.9378, -11.3813, -12.8674, 58.6047, 63.1113]$
16	$V = [50.4225, 57.8512, 0.2535, 11.0364, 26.1499]$
17	$V = [37.8249, 43.5763, 11.8058, 6.6708, 75.1448]$
18	$V = [31.8352, 16.0013, 81.9903, 27.2012, 5.1123]$
19	$V = [-68.9077, 0.4735, 13.5466, -62.3456, -35.1607]$
20	$V = [-8.1955, -90.3943, -22.9296, -27.6567, -42.4832]$
21	$V = [-86.5440, -63.6836, 15.1495, -62.8230, -41.7103]$
22	$V = [-7.6672, -30.6045, -36.3669, -8.0171, -52.8210]$
23	$V = [90.8174, -11.1324, -8.6234, 19.9634, 68.5244]$
24	$V = [62.1665, 85.7758, 34.5435, -25.5335, -18.8609]$
25	$V = [32.0144, 38.0210, 70.7447, -6.4197, -8.3043]$

表 11 無作為に抽出したプラント (No.26 ~ 50)

$P(s)$ の No.	$P(s)$ の係数を与えるベクトル $V = [a_2, a_1, a_0, b_1, b_0]$
26	$V = [-30.7780, 49.5634, -17.2761, -88.8495, -21.9944]$
27	$V = [-89.1237, -47.9972, 17.8207, -4.0533, -60.2699]$
28	$V = [-19.6987, -7.5229, 41.4564, -19.7579, -97.1229]$
29	$V = [74.2471, -65.4419, 70.0448, 91.9177, 54.0414]$
30	$V = [25.9623, 71.4029, 79.9597, -30.3263, -2.7380]$
31	$V = [-73.3654, -40.9982, -66.6746, -36.5792, -78.0321]$
32	$V = [57.9693, 82.7041, 6.6509, 60.8153, 12.5321]$
33	$V = [97.0360, 7.8662, -25.2330, 41.3470, 89.4823]$
34	$V = [89.8246, 90.6363, 46.5847, -23.0640, -91.9835]$
35	$V = [-47.0867, -37.0602, -63.3609, -10.5053, -34.6643]$
36	$V = [-20.0762, -34.9165, 11.0780, -40.9160, -26.7760]$
37	$V = [5.0468, -33.7446, -13.6813, 43.5803, 83.2424]$
38	$V = [-59.0095, 24.2510, -65.1958, -42.0920, -96.2994]$
39	$V = [40.2993, 90.4183, 49.8019, 51.3455, 8.4178]$
40	$V = [58.7121, 62.5631, 80.7582, 8.0751, 63.5727]$
41	$V = [-75.0201, 23.4365, -28.8961, -27.4124, -86.3023]$
42	$V = [-16.6469, -43.9414, 19.6201, -92.7050, -87.2627]$
43	$V = [-35.4235, -80.3243, -65.9911, -25.7672, -92.0477]$
44	$V = [-85.0311, -88.5315, -39.8087, 4.3442, 12.3760]$
45	$V = [62.5888, -17.5853, -23.1674, 4.6253, 78.4298]$
46	$V = [-18.8159, 20.8778, -81.0393, -32.8037, -71.0316]$
47	$V = [9.2968, 10.1656, 38.9074, 85.4988, 88.8421]$
48	$V = [34.6793, 37.0534, 39.1490, 59.9663, 32.1210]$
49	$V = [-26.6248, -44.8309, -46.7805, -54.6923, -99.7358]$
50	$V = [-96.2209, -59.5765, -6.1814, -24.3210, -31.9213]$

表 12 プラント (No.1 ~ 25) に対する評価

$P(s)$ の No.	$P(s)$ の極	$P(s)$ の零点	$\ e\ _{L_2}$	評価
1	-0.8258, -0.0407	-2.6576	0.4671	
2	-6.4231, -0.3812	-0.1355	0.6766	
3	-4.2988, 0.2583	-13.0839	0.4229	
4	-6.7698, -0.1561	-1.5650	0.4848	
5	$-0.3316 + 0.7830i, -0.3316 - 0.7830i$	-0.0800	0.6013	
6	1.1838, 0.4946	-0.1656	0.9745	
7	$-0.4995 + 0.2969i, -0.4995 - 0.2969i$	-0.5909	0.5778	
8	0.8197, -0.5658	-1.0407	5.8475	
9	$-0.6284 + 0.7386i, -0.6284 - 0.7386i$	-0.4824	0.5820	
10	-0.7070, 0.4841	-0.9309	0.6736	
11	-1.4524, 0.2377	-0.7726	0.6246	
12	$-0.0403 + 0.4661i, -0.0403 - 0.4661i$	-0.9520	0.3812	
13	$-1.2527 + 1.3003i, -1.2527 - 1.3003i$	-0.2381	0.8154	
14	$-0.0988 + 0.9198i, -0.0988 - 0.9198i$	-1.6403	1.3146	
15	0.7641, -0.4559	-1.0769	0.3246	
16	-1.1429, -0.0044	-2.3694	0.6314	
17	-0.7163, -0.4357	-11.2647	0.4152	
18	$-0.2513 + 1.5850i, -0.2513 - 1.5850i$	-0.1879	1.7085	
19	0.4468, -0.4400	-0.5640	0.6497	
20	-10.7699, -0.2598	-1.5361	0.5887	
21	-0.9251, 0.1892	-0.6639	0.6333	
22	$-1.9958 + 0.8717i, -1.9958 - 0.8717i$	-6.5886	0.4972	
23	0.3755, -0.2529	-3.4325	0.5069	
24	$-0.6899 + 0.2823i, -0.6899 - 0.2823i$	-0.7387	0.9812	
25	$-0.5938 + 1.3628i, -0.5938 - 1.3628i$	-1.2936	1.1622	

表 13 プラント (No.26 ~ 50) に対する評価

$P(s)$ の No.	$P(s)$ の極	$P(s)$ の零点	$\ e\ _{L_2}$	評価
26	1.1001, 0.5102	-0.2475	1.6425	
27	-0.7913, 0.2527	-14.8694	0.5039	
28	-1.6542, 1.2723	-4.9157	0.5417	
29	$0.4407 + 0.8656i, 0.4407 - 0.8656i$	-0.5879	3.9722	
30	$-1.3751 + 1.0904i, -1.3751 - 1.0904i$	-0.0903	1.3846	
31	$-0.2794 + 0.9114i, -0.2794 - 0.9114i$	-2.1332	0.5848	
32	-1.3411, -0.0855	-0.2061	0.5669	
33	-0.5521, 0.4710	-2.1642	0.4006	
34	$-0.5045 + 0.5139i, -0.5045 - 0.5139i$	-3.9882	2.9989	
35	$-0.3935 + 1.0912i, -0.3935 - 1.0912i$	-3.2997	0.7290	
36	-2.0133, 0.2741	-0.6544	0.7650	
37	7.0698, -0.3834	-1.9101	0.3341	
38	$0.2055 + 1.0308i, 0.2055 - 1.0308i$	-2.2878	1.0711	
39	-1.2725, -0.9711	-0.1639	0.7340	
40	$-0.5328 + 1.0448i, -0.5328 - 1.0448i$	-7.8726	0.6282	
41	$0.1562 + 0.6006i, 0.1562 - 0.6006i$	-3.1483	1.0423	
42	-3.0288, 0.3891	-0.9413	0.4651	
43	$-1.1338 + 0.7599i, -1.1338 - 0.7599i$	-3.5723	0.5183	
44	$-0.5206 + 0.4440i, -0.5206 - 0.4440i$	-2.8488	1.0494	
45	0.7649, -0.4839	-16.9567	0.5074	
46	$0.5548 + 1.9998i, 0.5548 - 1.9998i$	-2.1654	0.9525	
47	$-0.5467 + 1.9713i, -0.5467 - 1.9713i$	-1.0391	0.4799	
48	$-0.5342 + 0.9184i, -0.5342 - 0.9184i$	-0.5357	0.5500	
49	$-0.8419 + 1.0238i, -0.8419 - 1.0238i$	-1.8236	0.4552	
50	-0.4873, -0.1318	-1.3125	0.6322	

本シミュレーションでは，目標軌道として， $r = \sin(2\pi(1/5)t)$ を用いた．また， $L(s) = (1/25)s^2 + (2/5)s + 1$ と定め，プレフィルタを $W(s) = L(s)^{-1}$ と設定した．さらに，FF フィルタを

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f^2 & -2f \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f = 5 \quad (139)$$

と設定した．ここでは，提案法の能力を最も発揮できる可変ゲイン型の学習則を用い，その初期値を $\sigma = 1 \times 10^4$ と設定した．

3章と同様に，時刻 0 ~ 1000[s] までのシミュレーションを 50 種類のプラントについて行い，これらに対する追従誤差 $e(t)$ の L_2 ノルム $\|e\|_{L_2}$ も参考データとして示している．学習がうまくいかない場合には， $\|e\|_{L_2}$ が大きくなっていることがわかる（ただし，No.8 では $\|e\|_{L_2}$ が大きくなり，学習が失敗したと判定されているが，5000[s] までシミュレーション時間を延ばすと，実は学習に成功する．この場合だけ，学習に多くの時間を要する．また，No.29 と No.34 は，少しオーバーシュートがあるため， $\|e\|_{L_2}$ が大きくなっている．）．シミュレーションを行った結果，本節で抽出したプラントの集合に対しては，提案法は 98[%](=49/50) の確率で学習に成功することがわかる（ここで，シミュレーションの時間区間を 0 ~ 5000[s] にすれば，成功率 100[%] と言える）．これは手法 [51] や手法 [52] よりも高い成功率である．このことから，VFEL は優れた性能を示すことがわかる．

5.8 本章のまとめ

本章では，正実性の仮定を除去した副作用で閉ループ系に時変ブロックが挿入されてしまう問題を解決するため，仮想フィードバック誤差学習を提案した．すなわち，閉ループ系に対して，学習型 FF 制御器を直列結合し，仮想フィードバック誤差をもとに学習を行う新しい FEL 制御系（VFEL）を提案した．これにより，閉ループ系への信号入力点が従来の 2 点から 1 点に削減されるため非正方のプラントに対しても適用可能となり，また，FF 制御信号の接続によるプラントの直前への入力外乱としての影響をも排除できる．

さらに，閉ループ系の逆システムを構成するために，従来法と若干異なるタイプのプレフィルタ統合型 FF 制御器を導入した．また，Muramatsu らの手法を援

用し，仮想フィードバック誤差に基づく学習則を導いた（MIMO系では行列の積が非可換であるためこの拡張は自明ではない）。

その他，VFELを具体例でシミュレーションし，その有効性を確認した。本章で扱ったMIMOプラントの具体例では，学習パラメータの数が非常に多くなるが，短時間での学習に成功しており，興味深い。

なお，本章で議論しなかったPE条件を満たさない場合の仮想フィードバック誤差信号の収束性については，今後の課題としたい。

6. おわりに

本章では、提案法について考察を行った後、本論文のまとめについて述べる。

6.1 考察

提案法について考察を行う。3章では提案法1 (PIT-FEL) について、4章では提案法2 (改良版 PIT-FEL) について、5章では提案法3 (VFEL) について述べた。また、各章ではそれぞれの手法の有効性について具体例も含めて検討を行った。その結果、3種類の提案法をそれぞれ適用した際、扱うプラント (SISO, MIMO, 安定, 不安定, 高相対次数など) や選定するFB制御器の種類、またそれらの組合せの違い、制御する際の制約 (線形近似で扱う場合の動作範囲の制約など) の有無、などの条件によって、特に有利になる場合もあれば、差が顕著でない場合もみられた。そこで、これらをふまえた上で、各提案法の性能について考察を試みる。

まずは、正実性の視点から考える。4.4節の前半で示したシミュレーションの通り、提案法2では閉ループ系が正実性を満たさない極端な場合において、提案法1よりも高い性能を示す。それは、提案法1では追従制御そのものがほぼ不可能であったことからよくわかることである。また、提案法3については、提案法2の性質を継承しているため、同じく提案法1よりも高い性能を示すと言える。しかしながら、上述のシミュレーションでは、安定プラントを扱っていた。もしもこれが不安定プラントであったとすれば、その節で扱われた例題のように高相対次数のFB制御器による制御は困難となり、各提案法の性能において格段の差はみられなくなるだろう。当然ながら、可変ゲイン型を利用できる提案法2,3では、収束速度を速くできるが、同じ条件下で比較した場合に片方だけ学習が成功し、もう一方は失敗するといったような極端な性能の差はみられなくなるだろう。たとえば、3章~5章における連結型台車のシミュレーションによると、収束速度については差がみられるが、そこで設定した条件 (パイプロパなFB制御器を利用など) の下では全ての提案法で良好な制御が確認されている。したがって、不安定プラントを扱う場合、位相遅れの観点からも高相対次数のFB制御器を与えることは考えにくい。実際、4.4節の後半における不安定なMIMOプラントの例

題においては定数FBにて、また、各章の具体例においてはバイプロパなFB制御器で閉ループ系を安定化している（つまり、両者ともにFB制御器の相対次数は0次である）。

次に、可変ゲイン型の学習則について考える。ゲインを可変にできることから、その初期値を大きく設定することで、学習速度を極端に速めることができる。しかしながら、これは、プラントの出力の範囲（動作範囲）や制御入力範囲などに制約がない場合に限られる。実際に制約のあるような場合、たとえば、3章～5章の具体例で示した模型自動車のモデルなどでは、もとの非線形モデルの挙動をある動作点に固定し、その動作点まわりで線形近似しているため、可変ゲインの初期値を大きく設定できない。なぜならば、もとの非線形モデルを近似的に制御するためには、動作点まわりでの操作が前提となるからである。つまり、制御入力であるステアリング角および状態量である車両の絶対角度がそれぞれ0[rad]近傍でなければならない。とくに、4.5節のシミュレーションでは、可変ゲインの初期値を可能な限り大きな値に設定しているため、初期時刻での制御入力（ステアリング角）が過大となってしまう、その結果、状態量（車両の絶対角度）も大きくなっている。これは本論文で許容している線形近似の範囲に入っており問題はないが、これ以上大きくなるとその範囲から完全に外れてしまうことになるため注意を要する。ただし、提案法3においては、5.6節の結果から、もう少し大きな可変ゲインを初期設定できるものと考えられる。このことは、おそらく、閉ループ系への接続点が1点に削減された効果（FF制御信号の影響の排除）によるものと考えられる。その他、可変ゲイン型の学習則は、可変ゲインの初期値を大きく設定できる場合、MIMOプラントに対しては特に高い性能を示す。提案法2,3は提案法1よりも収束速度を速めることが可能である（実は、4章～5章における連結型台車のシミュレーションでは可変ゲインの初期値 σ をさらに大きく設定することもできる）。

可変ゲイン型に対して固定ゲイン型の学習則についても考える。提案法1～3の全てが固定ゲイン型で学習できる。ただし、学習率 α が常に固定であるため、あまり大きな値に設定すると、学習が不安定になり、発散してしまう。ゆえに、本論文の各例題で示した学習率の範囲にとどめている。さて、本論文では述べてい

ないが，提案法 1 の固定ゲイン型学習則と提案法 2, 3 のそれとは設定できる学習率の上限がほとんどの場合で異なる．シミュレーションにより検討してきた経験上，提案法 2, 3 の方が大きな値を設定できる傾向にある．このため，もしも，同じ学習率で平等な評価を行わず，提案法 2, 3 に設定でき得る学習率を利用すれば，収束速度の改善が見込まれるだろう．なぜならば，提案法 1 の固定ゲイン型学習則と提案法 2, 3 のそれとは扱う信号が異なり，同一視できないからである．前者では誤差信号 $e(t)$ が，後者では線形誤差モデル $\epsilon(t)$ がそれぞれ利用される．

さらに，時変ブロックの影響について考える．時変ブロックが挿入される場合には，提案法 3 が提案法 2 よりも極めて有利となる．しかしながら，プラントが有限零点を持たない場合には，その限りではなく，必ずしも提案法 3 が収束速度等の点で有利になるわけではない．ただし，3 章～5 章の具体例（連結型台車）のシミュレーション結果を見ると，提案法 3（可変ゲイン型を利用）は最も収束速度が速く，しかも安定した制御性能（急激なオーバーシュートが存在しない）を示していると言える．

3 章～5 章に渡って，乱数で生成したプラント（50 サンプル）に対するシミュレーションを行った．本来ならば，与えられたプラントに対して FB 制御器や学習率を個別にチューニングすべきであるが，平等に評価を行うため，FB 制御器としては予め共通のものを与え，また学習率も同じ値に設定した．結果，提案法 3 が提案法 1, 2 よりも優れた性能を示すことがわかった．学習に失敗した原因は，提案法 1, 2 については，シミュレーションで用いた外生信号 r が PE 性を満たさない単一周波数の正弦波であったこと，生成された各プラントに対して共通の FB 制御器を与えたことから閉ループ系のロバスト性が低い（FF 制御信号の外乱としての影響を受け易い）組み合わせ（プラント + FB 制御器）であったこと，学習率の値がもともと大きすぎたこと等，また，とくに提案法 2 については，時変ブロックの影響を受けたこと等も考えられる．しかしながら，いくつかの要因が複合的に作用しているとみられるため学習に失敗した原因の詳細については特定は困難である．その一方で，3 章および 4 章で示している通り，最適な学習率 α や FB 制御器を再設定することによって，追従誤差の零への収束を確認できている．

6.2 まとめ

本論文のまとめについて述べる．本論文においては，線形制御理論における，多入出力フィードバック誤差学習 (FEL) の新たな枠組みを提案した．従来の FEL では，まず，プレフィルタの既知情報をも未知として冗長に学習を行う問題があった．次に，学習則の安定性が閉ループ系の正実性に依存してしまう問題があった．さらに，FEL のとる 2 自由度構成の複雑さをはじめ，正実性の仮定を除去した副作用の問題もあった．本論文では，上記の問題点を解決するために，3~5 章に渡って，順次解決策を提示した．

3 章では，プレフィルタの状態変数を FF 制御信号にも利用する新たな構成 (プレフィルタ統合型 FEL) を提案した．すなわち，プレフィルタ・パラメータの既知情報を積極的に FF 制御器に取り込み，FF 制御器内の学習パラメータの数を削減させることに成功した．これにより，計算コスト等の面で大変有利になる．ここでは，プラントの逆システムを，多項式行列部分と厳密にプロパな有理伝達行列部分に分けるといふ，理論的に新しいテクニックを導入している．ただし，学習則は正実性に依存する Miyamura らのものを利用した．

4 章では，3 章で解決できなかった正実性に依存する学習則の問題点を解決した．すなわち，プレフィルタ統合型 FEL における FF 制御器の構成を少し変更し，FF 制御信号 $u_{ff}(t)$ ではなく，プラントへの制御入力 $u(t)$ を FF 制御器で利用するようにした．この構成によって，正実性に依存しない学習則の導出が可能となった．FF 制御器の準備の下，FB 誤差信号 $e(t)$ を用いたある補助的なベクトル $\tilde{\xi}(t)$ を構成し，未知パラメータに線形な誤差モデル $\varepsilon(t)$ を導出し，この $\varepsilon(t)$ を学習則に利用することで，正実性に依存しない学習則の導出を達成した．ただし，正実性の仮定を除去した副作用で，閉ループ系にある時変ブロック (FF 制御器の一部) が挿入されてしまい，閉ループ系が十分にロバストであり，この時変ブロックの影響を受けないという仮定を要するようになった．

5 章では，FEL の 2 自由度構成の複雑さ (閉ループ系への信号入力点が 2 点必要) の問題をはじめ，4 章で述べられた副作用の問題を解決するために，閉ループ系の前段にプレフィルタ統合型 FF 制御器を設けるタイプの FEL 制御系を提案した．FF 制御器が前段に設けられているため，時変ブロックが閉ループ系に挿入

されることはなく，また，プラントが非正方であっても，原理上，制御が可能となる．さらに，プラント直前に入力される FF 制御信号 $u_{ff}(t)$ の外乱としての悪影響をも排除した．この構成では，FB 誤差を利用して学習ができないため，仮想 FB 誤差と呼ぶ仮想的な誤差信号を学習に利用する仮想 FB 誤差学習 (VFEL) という新たな FEL の概念を導入した．

7. 今後の課題

本論文では，従来の FEL の問題点を各章にて順次解決したが，それでもやはりまだ以下のような課題が残る．ここでは，提案した制御手法そのものに対する「理論的な課題」と提案法の実装に対する「技術的な課題」とに分けて説明する．

7.1 理論的な課題

以下に「理論的な課題」についてまとめる．

- (1) FEL, VFEL では，プラントに対して最小位相の仮定を要するため，より広いクラスの対象を制御する上では，この仮定は大きな欠点である（仮定の除去が望ましい）．
- (2) 本論文の FEL, VFEL では，連続時間系を対象とした議論にとどまっているため，実用的な視点からは，離散時間系やサンプル値系としての議論が不可避である．
- (3) 本論文の FEL, VFEL では，PE 条件のもとで誤差信号の収束性を解析しているが，一般の場合での解析も必要である．
- (4) VFEL では，FEL における正実性の仮定を除去したことで生じる副作用の解決を優先したために，閉ループ系全体を未知として冗長に学習をしなければならない．このことは，副作用の解決と冗長性排除とのある種のトレードオフともとれるが，VFEL における閉ループ系の FB 制御器の既知情報を有効利用できる構成への改善が必要である．

- (5) 本論文にて達成されていない可変ゲイン型学習則 (忘却型) の安定性解析も必要である .
- (6) FEL, VFEL では, FB 制御器の設計指標が全く議論されておらず, 指標が必要である . (これに関連し, 学習型 FB 制御器を用いて適応的に閉ループを安定化させた後 (閉ループ系の自動チューニング), FEL, VFEL に切替えるような, 適応制御と FEL, VFEL との併合系の研究が必要である .)

7.2 技術的な課題

以下に「技術的な課題」についてまとめる .

- (1) アクチュエータ (DC モータ等) の制御入力には, 不感帯や制御入力飽和等の上下限 (制約) が有るが, FEL, VFEL ではこれらを考慮不可能である . また, 制御対象の可動範囲には制限が有るため, 出力のオーバーシュートは可能な限り避けなければならない . このため, 制約を破らない範囲で外生信号 $r(t)$ を与えたり, 学習係数を小さく設定する等の工夫が必要となる .
- (2) FEL の制御対象が, 高相対次数かつ不安定な系の場合, 事前の閉ループ系の安定化が困難な場合が存在する . このような場合, プラントの既知情報を積極的に利用した状態フィードバック等を補助的に利用して, 予めプラントを安定化する等の措置が必要となる (プラントが未知であるという理論上の仮定に反してしまう) .
- (3) FEL, VFEL ではプラントは未知であると仮定しているため, この仮定のもとで実験を行う場合, 速度や加速度の情報はセンサによって直接取得しなければならない . そのため, センサから取得される情報の精度が制御性能に影響を与え得る .
- (4) 観測ノイズや外乱等の影響を考慮できるよりロバストな制御手法への拡張が必要である .
- (5) 実験においては, シミュレーションよりも学習に多くの時間を要するため, 学習速度のさらなる改善が必要である .

謝辞

本論文の審査をして頂きました奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 応用システム科学講座 杉本謙二教授，ロボティクス講座 小笠原司教授，応用システム科学講座 平田健太郎准教授に対しまして，厚く御礼申し上げます。

杉本教授には，多入出力フィードバック誤差学習 (FEL) の基本から懇切丁寧にご指導を頂き，線形制御理論による FEL の研究を大きく発展させることができました。これには，FEL についてはもちろんのこと，行列論 (多入出力系) や 2 自由度制御系について御見識の深い教授のお力添えを頂いたことにつきま。心より感謝申し上げます。

また，小笠原教授には，お忙しい中，副指導教員になって頂き，有難うございました。博士前期課程在籍時から現在に至るまでの長い期間，終始，様々な面でご指導を頂き，ここに改めて御礼申し上げます。

平田准教授からは，定例会を含めた日々の研究に関して，有益なご助言を頂きました。深く感謝申し上げます。博士前期課程在籍時における受動歩行の研究におきましては，本当にお世話になりました。現在に至るまで，向学心を持って進んで来ることができたのは，一重に，博士前期課程在籍時に准教授の指導によって備わった研究の基礎力 (礎) のおかげであると考えています。

小木曾公尚助教には，衝突回避を優先的に考慮した目標軌道追従法の実機実証研究におきまして，多大なるご指導を頂きました。さらに，その成果を学術論文としてまとめて下さり，共著者としてしまして，心より御礼申し上げます。今後，ご指導頂きました実験のノウハウ等を，活かしていきたいと考えています。

橋拓至助教には，博士前期課程在籍時から，日々の生活や研究活動を含め様々な面でご指導を頂き，有難うございました。特に，定例会におきましては，貴重なご意見を賜り，感謝申し上げます。

また，秘書の林英子様には，国際会議参加に伴う諸手続きをはじめ，研究・学生生活に関わる様々な事務手続き等に関して，いつもサポートして頂きました。厚く御礼申し上げます。

最後に，研究についての貴重なご意見，学生生活についてお世話になった応用システム科学講座の皆々様に心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 伊藤 (宏司), 伊藤 (正美): 生体とロボットにおける運動制御; 計測自動制御学会 (1991)
- [2] 村松: フィードバック誤差学習と制御系設計理論; 理研 BMC フォーラム, pp. 1-7 (2006)
- [3] 村松, 渡辺: フィードバック誤差学習とむだ時間; 計測と制御, vol. 45, no. 8, pp. 735-740 (2006)
- [4] M. Kawato ,K. Furukawa and R. Suzuki: A hierarchical neuralnetwork model for control and learning of voluntary movement; Biol. Cybern. , vol. 57 , pp. 169-185 (1987)
- [5] 鈴木: 生物情報システム論; 朝倉書店 (1991)
- [6] 計測自動制御学会: ニューロ・ファジィ・AIハンドブック; オーム社 (1994)
- [7] A. Miyamura and H. Kimura: Stability of feedback error learning scheme; Systems & Control Letters , vol. 45 , pp. 303-316 (2002)
- [8] E. Muramatsu and K. Watanabe: Feedback error learning control without recourse to positive realness; IEEE Trans. on Automatic Control , vol. 49 , no. 10 , pp. 1762-1767 (2004)
- [9] B. Alali ,K. Hirata and K. Sugimoto: Generalization of Feedback Error Learning (FEL) to MIMO Systems; 計測自動制御学会論文集 , vol. 43 , no. 4 , pp. 293-302 (2007)
- [10] B. Alali , K. Hirata and K. Sugimoto: Feedback Error Learning for Writing One Stroke Characters by Two-Link Manipulator; システム制御情報学会論文誌 , vol. 20 , no. 12 , pp. 475-481 (2007)

- [11] K. Sugimoto, B. Alali, and K. Hirata: Feedback Error Learning with Insufficient Excitation; IEICE Trans. on Fund. of Elect., Comm. and Computer Sc., vol. E91-A, no. 10, pp. 3071-3075 (2008)
- [12] K. Sugimoto, B. Alali, and K. Hirata: Feedback Error Learning with Insufficient Excitation; 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico (2008)
- [13] 齋藤, 羅, 渡辺, 村松, 藤井: 未知の動的環境におけるロボットの2自由度適応力追従制御; システム制御情報学会論文誌, vol. 18, no. 6, pp. 203-212 (2005)
- [14] S. Sastry: Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness; Prentice Hall, NJ, U.S.A (1989)
- [15] K. Zhou, J. Doyle and K. Glover: Robust and Optimal Control; Prentice Hall, NJ, U.S.A (1996)
- [16] 前田, 杉江: アドバンスト制御のためのシステム制御理論, 朝倉書店 (1990)
- [17] P.A. Ioannou and B. Fidan: Adaptive Control Tutorial, Advances in Design and Control, SIAM (2006)
- [18] J. Nakanishi and S. Schaal: Feedback error learning and nonlinear adaptive control; Neural Networks, vol. 17, pp. 1453-1465 (2004)
- [19] 牛田, 岸本, 木村: フィードバック誤差学習法による非線形DDアームの適応制御; 第30回制御理論シンポジウム, pp. 85- 88 (2001)
- [20] S. Ushida and H. Kimura: Adaptive control of nonlinear system with time delay based on the feedback error learning method; SICE Annual Conference 2002 (SICE2002), pp. 2685-2690, Osaka, Japan, Aug. (2002)
- [21] O. Kaneko, S. Souma and T. Fujii: A fictitious reference iterative tuning (FRIT) in the two-degree of freedom control scheme and its application to a

- facile closed loop system identification; Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers (SICE), vol. 42, no. 1, pp. 17-25 (2006)
- [22] 酒井, 杉江: 射影型反復学習による連続時間閉ループ同定法; 計測自動制御学会論文集, vol. 43, no. 10, pp. 877-882 (2007)
- [23] A. Miyamura and H. Kimura: Stability of feedback error learning method for general plants with time delay; Proceedings of the 15th triennial World Congress IFAC, Barcelona, Spain (2002)
- [24] A. Miyamura: Stability of feedback error learning method with time delay; Neurocomputing, vol. 69, pp. 1645-1654 (2006)
- [25] J. Terashita and H. Kimura: Robustness of feedback error learning method with time delay; SICE Annual Conference 2002 (SICE2002), pp. 1835-1839, Osaka, Japan, Aug. (2002)
- [26] S. Wongsura and W. Kongprawechnon: Discrete-time feedback error learning; Suranaree J. Sci. Technol., vol. 12, no. 4, pp. 266-275 (2005)
- [27] S. Wongsura and W. Kongprawechnon: Discrete-time feedback error learning with PD controller; International Conference on Control, Automation and Systems 2005 (ICCAS2005), KINTEX, Gyeonggi-Do, Korea, Jun. (2005)
- [28] S. Wongsura and W. Kongprawechnon: Robust discrete-time feedback error learning; Science Asia, vol. 32, pp. 241-251 (2006)
- [29] S. Wongsura and W. Kongprawechnon: New theoretical analysis for the discrete-time feedback error learning method; Thammasat Int. J. Sc. Tech., vol. 12, no. 4 (2007)
- [30] S. Wongsura and W. Kongprawechnon: Discrete-time feedback error learning with time-delay; Suranaree J. Sci. Technol., vol. 14, no. 3, pp. 247-255 (2007)

- [31] S. Wongsura and W. Kongprawechnon: Discrete-time feedback error learning and nonlinear adaptive controller; ECTI Transactions on Electrical Eng., Electronics, and Communications, vol. 6, no. 2, Aug. (2008)
- [32] N. Suwanjatuporn, M. Napaamporn, W. Kongprawechnon and S. Wongsura: Nonlinear discrete-time feedback error learning with PI controller for AC servo motor; SICE Annual Conference 2008, pp. 1385-1389, The University Electro-Communications, Japan, Aug. (2008)
- [33] S. Wongsura and W. Kongprawechnon: Discrete-time feedback error learning for unknown nonlinear systems; Proceedings of the Second International Conference on Innovative Computing, Information and Control 2007 (ICICIC 2007), Page: 141 , Kumamoto, Japan, Sept. (2007)
- [34] G. Tao, and P.A. Ioannou: Necessary and sufficient conditions for strictly positive real matrices; IEE Proceedings G: Circuits, Devices and Systems, vol. 137, no. 5, pp. 360-366 (1990)
- [35] S. Boyd and S.S. Sastry: Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control; Automatica, vol. 22, no. 6, pp. 629-639 (1986)
- [36] S. Jagannathan: Discrete-time adaptive control of feedback linearizable nonlinear systems; IEEE Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, pp. 4747-4752, Kobe, Japan, Dec. (1996)
- [37] N. Sadegh: A perceptron network for functional identification and control of nonlinear systems; IEEE Trans. on Neural Networks, vol. 4, no. 6, pp. 982-988 (1993)
- [38] S. Jagannathan and F.L. Lewis: Robust Implicit self-tuning regulator: convergence and stability; Automatica, vol. 32, no. 12, pp. 1629-1644 (1996)
- [39] 太田: システム制御のための数学 (1) —線形代数編—; コロナ社 (2000)

- [40] 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論; 計測自動制御学会 (1978)
- [41] 美多, 大須賀: ロボット制御工学入門; コロナ社 (1989)
- [42] 藤崎, 吉川: 強正実制御系設計のための等式制約を含まないLMI条件; システム制御情報学会論文誌, vol. 15, no. 11, pp. 624-626 (2002)
- [43] 川崎, 水本, 若宮, 岩井: 強正実性を利用した多入出力系の適応安定化制御とその倒立振り子系での検討; 日本機械学会論文集 (C編), vol. 60, no. 579, pp. 3888-3895 (1994)
- [44] M. Mueller: Normal form for linear systems with respect to its vector relative degree; Linear Algebra and its Applications, vol. 430, pp. 1292-1312 (2009)
- [45] K.S. Narendra and A. M. Annaswamy: Stable Adaptive Systems; Prentice-Hall International Edition, NJ, USA (1989)
- [46] 鈴木: アダプティブコントロール; コロナ社 (2001)
- [47] 堀, 大西: 応用制御工学; 丸善 (1998)
- [48] 田中: アドバンスドファジィ制御 —ファジィ制御の新たなる展開—; 共立出版 (1994)
- [49] 吉川, 井村: 現代制御論; 昭晃堂 (1994)
- [50] 山口, 平田, 藤本: ナノスケールサーボ制御 —高速・高精度に位置を決める技術—; 東京電機大学出版局 (2007)
- [51] 野口, 杉本: プレフィルタの状態を利用したフィードバック誤差学習; システム制御情報学会論文誌, vol. 23, no. 5, pp. 105-110 (2010)
- [52] 野口, 杉本: 正実性によらない多入出力フィードバック誤差学習—プレフィルタ統合型学習則の改善—; システム制御情報学会論文誌, vol. 24, no. 3, pp. 61-72 (2011), (掲載決定)

付録

A. PE (Persistently Exciting) Condition[17]

適応制御系の学習パラメータの収束性を議論する上で，重要となるのが PE (Persistently Exciting) 条件である．この PE 条件に関しては，文献によっていくつかの定義 [35, 45, 14, 17, 8, 46, 9] が存在するが，本論文では，以下の定義 [17] を用いている．

ある $T_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ に対して

$$\int_t^{t+T_0} \xi(\tau)\xi(\tau)^T d\tau \geq \alpha_0 T_0 I_p \quad (140)$$

が任意の t について成立するならば，ベクトル信号

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_p(t) \end{bmatrix} \quad (141)$$

は PE 条件を満たすと言われる [17].

B. 指数安定性定理 ([14], pp. 73)

$w(t) \in \mathbb{R}^n$ を区分的に連続であるとする．もしも $w(t)$ が PE であれば，このとき，

$$\dot{\phi}(t) = -g w(t) w(t)^T \phi(t), \text{ for } g > 0 \quad (142)$$

の解は大域的に指数安定である．

C. 行列微分方程式の指数的収束 [12]

ここでは，文献 [12] に基づき，行列微分方程式

$$\dot{\Psi}_a(t) = -\alpha \Psi_a(t) \eta_a(t) \eta_a(t)^T \quad (143)$$

の指数的収束について説明する. この方程式において, $\Psi_a(t)$ および $\eta_a(t)$ は, それぞれ, 適切な次元を持つ行列と縦ベクトルである. また, α は正のスカラー定数である.

まず, (143) 式に対して, Kronecker 積に関する公式 [15]

$$\text{vec}(X \cdot Y \cdot Z) = (Z^T \otimes X) \cdot \text{vec}(Y) \quad (144)$$

を適用することを考える. ここで, X, Y, Z は, 適切な次元を持つ任意の行列である. また, \otimes は, Kronecker 積を表している. さらに, $\text{vec}(B)$ は, 行列 $B = (b_{ij})_{i=1, j=1}^{m, \ell}$ の各列をすべて積上げて形成される, 1つの長いベクトル

$$\text{vec}(B) = (b_{11} \cdots b_{m1}, b_{12} \cdots b_{m2}, \cdots, b_{1\ell} \cdots b_{m\ell})^T \quad (145)$$

を意味している. (143) 式は, (144) 式より,

$$\text{vec}(\dot{\Psi}_a(t)) = (\eta_a(t)\eta_a(t)^T \otimes (-\alpha I)) \cdot \text{vec}(\Psi_a(t)) \quad (146)$$

と表わされる. ここで,

$$\eta_a(t) = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \\ \eta_\ell(t) \end{bmatrix} \quad (147)$$

とおくと, (146) 式は, 次のように表わされる.

$$\text{vec}(\dot{\Psi}_a(t)) = (-\alpha) \begin{bmatrix} \eta_1(t)I \\ \eta_2(t)I \\ \vdots \\ \eta_\ell(t)I \end{bmatrix} \left[\eta_1(t)I, \eta_2(t)I, \cdots, \eta_\ell(t)I \right] \text{vec}(\Psi_a(t)) \quad (148)$$

このとき, 文献 [12] の Lemma1 から, もしも, ベクトル $\eta_a(t)$ が PE 条件を満たすならば,

$$\eta_a(t)\eta_a(t)^T \otimes I = \begin{bmatrix} \eta_1(t)I \\ \eta_2(t)I \\ \vdots \\ \eta_\ell(t)I \end{bmatrix} \left[\eta_1(t)I, \eta_2(t)I, \cdots, \eta_\ell(t)I \right] \quad (149)$$

もまた PE 条件を満たすことになる。したがって、ベクトル微分方程式 (148) は、指数安定性定理 [14] より零へ指数的に収束する。

D. 学習パラメータの真値 F_0, H_0 の導出

(57) 式の左辺

$$(g(s)M(s) + R(s))(f(s)L(s))^{-1}$$

は、バイプロパなので、

$$(g(s)M(s) + R(s))(f(s)L(s))^{-1} = \Pi_0 + \Pi(s)(f(s)L(s))^{-1}$$

と一意的に表せる。ここで、 Π_0 は定数行列、 $\Pi(s)$ は多項式行列、 $\Pi(s)(f(s)L(s))^{-1}$ は厳密にプロパな有理式行列である。いま、多項式行列 $\Pi(s)$ を (i, j) - 成分で表現すると、

$$\Pi(s) := (\pi_{ij}(s))_{i=1, j=1}^{m, m},$$

$$\pi_{ij}(s) = \tilde{\pi}_{ij}(s)f(s) + \bar{\pi}_{ij}(s),$$

$$\deg(\bar{\pi}_{ij}(s)) < \deg(f(s)) = \nu, \deg(\tilde{\pi}_{ij}(s)) < \rho_j$$

となる。さらに、 $\Pi(s)(f(s)L(s))^{-1}$ を (i, j) - 成分で表現すると、

$$\Pi(s)(f(s)L(s))^{-1} := (\pi_{ij}(s)(f(s)\ell_j(s))^{-1})_{i=1, j=1}^{m, m},$$

$$\pi_{ij}(s)(f(s)\ell_j(s))^{-1} = \tilde{\pi}_{ij}(s)\ell_j(s)^{-1} + \bar{\pi}_{ij}(s)(f(s)\ell_j(s))^{-1},$$

$$\tilde{\pi}_{ij}(s) = \tilde{\pi}_{ij}^1 s^{\rho_j - 1} + \cdots + \tilde{\pi}_{ij}^{\rho_j}, \bar{\pi}_{ij}(s) = \bar{\pi}_{ij}^1 s^{\nu - 1} + \cdots + \bar{\pi}_{ij}^{\nu}$$

となる。したがって、学習パラメータの真値 F_0, H_0 は、以下のように求められる。

$$F_0 = \left[\bar{F}_0^1, \cdots, \bar{F}_0^m \mid \tilde{F}_0^1, \cdots, \tilde{F}_0^m \right], H_0 = \Pi_0,$$

$$\bar{F}_0^k = \begin{bmatrix} \bar{\pi}_{1k}^\nu & \cdots & \bar{\pi}_{1k}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\pi}_{mk}^\nu & \cdots & \bar{\pi}_{mk}^1 \end{bmatrix}, \tilde{F}_0^k = \begin{bmatrix} \tilde{\pi}_{1k}^{\rho_k} & \cdots & \tilde{\pi}_{1k}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\pi}_{mk}^{\rho_k} & \cdots & \tilde{\pi}_{mk}^1 \end{bmatrix}, (k = 1, \cdots, m)$$

E. 補題 5.2 の証明 [52]

(証明) リアプノフ関数

$$V(t) = \frac{1}{2} \text{tr} [\Psi(t)^T \Psi(t)] \quad (150)$$

を定義すると，この (136) 式に沿った時間微分は，

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \text{tr} [\Psi(t)^T \dot{\Psi}(t)] \\ &= -\alpha \text{tr} [\Psi(t)^T \Psi(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T] \\ &= -\alpha \left\| \Psi(t) \tilde{\xi}(t) \right\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (151)$$

と計算される．これにより， $\dot{V}(t) \rightarrow 0$ ．よって， $\Psi(t) \tilde{\xi}(t) \rightarrow 0$ となる．そして，(136) 式において $\tilde{\xi}(t)$ が有界なので， $\frac{d\Psi(t)}{dt} \rightarrow 0$ となる．したがって， $\Psi(t) \rightarrow \Psi_0$ となり，このとき $\Psi_0 \tilde{\xi}(t) = 0$ である．

さらに，もしも， $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たすならば，このとき学習則は大域的に指数安定である．すなわち，”PE と指数安定性定理” [14] に基づき $\Psi(t) \rightarrow 0$ である (詳細には，付録 C の公式を (136) 式に適用することによって示される)．◇

F. 補題 5.3 の証明 [52]

(証明) まず，前半部分の証明を行う．リアプノフ関数

$$V(t) = \frac{1}{2} \text{tr} [Z(t)^T Z(t)] \quad (152)$$

を定義すると，この (132) 式に沿った時間微分は，

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \text{tr} [Z(t)^T \dot{Z}(t)] \\ &= \text{tr} [Z(t)^T (-Z(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T Z(t))] \\ &= -\text{tr} [Z(t)^T Z(t) \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t)^T Z(t)] \\ &= -\left\| Z(t) \tilde{\xi}(t) \right\|_{Z(t)}^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (153)$$

と計算される．ここに， $Z(t) = Z(t)^T \geq 0, \forall t \geq 0$ を用いている．これにより， $\dot{V}(t) \rightarrow 0$ ．よって， $Z(t)\tilde{\xi}(t) \rightarrow 0$ となる．そして，(132) 式において $\tilde{\xi}(t)$ が有界なので， $\frac{dZ(t)}{dt} \rightarrow 0$ となる．したがって， $Z(t) \rightarrow \bar{Z}$ となり，このとき $\bar{Z}\tilde{\xi}(t) = 0$ である．よって，(132) 式は，非増加関数（減衰関数）であり， $Z(t)$ は， $t \rightarrow \infty$ のとき定数行列 \bar{Z} に収束する．さて，(133) 式に定めるパラメータの誤差 $\Psi(t)$ に関する恒等式

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} (\Psi(t)Z(t)^{-1}) \\
&= \left(\frac{d}{dt} \Psi(t) \right) Z(t)^{-1} + \Psi(t) \left(\frac{d}{dt} Z(t)^{-1} \right) \\
&= -\Psi(t)\tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t)^T Z(t)Z(t)^{-1} + \Psi(t) \left\{ -Z(t)^{-1} \left(\frac{d}{dt} Z(t) \right) Z(t)^{-1} \right\} \\
&= -\Psi(t)\tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t)^T - \Psi(t)Z(t)^{-1} \left(-Z(t)\tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t)^T Z(t) \right) Z(t)^{-1} \\
&= -\Psi(t)\tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t)^T + \Psi(t)\tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t)^T = 0
\end{aligned} \tag{154}$$

を得ることができるため，初期値を $Z(0), \Psi(0)$ とするとき，

$$\Psi(t)Z(t)^{-1} = \Psi(0)Z(0)^{-1} = \sigma^{-1}\Psi(0) = \text{const} \tag{155}$$

である．したがって，(155) 式より，

$$\Psi(t) = \sigma^{-1}\Psi(0)Z(t) \tag{156}$$

となることから，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = \sigma^{-1}\Psi(0)\bar{Z} = \Psi_0 = \text{const} \tag{157}$$

であることがわかる．

次に，後半部分の証明を行う．(137)，(138) 式を用いることで，パラメータの誤差 $\Psi(t)$ は，次式のように記述できる．

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= \Theta(t) - \Theta_0 \\
&= \left[\sigma^{-1}\Theta_* + \int_0^t \Theta_0\tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right] \left[\sigma^{-1}I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} - \Theta_0 \\
&= \sigma^{-1}(\Theta_* - \Theta_0) \left[\sigma^{-1}I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} \\
&= \sigma^{-1}\Psi(0) \left[\sigma^{-1}I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{158}$$

したがって、 $\tilde{\xi}(t)$ が PE 条件を満たせば、 $t \rightarrow \infty$ のときに、

$$\left[\sigma^{-1}I + \int_0^t \tilde{\xi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} \rightarrow 0 \quad (159)$$

となり（詳細は、補題 4.2 の零行列への収束に関する証明 [52] を参照）、よって、 $\Psi(t) \rightarrow 0$ となる。◇

主要研究業績

学術論文誌 (査読有り)

1. 野口慎, 杉本謙二: プレフィルタの状態を利用したフィードバック誤差学習; システム制御情報学会論文誌, vol. 23, no. 5, pp. 105-110 (2010)
2. 野口慎, 杉本謙二: 正実性によらない多入出力フィードバック誤差学習— プレフィルタ統合型学習則の改善 —; システム制御情報学会論文誌, vol. 24, no. 3, pp. 61-72 (2011) (掲載決定)

国際会議

(口頭発表・査読有り・Proceeding 有り)

印は登壇者を表す。

1. Kenji Sugimoto and Makoto Noguchi: Improved Feedback Error Learning with Prefilter State Variables and RLS Criterion; The 2010 IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC), pp. 41-46, Yokohama, Japan, Sept. (2010)
2. Kenji Sugimoto and Makoto Noguchi: Further Results on Feedback Error Learning Control: Partially Known Plant and General Response Model; 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC2010), pp. 66-71, Atlanta, Georgia, USA, Dec. (2010)

国内会議

(口頭発表・査読無し・Proceeding 有り)

印は登壇者を表す。

1. 野口慎, 平田健太郎, 杉本謙二: インプロパーな制御器を用いたフィードバック誤差学習; 第 53 回 システム制御情報学会 研究発表講演会 (SCI'09), pp. 425-426, 神戸市産業振興センター, 5 月 20 ~ 22 日 (2009) (ただし, 神戸での新型インフルエンザ流行のため講演会は中止, 予稿 CD-ROM のみ出版済み)
2. 野口慎, 杉本謙二: フィードバック誤差学習の制御応用 厳密にプロパなプラントでの検証 ; 計測自動制御学会 関西支部平成 21 年度シンポジウム若手研究発表会, pp. 7-10, 常翔学園 大阪センター, 1 月 15 日 (2010)
3. 杉本謙二, 野口慎: プレフィルタの状態変数を利用したフィードバック誤差学習; 計測自動制御学会 第 10 回適応学習制御シンポジウム, pp. 57-60, 琉球大学, 1 月 25 ~ 26 日 (2010)
4. 野口慎, 杉本謙二: 一般の 2 自由度構造によるフィードバック誤差学習; 計測自動制御学会 第 10 回制御部門大会, 175-1-1, 熊本大学工学部 (黒髪南キャンパス), 3 月 16 ~ 18 日 (2010)
5. 野口慎, 杉本謙二: 逆システムの直列結合による仮想フィードバック誤差学習; 計測自動制御学会 第 11 回適応学習制御シンポジウム, pp. 35-38, 東京工業大学 (大岡山キャンパス), 1 月 24 ~ 25 日 (2011)

その他の研究業績

学術論文誌 (査読有り)

1. Kiminao Kogiso, Makoto Noguchi, Kazuyoshi Hatada, Naoki Kida, Naofumi Hirade, and Kenji Sugimoto: Experimental Validation of Switching Strategy for Tracking Control with Collision Avoidance in Non-cooperative Situation Using Toy Model Cars; SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration (SICE JCMSI), vol. 3, no. 4, pp. 229-236 (2010)

国際会議

(ポスター発表・査読有り・Proceeding無し)

印は発表者を表す。

1. Kiminao Kogiso, Makoto Noguchi, Kazuyoshi Hatada, Naoki Kida, and Naofumi Hirade: Experimental Validation of Tracking Control with Collision Avoidance Using RC Model Cars; 2009 SIAM Conference on Control and Its Applications (CT'09), PP0, Denver, USA, 6-8, Jul. (2009)

国内会議

(口頭発表・査読無し・Proceeding有り)

印は登壇者を表す。

1. 松原大和, 野口慎, 佐藤淳, 杉本謙二: フィードバック誤差学習による実験用ヘリコプタモデルの姿勢制御; 計測自動制御学会 関西支部平成 22 年度シンポジウム 若手研究特別発表会, pp. 69-70, 常翔学園 大阪センター, 1月18日 (2011)