

博士論文

重力場での光線追跡に基づくブラックホール時空の
可視化に関する研究

佐藤 哲

2001年 3月 23日

奈良先端科学技術大学院大学
情報科学研究科 情報システム学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に
博士(理学) 授与の要件として提出した博士論文である。

佐藤 哲

審査委員： 横矢 直和 教授
千原 國宏 教授
湊 小太郎 教授
竹村 治雄 助教授

重力場での光線追跡に基づくブラックホール時空の 可視化に関する研究*

佐藤 哲

内容梗概

本論文は、ブラックホールが存在する時空を可視化し、重力場により歪んだ空間の様子を直感的に分かりやすく表現するための新しい画像生成手法を提案する。現実の物理現象をコンピュータグラフィックスによって可視化する場合にはしばしば光線追跡法が使用されるが、ブラックホール時空では光線が直進するとは限らないため、直線の方程式を用いる通常の光線追跡法は適用できない。本論文では、まず従来の光線追跡法を曲進する光線にも対応可能となるよう拡張した重力場光線追跡法について考察する。次に、重力場光線追跡法をブラックホール時空に特化させたシンプレクティック・レイトレーシング (SR) 法を提案する。提案手法は光線を測地線の微分方程式で表される曲線ではなくハミルトニアンに支配される力学系として扱うため、重力場光線追跡法に比べ計算コストや結果の正確さの面で優位である。SR 法はハミルトニアンが存在しない時空には適用不可能であり、重力場光線追跡法と完全に同等の手法ではないが、本研究で可視化対象とするブラックホールに対してはハミルトニアンが存在することを示し、実際に様々な状況の時空を可視化することで提案手法がブラックホールの直感的な理解に役立つことを示す。

キーワード

科学的可視化, ブラックホール, 光線追跡法, シンプレクティック・レイトレーシング, 微分方程式, ハミルトニアン

*奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報システム学専攻 博士論文, NAIST-IS-DT9661014, 2001年3月23日.

Visualization of Blackholes Based on Raytracing in Gravitational Fields*

Tetsu Satoh

Abstract

The purpose of this study is to offer a new way to understand curved spacetime intuitively by visualizing a sight affected by great gravitation around a blackhole. Raytracing is widely used to visualize physical phenomena of real world. However, it is impossible to apply conventional raytracing methods which use equations of straight ray to the present purpose because the light curves in the vicinity of the blackhole. To solve this problem, an extended raytracing method which can deal with curved rays is first described. From the consideration of the method called *gravitational raytracing*, *symplectic raytracing* is then proposed for visualizing blackholes. Symplectic raytracing has the advantages in computational cost and accuracy as a result of describing curved lights by a dynamical system in Hamiltonian instead of geodesic equations. Symplectic raytracing is not equivalent to gravitational raytracing because symplectic raytracing can not be applied to some situations where Hamiltonian functions do not exist. Hamiltonians for typical blackhole spacetimes are concretely described and experimental results show the usefulness of the proposed method for intuitive understanding of blackholes.

*Doctor's Thesis, Department of Information Systems, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, NAIST-IS-DT9661014, March 23, 2001.

Keywords:

Scientific Visualization, Blackhole, Raytracing, Symplectic Raytracing, Differential Equation, Hamiltonian

目次

1. 序論	1
1.1 科学的可視化の研究と意義	1
1.2 相対論的な効果が現れている光景の可視化に関する従来研究	2
1.3 光線追跡法に基づくブラックホール時空の画像生成における課題	4
1.4 本研究の目的と方針	4
1.5 本論文の構成	5
2. 相対性理論を考慮した光線追跡法の拡張—重力場光線追跡法—	7
2.1 序言	7
2.2 光線追跡法によるCG作成	8
2.3 ブラックホールの影響を考慮した重力場光線追跡法	8
2.4 重力場光線追跡法における光線の軌道と波長の計算法	13
2.4.1 光線の軌道を表す方程式の導出	13
2.4.2 光線の波長計算式の導出	14
2.5 重力場光線追跡法の設計と実装	15
2.5.1 光線の軌道計算のための数値解法	15
2.5.2 実装環境と処理の流れ	17
2.6 可視化結果と考察	19
2.7 結言	24
3. 8次元位相空間内での光線追跡—シンプレクティック・レイトレーシング—	25
3.1 序言	25
3.2 重力場光線追跡法の利点と問題点	26
3.3 ブラックホール時空でのハミルトン力学に基づく光線追跡	27
3.3.1 ハミルトンの正準方程式	27
3.3.2 シンプレクティック数値解析	28
3.4 シンプレクティック・レイトレーシングの設計と実装	29
3.4.1 陰的シンプレクティック数値解析	29

3.4.2	実装環境と処理の流れ	31
3.5	可視化結果と考察	31
3.6	結言	40
4.	シンプレクティック・レイトレーシングの高速化	41
4.1	序言	41
4.2	陰的シンプレクティック・レイトレーシングの利点と問題点	41
4.3	陽的なシンプレクティック数値解法の構成	42
4.4	陽的な解法によるシンプレクティック・レイトレーシングの実装と 可視化結果	43
4.5	陰的な解法による結果及び重力場光線追跡法との比較	55
4.6	結言	59
5.	結論	60
	謝辞	62
	参考文献	63
	研究業績	71
	付録	74
A.	ブラックホール時空での光線の運動方程式の導出	74
B.	球対称ブラックホール時空での陽的なシンプレクティック数値解法（1次） の導出	75
C.	2次の陽的な解法の導出	78
D.	4次の陽的な解法の導出	80
E.	初期値問題	81

目 次

1	da Vinci の素描による風の流れの可視化 (文献 [1])	1
2	S. Liebes(1964) による重力レンズの予想図 [2]	9
3	S. Refsdal(1964) による重力レンズの予想図 [3]	9
4	重力レンズ効果の観測映像 (NASA Hubble Space Telescope Public Pictures)	10
5	重力レンズ効果による光線の湾曲の様子	10
6	光線の追跡	12
7	波長の変化の計算例	15
8	刻幅適応変化アルゴリズム	18
9	時空内のオブジェクトの配置図	19
10	観測者の近くに球がある状況で, ブラックホールが存在しない場合	21
11	図 10 と同じオブジェクト配置で, ブラックホールが存在する場合	21
12	観測者から遠く離れた, 背景の壁の近くに球があるオブジェクト配置でブラックホールが存在しない場合	22
13	図 12 と同じオブジェクト配置で, ブラックホールが存在する場合	22
14	ブラックホール時空での光線追跡の例	23
15	海洋温度分布マップ	32
16	シンプレクティック・レイトレーシングの実行例: ブラックホールが存在しない場合	35
17	シンプレクティック・レイトレーシングの実行例: 球対称ブラックホールを配置した場合	35
18	シンプレクティック・レイトレーシングの実行例: 軸対称ブラックホールを配置した場合	36
19	軸対称ブラックホールを正面から観測する場合の概念図	36
20	シンプレクティック・レイトレーシングの実行例: 軸対称ブラックホールを上から観測した場合	37
21	軸対称ブラックホールを上から観測する場合の概念図	37

22	誤差積算値 (1万本の光線についての誤差絶対値の和) の比較. 縦軸, 横軸とも幾何単位系.	38
23	光速が通常の場合の90%の場合の可視化の比較 (いずれも刻み幅は0.005). 左が測地線の微分方程式と Runge-Kutta 法を用いた場合, 右がハミルトンの正準方程式とシンプレクティック数値解析を用いた場合.	39
24	光速が通常の場合の70%の場合の可視化結果の比較 (いずれも刻み幅は0.005). 左が測地線の微分方程式と Runge-Kutta 法を用いた場合, 右がハミルトンの正準方程式とシンプレクティック数値解析を用いた場合.	39
25	設定する世界モデル	44
26	陽的シンプレクティック・レイトレーシングの実行例: ブラックホールが存在しない時空	48
27	陽的シンプレクティック・レイトレーシングの実行例: 球対称ブラックホールが存在する時空	48
28	カラーリングした天球	49
29	4色に塗り分けられた天球を用いた例: ブラックホールが存在しない時空	49
30	4色に塗り分けられた天球を用いた例: 球対称ブラックホールが存在する時空	49
31	半透明の平面を配置した例: ブラックホールが存在しない時空	50
32	半透明の平面を配置した例: 球対称ブラックホールが存在する時空	50
33	時空の曲率をボリュームレンダリングにより表現した例: ブラックホールが存在しない時空	51
34	時空の曲率をボリュームレンダリングにより表現した例: 球対称ブラックホールが存在する時空 ($r_g = 0.001$)	51
35	時空の曲率をボリュームレンダリングにより表現した例: 球対称ブラックホールが存在する時空 ($r_g = 0.003$)	52
36	時空の曲率をボリュームレンダリングにより表現した例: 球対称ブラックホールが存在する時空 ($r_g = 0.008$)	52

37	入れ子宇宙現象の可視化例	53
38	観測者がブラックホールを通過する時の観測画像	54
39	光線の軌道計算の比較例	56
40	100 × 100 画素の画像作成例	57
41	ハミルトニアン値の表示例	58
42	通常の変位系と幾何変位系	85

表 目 次

1	スペクトル軌跡の色度座標 (RGB 表色系)	16
2	レンダリング時間の比較	57

1. 序論

1.1 科学的可視化の研究と意義

可視化に関する研究の歴史は古く、風や水の流れの可視化は500年の歴史を持ち、Leonardo da Vinciの時代にまでさかのぼると言われている [1]。図1は、素描により風の流れを表現したda Vinciによるスケッチである（文献 [1] による）。今日、狭義の可視化である科学的可視化（Scientific Visualization）という言葉は、

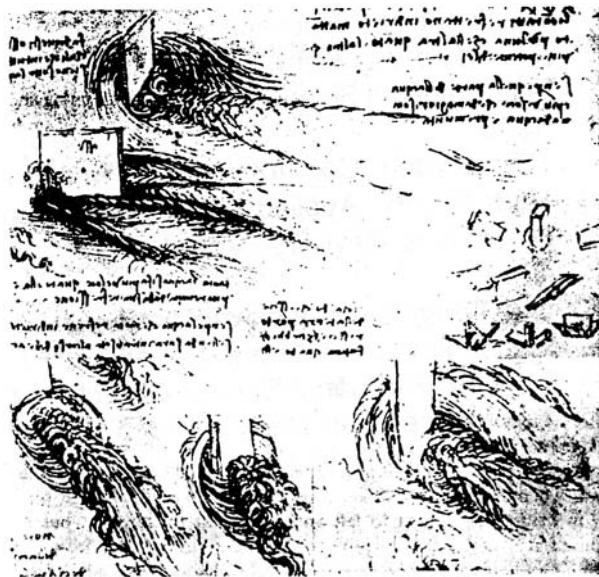


図1 da Vinciの素描による風の流れの可視化（文献 [1]）

ViSCレポートと呼ばれるアメリカ科学財団 (NSF: National Science Foundation) の論文 [4] から使われ始めたと言われ、複雑あるいは大量な情報の、非専門家への分かりやすい提示あるいは専門家への説得力のある提示を目的とする。複雑な情報の提示という点では、球面を切ることなく裏返すことが数学的に可能であることを実際にコンピュータ・グラフィックス（以下CG）画像で提示した Turning a Sphere Inside Out [5] や、双曲空間での歩行を体験する Not Knot [6]、結び目理論の可視化 [7]、本来は不可視なベクトル場やテンソル場の可視化 [8][9][10]、力学系の可視化 [11] などの研究が有名である。大量の情報の提示という点では、医療

機器からの大量の測定データを元に人体内外部を再構成する Marching Through the Visible Man[12] , 莫大な宇宙観測データから宇宙を再構成して宇宙の大規模構造を発見した研究 [13] などがあげられる。これらの研究を見ると、科学的可視化が単に直感的に分かりやすく表現形態を変えたものに留まらず、新たな発見をももたらす可能性があることが分かる。

近年、特に 1991 年に米国議会にて HPC 法 (High Performance Computing Act) によりハイパフォーマンスコンピューティングが定義されて以来、観測データすら計算機内で数値シミュレーションによって作り出し、可視化する狭義の科学的可視化の研究が進められている。その中には、ブラックホールの衝突や回転によって発生する時空の歪みや重力波の数値シミュレーション結果の可視化 [14]、分子動力学や密度汎関数法による原子や分子の振る舞いや性質の可視化 [15] など、計算機性能の向上無しでは考えられなかったような研究がある。これらの研究は、

1. 対象のモデル化と基礎方程式
2. 基礎方程式に対する数値解法
3. 数値計算の際の並列分散処理技法
4. 数値計算結果の提示手法

という数理科学の 4 分野から成っており、計算機を通して 4 過程を経ることにより数値データが人間と結び付けられるという重要な研究分野であると言える。

1.2 相対論的な効果が現れている光景の可視化に関する従来研究

CG を用いた可視化技術について研究する際は、光線の運動について考察することが必要となる。1900 年代始めにアインシュタインにより相対性理論 [16] が発表されて以来、相対論的な効果が大きく現れる高速運動状態や強力な重力の中では、日常的な光景ではなくどのような光景が観測されるのだろうかという疑問に対する考察が数多く行われてきた。ビッグバン宇宙論の提唱者で有名な G. Gamov は、啓蒙書「不思議の国のトムキンス」 [17] の中で、「光が非常に遅かったとしたら、地

球上ではどのような光景が観測されるか」という考察をしている。しかし、のちに Gamov の想像には多くの誤りが含まれていることが、R. Penrose や J. Terrell, M. L. Boas といった物理学者によって理論的に示された [18]。この例からも示されるように相対論的な光の運動というものは複雑で、人間の目に入る観測画像を作成するような非常に大量の光の運動を計算するためには、計算機性能の発展を待つしか無かった。

1970 年代に、CG 作成技法の一つとして光線追跡法が提案された [19][20]。この手法は観測者の視点に入る光線を全て調べあげるために、写実的な CG が作成可能である一方で計算に時間がかかる問題点があった。しかし光線同士が干渉しないと仮定すれば各光線の軌道は独立に計算可能であることから、並列処理や分散処理により、高速に CG を作成する技法も提案されてきた [21][22][23] [24][25]。

ベクトル型や並列型の大型計算機が普及し始めた 1990 年前後に、特殊相対論を考慮して光線追跡法を用いた結果の CG が P.-K. Hsiung ら [26][27][28] や Gekelman ら [29] によって発表された。(のちに Chang ら [30] によって再び発表されている。) 同じ頃、特殊相対論だけではなく一般相対論をも考慮しなければならない、ブラックホール時空での観測画像の CG が山下によって発表された [31]。また、観測画像ではなく、光線の一本一本の軌跡を仮想空間に描画し仮想環境内で光線を立体視するシステムが S. Bryson によって発表された [32]。

この中の山下の手法は、色々なブラックホールに対応可能なように改良され [33][34][35]、科学雑誌やテレビ番組でも紹介された。また、同時期に全く同じ手法による CG 画像が、International Numerical Relativity Group のメンバーによって発表された [36]。これらは、相対性理論が古典的ニュートン力学の素直な拡張になっているのと同様、光線追跡法の素直な拡張になっている。つまり、光線の軌道を計算する方程式を、ニュートン力学の直線の方程式から相対性理論の測地線の微分方程式に置き換えている。

1.3 光線追跡法に基づくブラックホール時空の画像生成における課題

既に述べたように、光線追跡法に基づいてブラックホールが存在する時空をCG化するためには、一般相対論を用いなければならない。一般相対論では、光線の軌道は直線になるとは限らず、測地線の微分方程式と呼ばれる連立常微分方程式を解いて軌道を計算する必要がある。ブラックホール時空での測地線の微分方程式は、非線型の連立常微分方程式であるために、一般に解析解が存在しない。そこで光線追跡法の考え方をを用いてブラックホール時空での光線の動きを計算し、CGを作成するためには、測地線の微分方程式を速く、正確に数値的に解かなければならない。そもそも光線追跡法は計算時間が長くなることが問題点であったから、正確に数値計算をするために長時間の精密な計算をするわけにはいかない。反対に粗く計算すれば短時間で計算が終わるが、現実世界の物理現象が研究対象なので誤差が非常に大きい結果を出しても無意味である。

また、結果の正しさをどのように評価するかも問題となる。測地線の微分方程式には一般的な解析解が存在しないので数値計算結果と理論値を比較することができず、CGと比較できるほど鮮明にブラックホールを撮影した画像も存在しない以上、生成されたCGが妥当なのか判断することは難しい。

さらに、ブラックホールそのものが安易に想像できるものではなく複雑なものなのであるため、結果の提示方法によって人間の理解度が変わってくる。従ってCG作成の際には、背景や配置物体をどのように効果的に選択するかを考慮する必要がある。

以上、(1)光の軌道計算の高速化、(2)正確な軌道計算、(3)結果の提示手法、の3点が、ブラックホール時空の可視化の一般的な問題点である。

1.4 本研究の目的と方針

本研究の目的は、理論的に予言されているブラックホールが実際に宇宙空間に存在した場合、時空がどのように歪みどのように観測されるかを可視化して直感的に理解できるようにすることである。ブラックホール時空での光線の運動につ

いては物理学の分野で既に研究されているので、それらの研究が参考可能となることから、光線の運動を計算することでCG画像を作成する光線追跡法の考え方を基本にする。物理学の分野では光線の方程式は導かれているが、微分方程式であり一般的な解析解を求めることが難しく、通常は重力が弱いと仮定した近似解が用いられる。しかし、惑星や恒星と違ってブラックホールははるかに重力が強いため近似解を用いることはできず、効率的な数値解法を構築することが第一の課題である。

数値解法によって光線の運動計算は可能であるが、地球上とは異なり光線は直進するとは限らず、相対論的效果による時間の流れ方の変化により運動中の波長の伸び縮みすら有り得る。このため、従来研究されてきた光線追跡法のための効率化手法、高速化手法、改良手法といったものをそのまま使用することはできない。そこで、ブラックホール時空を対象とした空間のモデル化、オブジェクト配置、光線とオブジェクトの交差判定、波長の計算といった数値計算結果の提示手法を確立することが第二の課題となる。

計算時間の目標は、一つのCG画像を作成するために必要な時間を15分前後とする。この値の根拠は、経験的にこの時間を超える光線追跡法のCG画像生成手法は数十時間といった長期間の計算が必要となり、計算機資源的な実用性が乏しくなると共に数値計算誤差の蓄積が問題となってくるからである。もちろん使用計算機や環境によって計算時間は異なってくるが、筆者の通常の研究環境、すなわち数台のスーパーコンピュータあるいはワークステーションがイーサネットで結ばれていて同時に使用可能な環境を想定する。作成される画像は、重力レンズ効果や赤方偏位現象といったブラックホールについての一般的な文献では必ず説明されている有名な物理現象を、ユーザが目視で確認可能なものとする。

1.5 本論文の構成

本論文の構成は次の通りである。まず2章では、従来の光線追跡法を拡張し、測地線の微分方程式を用いて歪んだ時空での光線追跡を可能とする重力場光線追跡法について述べる。光線と配置物体との交差判定や歪んだ時空での波長の計算法などがここで定義される。続いて3章では、歪んだ時空での光線追跡が可能な

重力場光線追跡法を，可視化対象をブラックホール時空に絞ることで計算精度を向上させるシンプレクティック・レイトレーシングについて述べる．4章では，3章で述べた手法が2章で述べた手法に比べ，計算精度は向上していても必ずしも計算速度が向上するとは限らない点を改良する陽的シンプレクティック・レイトレーシングについて述べる．最後に5章では，本論文全体を総括する．

2. 相対性理論を考慮した光線追跡法の拡張—重力場光線追跡法—

2.1 序言

写実的な CG 画像の生成手法の一つとして、光線追跡法 [19][20] が広く研究されている。通常はニュートン力学により光線は直進すると仮定されるが、光線が運動する媒質の屈折率が連続的に変化するような場合では光線は屈折を繰り返して曲進するように運動する。光線が曲進する場合、光線追跡法を拡張することで屈折率が変化する媒質での光線を追跡が可能で、蜃気楼などの現象が可視化されている [37] [38]。文献 [38] ではフェルマーの最短時間の原理により光線の軌道を表す微分方程式を導いているが、この原理を 3 次元空間から 4 次元空間へ、さらに空間の概念を拡張した多様体上へと拡張すると、相対論において光線の軌道を表す測地線の微分方程式となる。測地線の微分方程式を用いて光線の軌道を計算し、光線追跡法に基づき CG 画像を生成する手法を、本論文では重力場光線追跡法と呼ぶことにする。

重力場光線追跡法によりブラックホール時空の可視化が可能であることは古くから知られていたが、計算時間がかかるために実際に写実的なブラックホール時空の CG が作り始められたのは比較的近年である。まず始めに球対称及び軸対称のブラックホール時空での測地線の微分方程式を使った光線追跡法が発表され [31]、次いで波長の変化も考慮した研究が発表された [36]。その後、ブラックホール周囲で運動する物体を考慮した研究 [39] や複数のブラックホールが存在する時空の可視化 [35] へと拡張された。これらの研究は、ブラックホールの周囲にオブジェクトを配置し、オブジェクトの歪み具合を可視化することによってブラックホールを表現するという点では同じであり、違いは数値計算の工夫である。

本章では、2.2 節において光線追跡法の考え方について説明し、2.3 節で光線追跡法をブラックホール時空に適用する場合の方法と問題点について述べる。その後 2.4 節では 2.3 節の問題点を解決する具体的な手法について述べ、2.5 節において設計と実装について述べる。そして 2.6 節で実装から得られた CG 画像を紹介する。

2.2 光線追跡法による CG 作成

光線追跡法は、光源や視点などから発された光線の軌道を追跡することでスクリーンの輝度計算をするというレンダリング手法である [20]。現実には無限本数存在する光線のうちの有限本数だけ追跡するため、描画の際にエイリアシングが生じることがある。アンチエイリアシング手法としては、円錐追跡法 [40]、光線束追跡法 [41] など多くの手法が提案されているが、計算時間が増大するという問題点があった。光線が直進しない水中や蜃気楼現象のような状況で光線を追跡するために後退光線束追跡法 [42] や光線の軌跡を屈折率を考慮した微分方程式により計算する手法 [38] が提案されたが、さらに計算時間が増加することは避けられなかった。そこで近年では、前処理として光線追跡法を適用して光線の移動データを蓄積しておき、その後は蓄積データを元に高速にレンダリングする手法が研究されている [43][44]。空間を分割し、無駄な計算を減らす工夫についても多くの研究がある [45]。市販の 3D グラフィックス作成ツール、例えば *LightWave*¹ などでは、描画の速いポリゴンモデルでモデリングをしたあとに光線追跡法でレンダリングを行うという使い方をしている。

光線追跡法は、光が物体の表面に当たることによる鏡面反射、拡散反射、光沢反射を計算して、さらに面の透過光成分も加えた非常に一般化されたレンダリング方程式のシミュレーション方法と見ることができる [46]。汎用性が高く、写実的な CG 作成や現実の物理現象の可視化には非常に適していると言える。

2.3 ブラックホールの影響を考慮した重力場光線追跡法

通常、光線追跡法に用いられる方程式は、ニュートン力学に基づくものである。しかしブラックホールはニュートン力学を拡張した一般相対性理論（以下、相対論） [47][48][49] [50][51] により記述されるので、方程式も相対論に基づくものでなければならない。相対論によると、重力レンズ効果として歪んだ映像が観測されることが古くから予想されている [2][3]。図 2、図 3 は 1965 年に異なる論文誌に発表された、重力レンズ効果によって星が歪んで見える場合の予想図である。

¹<http://www.newtek.com/lightwave/index.lw.html>

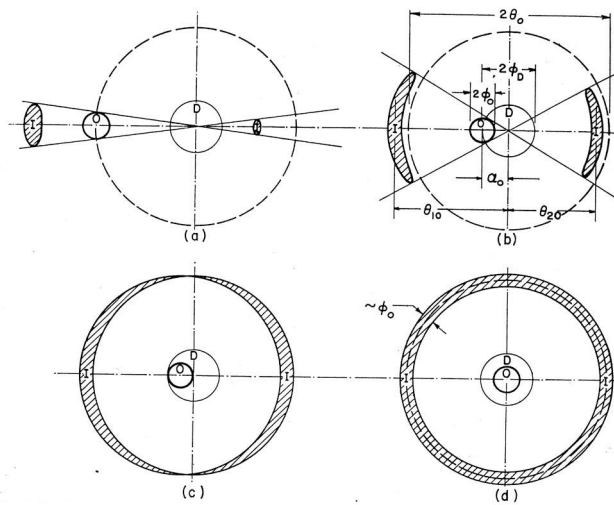


図 2 S. Liebes(1964) による重力レンズの予想図 [2]

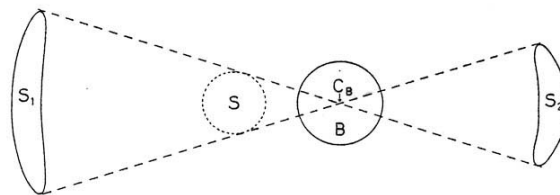


図 3 S. Refsdal(1964) による重力レンズの予想図 [3]

重力レンズ効果は、図 4 のように近年になって実際に観測映像も得られている²。図 4 右のように星や銀河が円弧上になって観測されるのは、図 5 中の点線のように曲進する光線が、図 5 中の実線のように直進しているように感じられるからとされる。なお、図 5 は NASA の Hubble Space Telescope Public Pictures 中の A Grazing Encounter Between Two Spiral Galaxies³ を元に作成したイメージ図である。相対論に基づく重力場光線追跡法の、ニュートン力学に基づく光線追跡法との主な違いは次の通りである。

²<http://oposite.stsci.edu/pubinfo/pr/1998/37/index.html>

³<http://oposite.stsci.edu/pubinfo/pr/1999/41/index.html>

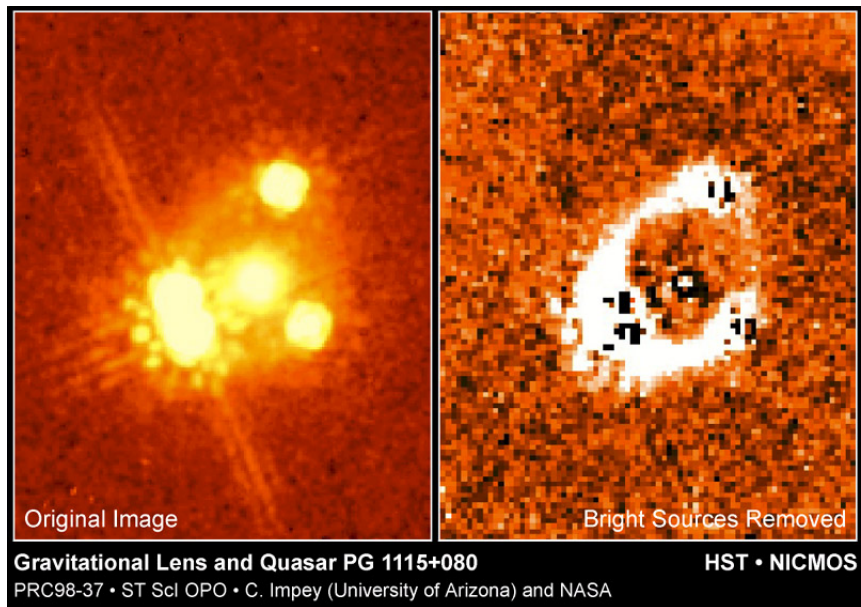


図 4 重力レンズ効果の観測映像 (NASA Hubble Space Telescope Public Pictures)

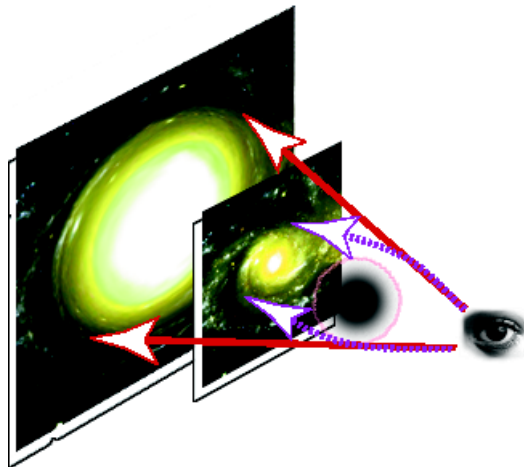


図 5 重力レンズ効果による光線の湾曲の様子

- 光線の軌道を表す方程式は、測地線の微分方程式である
- 光線追跡は、3次元空間に時間軸を含めた4次元空間内で行われる
- 重力の強さによって波長が変化する

さらに、本研究では計算の簡略化のために次のような仮定をおく。この仮定は、光線を追跡する際の媒介が真空中で広大な宇宙空間であることを考えると、妥当である。

- 時空全体に影響を及ぼす特別な光源は存在せず、配置したオブジェクト自身が発光するものとする
- 媒介の密度は一様で屈折率は変化しない
- 光線は線スペクトルであり、国際照明委員会 (CIE) の定めた RGB 表色系により波長と RGB 値が一対一対応する
- 特に単位を記述していない場合、重力定数 G 及び光速 c を 1 とおく幾何学単位系 [52] を用いるものとする
- 光線同士は干渉しない

なお、幾何学単位系の導入は必ずしも必要なわけではないが、時間を含めた4次元時空の全ての座標成分の単位が長さの次元になり扱いやすいため、相対論に関する研究では一般的に用いられているものである (付録 E 参照)。

ブラックホール時空では光線は直進するとは限らないため、光線追跡時には、図6のように光線の先端を少しずつ伸ばし、局所的に線分で近似した光線が配置物体と交差するかどうか調べる。光線の先端を伸ばす、つまりある時点での光線の先端から、次の先端の位置は、2.4節にて詳しく述べるように測地線の微分方程式を数値的に解くことで求める。以後、本論文において光線の追跡期間とは、この光線の先端を伸ばす回数のことを指す。

光線は視点から発射され、

1. 一定期間を過ぎるかブラックホールに吸い込まれた場合、画素は黒

2. 配置オブジェクトと交差した場合は、画素はオブジェクト表面の交差点の色としてスクリーンに描画される。どちらにも該当しない場合は光線の追跡を継続する。ただし配置オブジェクトの色を描画する場合は、2.4節にて述べるようにブラックホールの影響による波長の変化を計算した後となる。

一般に重力場光線追跡法を用いる際、測地線の微分方程式に対する数値解法が重要となる。測地線の微分方程式は2階の連立常微分方程式であり適用可能な数値解法は非常に多くのものであるが、本章ではブラックホール時空での光線追跡に適していると考えられる Runge-Kutta-Fehlberg 法 [53] を紹介する。Runge-Kutta-Fehlberg 法を用いれば、ブラックホール時空で光線を追跡している間に、その地点での時空の歪みの大きさによって自動的に数値計算の精度を変化させることができる。つまり、ブラックホール近傍の時空の歪みが大きいところでは精密に計算し、ブラックホールから離れた時空の歪みが小さいところでは精度を落とし高速に計算することが可能である。誤差を予測する手法なので、精度を落とすとしても局所的な誤差は実用的な範囲内に留めることができる。

本節の最後に、本研究の説明に必要ないくつかの数学用語あるいは記法を定義する。まず、微分幾何学にて普通に用いられるように [54][55]、 n 次元空間内の点の座標を $(x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$ で表し、省略して x^i と書くと、 i は 0 から $n-1$ までの全てを指すものとする。また、通常、速度や加速度を表現するには時間 t による微分を用いるが、相対論では時間も座標成分に含まれるため、記号を t でなく s

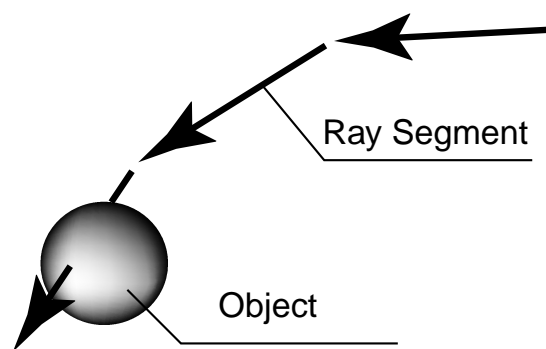


図 6 光線の追跡

を用いる。つまり、ニュートン力学の式で s で微分されていれば時間微分を指し、相対論の式で s で微分されていればアフィン・パラメータによる微分であると判断する。添字にはアインシュタインの和の規約を採用し、一つの項の中に同じ文字の上付き添字と下付き添字がある場合は、その文字について 0 から $n-1$ までの和を取る。

2.4 重力場光線追跡法における光線の軌道と波長の計算法

2.4.1 光線の軌道を表す方程式の導出

ニュートン力学では、媒質の屈折率が一定なら光線の軌跡は次の直線の方程式に従う。

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0 \quad (1)$$

これが一般相対論では、測地線の微分方程式

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \underbrace{\Gamma_{kl}^i}_{(*)} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \quad (2)$$

に拡張される。式 (1) と式 (2) を比べると、確かに (*) の部分が直線の方程式からの拡張になっていることが分かる。 Γ_{kl}^i はクリストッフエル記号と呼ばれ、座標系を与えることで具体的に計算できる。ここでは球対称のブラックホールが存在する時空を対象にすることにし、座標系として 4 次元極座標系 (t, r, θ, ϕ) を与える。ただし球対称時空の場合、対称性により光線の軌道は原点を含む平面上に限られるため、 $\theta = \pi/2$ とおいても一般性は失われない。よって (t, r, ϕ) 成分のみを扱えば良い。この場合、付録 A で示すように、光線の軌道を表す方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} - \frac{c_1}{1 - r_g/r} = 0 \\ \frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{c_2^2}{r^3} + \frac{3 r_g c_2^2}{2 r^4} = 0 \\ \frac{d\phi}{ds} - \frac{c_2}{r^2} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 c_1, c_2 は光線の発射角度によって決まる定数である。 r_g は質量の次元を持つブラックホールのパラメータで、本論文ではブラックホール半径と呼ぶ。式(3)は、 $r_g = 0$ とおくと通常の2次元平面での極座標系での直線の方程式に等しくなる。ただし、本研究で採用する Runge-Kutta 型の微分方程式の数値解法は1階の微分方程式が対象となるため、 $p = dr/ds$ という中間変数を用意して、次のように式(3)の階数を下げて使用する。

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} - \frac{c_1}{1 - r_g/r} = 0 \\ \frac{dp}{ds} - \frac{c_2^2}{r^3} + \frac{3r_g c_2^2}{2r^4} = 0 \\ \frac{dr}{ds} = p \\ \frac{d\phi}{ds} - \frac{c_2}{r^2} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

2.4.2 光線の波長計算式の導出

相対論によると光の速度は定数であるが、相対論においては時間の流れ方が変化する可能性があるために光の周波数や波長が変わることがある。つまり周波数や波長は4次元空間の時間成分の変化に依存し、計量テンソルと呼ばれる量の時間成分により計算することができる。球対称時空の場合は次のようになる。4次元極座標系の r 成分を用いて、光源の座標を r_s 、観測者の座標を r_o とすると、発せられた光線の波長 λ_s と観測される光線の波長 λ_o の関係式は次のようになる。

$$\lambda_o = \lambda_s \sqrt{\frac{1 - r_g/r_o}{1 - r_g/r_s}} \quad (5)$$

式(5)により、光源が観測者より原点のブラックホールに近い場合は波長が伸びることが分かる。例えば、ブラックホール半径 r_g を1とした時に、観測者が $r_o = 2.0$ の位置に固定されているとする。そして観測者と同じ位置で常に600nmの波長の光を発している光源が移動したとすると、図7のように波長が変化するように観測される。図7より、光源がブラックホールに近づくと急激に波長が伸びることが分かる。

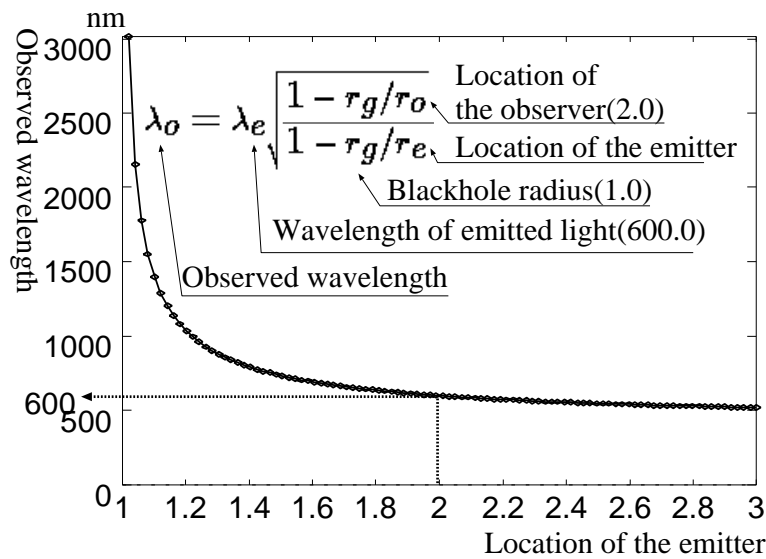


図 7 波長の変化の計算例

既に述べたように波長と RGB 表色系は一対一対応するという仮定があり，対応表は文献 [56] に基づく表 1 を用いる。

2.5 重力場光線追跡法の設計と実装

2.5.1 光線の軌道計算のための数値解法

本研究では，重力場光線追跡法の光線を追跡する際の数値計算法として，Runge-Kutta-Fehlberg 法を用いる。この手法は，打ち切り誤差の違う 2 種類の解を計算し，その差を推定誤差として誤差が大きければ刻み幅を小さくし，誤差が小さければ刻み幅を大きく調整する手法である。ここで打ち切り誤差とは，微分方程式の近似解と真の解をテイラー展開したものととの差のことであり，刻み幅とは連続的に変化するパラメータ x を離散化した時の差 $\Delta x = x_{n+1} - x_n$ のことである。本章ではパラメータ x はアフィンパラメータと呼ばれる量であり，計算される量 y は 4 次元極座標系の各成分である。常微分方程式の一般形を $dy/dx = f(x, y)$ と

表 1 スペクトル軌跡の色度座標 (RGB 表色系)

波長 (nm)	R	G	B	波長 (nm)	R	G	B
380.0	0.0272	-0.0115	0.9843	540.0	-0.1707	1.1628	0.0079
385.0	0.0268	-0.0114	0.9846	545.0	-0.0293	1.0282	0.0011
390.0	0.0263	-0.0114	0.9851	550.0	0.0974	0.9051	-0.0025
395.0	0.0256	-0.0113	0.9857	555.0	0.2121	0.7919	-0.0025
400.0	0.0247	-0.0112	0.9865	560.0	0.3164	0.6881	-0.0045
405.0	0.0237	-0.0111	0.9874	565.0	0.4112	0.5932	0.0044
410.0	0.0225	-0.0109	0.9884	570.0	0.4973	0.5067	-0.0040
415.0	0.0207	-0.0104	0.9897	575.0	0.5751	0.4283	-0.0034
420.0	0.0181	-0.0094	0.9913	580.0	0.6449	0.3579	-0.0028
425.0	0.0142	-0.0076	0.9934	585.0	0.7071	0.2952	-0.0022
430.0	0.0088	-0.0048	0.9960	590.0	0.7617	0.2402	-0.0019
435.0	0.0012	-0.0007	0.9995	595.0	0.8087	0.1928	-0.0015
440.0	-0.0084	0.0048	1.0036	600.0	0.8475	0.1537	-0.0012
445.0	-0.0213	0.0120	1.0093	605.0	0.8800	0.1209	-0.0009
450.0	-0.0390	0.0218	1.0172	610.0	0.9059	0.0949	-0.0008
455.0	-0.0618	0.0345	1.0273	615.0	0.9265	0.0741	-0.0006
460.0	-0.0909	0.0517	1.0392	620.0	0.9425	0.0580	-0.0005
465.0	-0.1281	0.0763	1.0519	625.0	0.9550	0.0454	-0.0004
470.0	-0.1821	0.1175	1.0646	630.0	0.9649	0.0354	-0.0003
475.0	-0.2584	0.1840	1.0744	635.0	0.9730	0.0272	-0.0002
480.0	-0.3667	0.2906	1.0761	640.0	0.9797	0.0205	-0.0002
485.0	-0.5200	0.4568	1.0632	645.0	0.9850	0.0152	-0.0002
490.0	-0.7150	0.6996	1.0154	650.0	0.9888	0.0113	-0.0001
495.0	-0.9459	1.0247	0.9212	655.0	0.9918	0.0083	-0.0001
500.0	-1.1685	1.3905	0.7780	660.0	0.9940	0.0061	-0.0001
505.0	-1.3182	1.7195	0.5987	665.0	0.9954	0.0047	-0.0001
510.0	-1.3371	1.9318	0.4053	670.0	0.9966	0.0035	-0.0001
515.0	-1.2076	1.9699	0.2377	675.0	0.9975	0.0025	0.0000
520.0	-0.9830	1.8534	0.1296	680.0	0.9984	0.0016	0.0000
525.0	-0.7386	1.6662	0.0724	685.0	0.9991	0.0009	0.0000
530.0	-0.5195	1.4761	0.0398	690.0	0.9996	0.0004	0.0000
535.0	-0.3304	1.3105	0.0199	695.0	0.9999	0.0001	0.0000
				700.0	1.0000	0.0000	0.0000

すると、数値計算の刻み幅を Δx として次のような計算を行う。

$$\begin{aligned}
k_1 &= \Delta x f(x, y) \\
k_2 &= \Delta x f\left(x + \frac{1}{4}\Delta x, y + \frac{1}{4}k_1\right) \\
k_3 &= \Delta x f\left(x + \frac{3}{8}\Delta x, y + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\
k_4 &= \Delta x f\left(x + \frac{12}{13}\Delta x, y + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\
k_5 &= \Delta x f\left(x + \Delta x, y + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\
k_6 &= \Delta x f\left(x + \frac{1}{2}\Delta x, y - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55} \\
\hat{y}_{n+1} &= y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5
\end{aligned}$$

$$Err = |y_{n+1}(\text{誤差}\Delta x^5) - \hat{y}_{n+1}(\text{誤差}\Delta x^4)|$$

そして誤差許容範囲 T を適当に定め、誤差推定係数 s を次式で定義する。

$$s = 0.8 \sqrt[4]{\frac{\Delta x T}{Err}}$$

これは文献 [57] の刻幅決定式より今回の実験に適するよう係数を調節したものである。この誤差推定係数 s を使い、図 8 に示すアルゴリズムで $y_{n+1}(x_n, y_n)$ を計算する。

2.5.2 実装環境と処理の流れ

実装は sgi 社の Onyx2(CPU R10000×16) 上で行った。プログラムは同社の PowerC を使用した。これは通常の ANSI C 言語に独自の並列化命令を加えた言語である。時空に配置される各オブジェクトは図 9 に示すように、座標系の原点にブラックホールを置き、ブラックホールから十分離れた地点に観測者を、ブラックホールを挟んで観測者の反対側に格子模様をマッピングした壁を配置する。そし

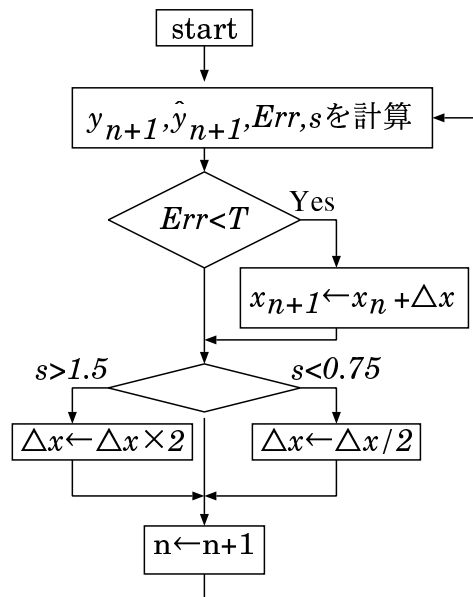


図 8 刻幅適応変化アルゴリズム

てブラックホールの周囲にはブラックホールに比べて質量が無視できるほど小さく、大きさはブラックホール半径の3倍の半径を持つ球状のオブジェクトを配置する。球オブジェクトはブラックホールよりも大きい質量は非常に小さいという仮定は、ブラックホールは非常に高密度なため球オブジェクトが銀河や星のようなものだとすると不自然な仮定ではない。球状オブジェクトの表面には、視点から見て縦が白、横が緑の格子模様がマッピングされている。生成画像の大きさは500×500画素とし、一本の光線を一つのCPUが追跡計算するように並列計算をする。

光線追跡は、観測者の前方に生成画像と同じ大きさのスクリーンを配置し、視点から光線を発射して次のいずれかの条件が満たされるまで追跡する。

1. 球オブジェクトにぶつかった場合、球オブジェクトの表面にマッピングされている格子模様の色情報を取得し、赤方偏位の効果を計算してスクリーンにプロットする。
2. ブラックホールに吸い込まれた、または無限ループにおちいったとき、スクリーンに黒をプロットする。

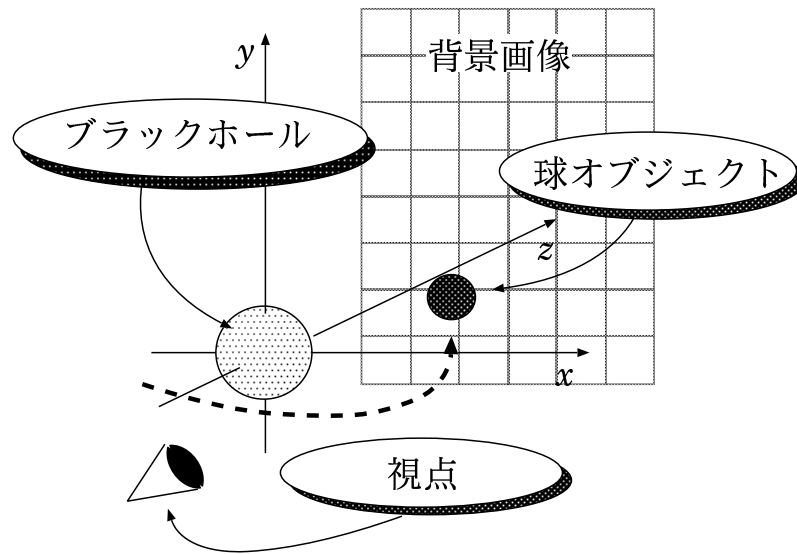


図 9 時空内のオブジェクトの配置図

3. 背景の壁にぶつかったとき、格子模様の色情報を取得してスクリーンにプロットする。
4. 充分遠方に飛んでいったとき、スクリーンに黒をプロットする。

2.6 可視化結果と考察

まず図 10 のように、観測者の近くに球がある状況を設定する。そしてこのオブジェクト配置で、球オブジェクトと背景の壁との間にブラックホールを配置すると、図 11 のような画像が得られる。ブラックホールによる時空の歪みが発生し、背景の格子模様が歪んで描画されている。また、球オブジェクト表面の白い縦線が青みを帯びている。これはエネルギーの弱い赤成分のスペクトルが赤方偏位現象によって不可視成分へ変化してしまったことが原因である。次に、図 12 のように、観測者から離れていて背景の壁の近くに球が配置されている状況を設定する。そして球と観測者の間にブラックホールを配置すると、図 13 のような画像が得られる。これは図 4 に例をあげたような実際の重力レンズ効果の観測画像

をシミュレートしているとみなせる。さらに球オブジェクト表面の色全体が赤みを帯びており、典型的な赤方偏位現象が起こっている。

また、2.5.1 節において説明した数値計算の刻み幅の自動調整機能が有効に働いていることは、図 14 で確認できる。ブラックホールの存在する原点近くでは細かく計算し、原点から離れた地点では大きな刻み幅で計算して計算速度向上を図っている。

画像の生成時間は 7 分から 15 分で、実用的な時間と言える。しかし画像をより魅力的にするために配置物体を増やすと、交差判定の回数が増えるために計算時間は増大する。また、得られた画像が本当に正しいのかどうか判定することは難しい。本節で紹介した画像から分かることは、観測結果と似ているという主観的な評価のみである。

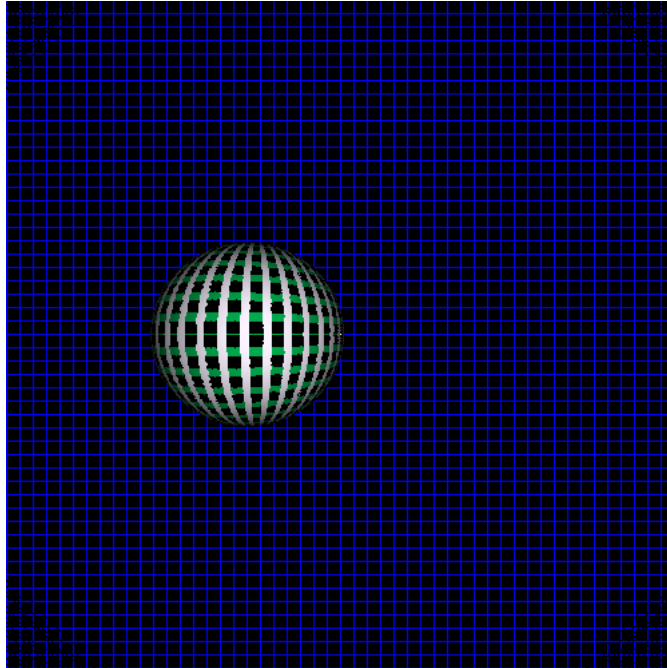


図 10 観測者の近くに球がある状況で、ブラックホールが存在しない場合

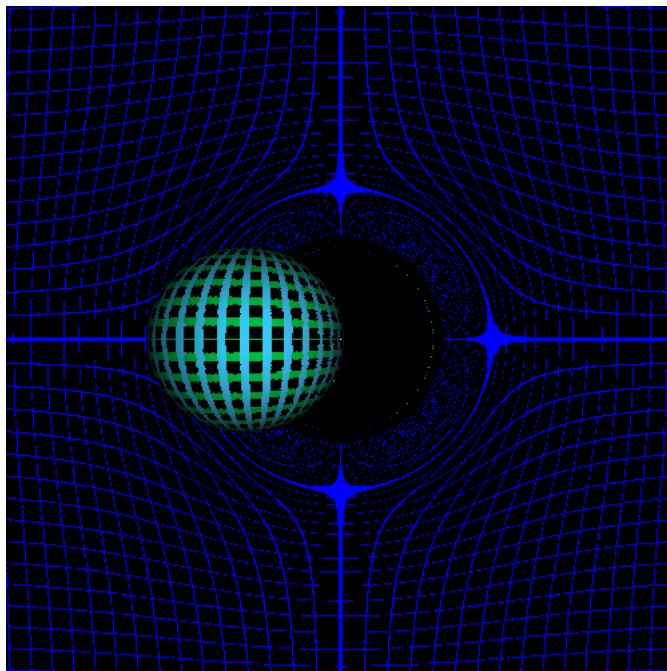


図 11 図 10 と同じオブジェクト配置で、ブラックホールが存在する場合

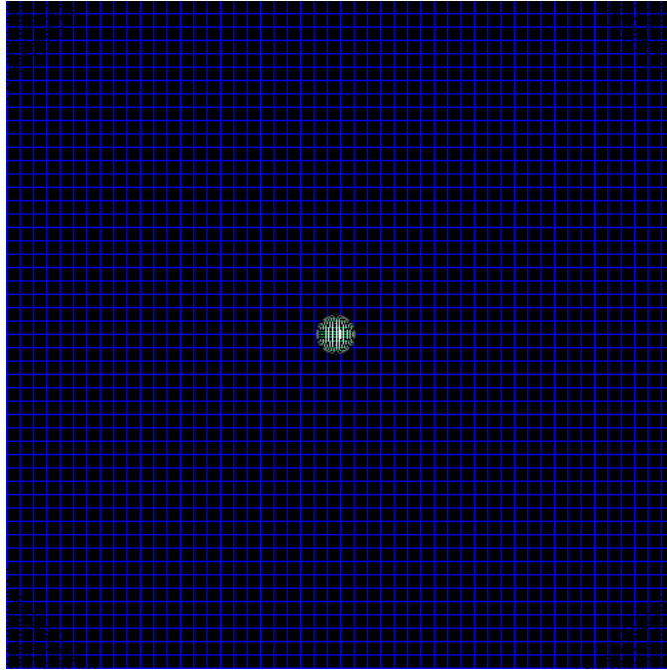


図 12 観測者から遠く離れた，背景の壁の近くに球があるオブジェクト配置でブラックホールが存在しない場合

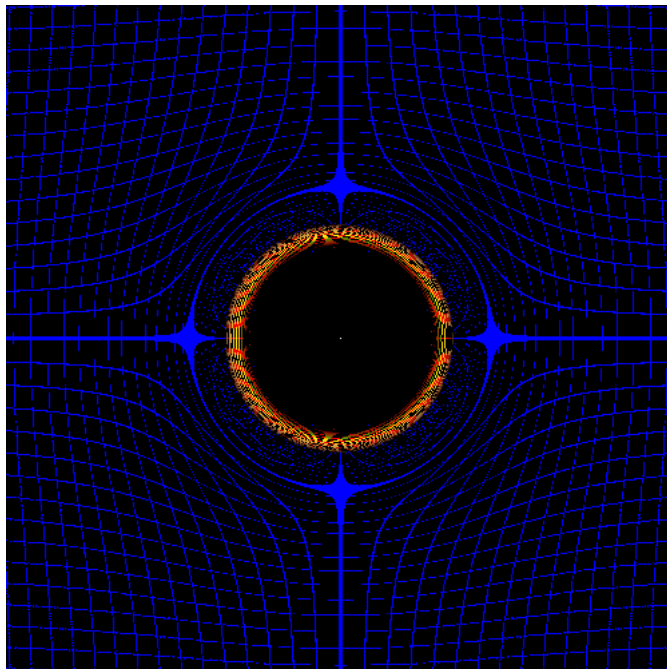


図 13 図 12 と同じオブジェクト配置で，ブラックホールが存在する場合

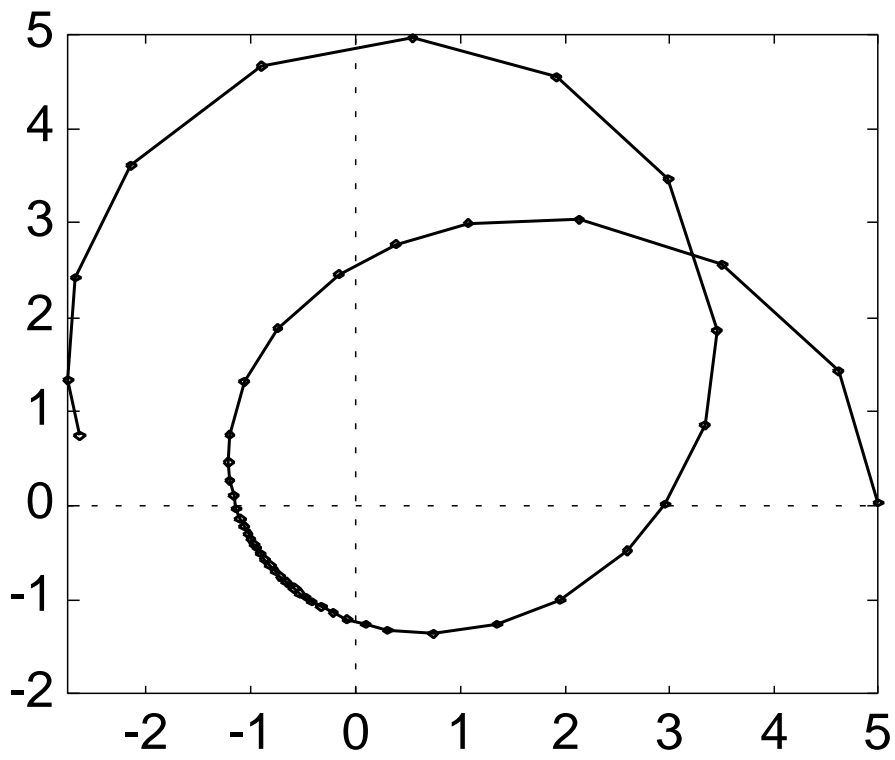


図 14 ブラックホール時空での光線追跡の例

2.7 結言

本章では、既に発表されている重力場光線追跡法の詳細について述べ、実装結果より特徴と問題点について検討した。以下、得られた結果を列挙する。

- 重力場光線追跡法は、いくつかの仮定のもとでブラックホール時空を可視化可能である。
- 生成画像が正しいかどうか評価することが難しい
- 光線の軌道を計算するために必要な、汎用的な Runge-Kutta 型の数値計算法は、重み付き平均を取り精度を上げるという手法のために関数の評価回数が多く、計算コストが高い
- さらに CG として優れた画像を生成しようとする、計算時間が現実的ではなくなる可能性や蓄積誤差による大域誤差が無視できなくなる可能性がある

以上のことから、光線を追跡するというアプローチを用いることには問題は無いが、測地線の微分方程式を解いていくアプローチには問題があることが推測できる。

3. 8次元位相空間内での光線追跡—シンプレクティック・レイトレーシング—

3.1 序言

重力場光線追跡法により，ブラックホールが存在する宇宙での光線追跡が可能となった．関連研究は1990年前後から増加しており，これは計算機のCPU単体の性能向上によるところが大きい．文献 [58] によると，1991年頃に並列計算機の性能がベクトル型計算機の性能を上回っており，チップが高速化，小型化，低価格化した一方でベクトル型計算機の計算速度の向上が限界に近づいていたと結論されている．つまり，重力場光線追跡法はハードウェアの進歩により可能となった手法であり，必ずしもアルゴリズムや数値計算など理論面の発展があったとは言いきれない．実際，従来の重力場光線追跡法に関する各種研究の差異は，配置オブジェクトや状況設定，数値計算法など，主に実装段階での違いが主である．光線を発射し，測地線の微分方程式を数値的に解き，配置オブジェクトとの交差判定を繰り返す処理手順は全く同一である．計算速度や計算精度，結果の提示手法を改良するためには根本的に別なアプローチを使う必要がある．

そこで本章では，光線の運動は8次元位相空間でのハミルトニアン関数に支配される力学系であるという立場を取るシンプレクティック・レイトレーシング法を提案する．

まず3.2節において重力場光線追跡法の適用範囲と性能限界について考察し，次に3.3節ではシンプレクティック・レイトレーシング法で使用されるハミルトン力学と運動方程式について説明し，ブラックホール時空に対するシンプレクティック数値解析法の適用方法について述べる．そして3.4節ではシンプレクティック・レイトレーシング法の実装について述べ，3.5節において実装による可視化結果を示し，結果及び実装についての考察を述べる．

3.2 重力場光線追跡法の利点と問題点

重力場光線追跡法では，光線の軌道は直線の方程式でなく，測地線の微分方程式によって計算される．ところで，測地線の微分方程式は，相対論の基盤であるアインシュタインの重力場方程式から導かれるわけではない．測地線の微分方程式は，空間の概念を数学的に一般化した多様体の上で，2点間の距離の極値を取る曲線の方程式として変分法により導かれる．従って重力場光線追跡法でも，光線の軌道を表す方程式が相対論に従うことを要請してはおらず，これは重力場光線追跡法が相対論とは無関係な光線の軌道による可視化も可能であることを意味する [59][35]．例えば，光線の軌道を表す方程式がカオスなどの振る舞いを示す力学系の方程式である場合の可視化，屈折率が複雑に変化する複数の液体の入り交じった水中の可視化，時空が双曲空間だった場合の観測光景の可視化なども可能である．

以上の事実は重力場光線追跡法の利点であると同時に，ブラックホール時空での光線の軌道の計算結果が，相対論的に正しい結果ではなくても可視化ができてしまうことを意味する．つまり重力場光線追跡法では，光線の軌道の数値計算結果の正当性とは無関係に CG 画像が出力されてしまう．精度保証付き数値計算 [60] により誤差を抑えることも考えられるが，精度保証付き数値計算法では計算結果が一定の精度に保つための反復計算が必要となるために計算コストが高い．測地線の微分方程式を精密に解くために，刻み幅と呼ばれる量を小さく取って Runge-Kutta 法や Euler 法を適用すると，桁落ちや丸め誤差，打ち切り誤差が蓄積して大域誤差が大きくなる可能性がある [61]．Runge-Kutta 法などで大域誤差を考慮する研究も存在するが [62][63]，一般にうまくいくとは限らない [64]．従ってブラックホール時空で光線を追跡する手法をより高速化，高精度化するためには重力場光線追跡法では限界があり，従来手法とは異なるアプローチを開発する必要がある．

3.3 ブラックホール時空中でのハミルトン力学に基づく光線追跡

3.3.1 ハミルトンの正準方程式

現代物理学では、ニュートン力学ではなくハミルトン力学を用いることが多い。光も自然現象の一つなのでハミルトン力学で記述可能なはずであり、光線の軌道を計算する方法として測地線の微分方程式を用いずにハミルトンの正準方程式

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{ds} = +\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (6)$$

を使う方法が考えられる。ここで、 H はハミルトニアンと呼ばれる関数、 q_i ($0 \leq i \leq n-1$) は座標成分、 p_i ($0 \leq i \leq n-1$) は各座標成分に対応する運動量成分である。ブラックホール時空の場合、時空の次元 $n = 4$ であり、3次元座標成分に時間軸を加えた4次元成分が座標成分で、その各座標成分に対応した4次元の運動量成分の合計8次元の空間の中で光線を追跡することになる。

ハミルトンの正準方程式 (6) は一階の連立常微分方程式であり、測地線の微分方程式と同様に数値的に解かなければならない。しかし測地線の微分方程式と違い、ハミルトンの正準方程式に対してはシンプレクティック数値解析法 [65][66] という有力な数値解析法が存在することが知られている。シンプレクティック数値解析については、3.3.2 節において詳しく述べる。

ところで、ハミルトン力学やシンプレクティック数値解析を用いるためには、ハミルトンの正準方程式をたてるためのハミルトニアンが必要である。一般にハミルトニアンは、ラグランジアン L という量よりルジャンドル変換

$$H(p, q) = p\dot{q} - L \quad (7)$$

という計算で導くことが可能である。ラグランジアンとしては、文献 [67] や [68] の定義と同じものを用いた。このルジャンドル変換を用いると、ブラックホール時空中における光線の運動を表すハミルトニアンが導ける。ブラックホールが存在しない時空の場合は

$$H = \frac{p_t^2}{2} - \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r^2} \frac{p_\theta^2}{2} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{p_\phi^2}{2} \quad (8)$$

となり，これは特殊相対論を考慮した時空となる．また，球対称のブラックホールが存在する時空は

$$H = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{p_t^2}{2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{p_r^2}{2} - \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{p_\phi^2}{2r^2 \sin^2 \theta} \quad (9)$$

となる．ここで， r_g はブラックホールの質量を表すパラメータでブラックホール半径とも呼ばれる．さらに，軸対称のブラックホールが存在する時空は

$$H = \left(1 + \frac{r_g r (a^2 + r^2)}{\rho^2 \Delta}\right) \frac{p_t^2}{2} - \frac{\Delta p_r^2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{p_\theta^2}{2} - \frac{\rho^2 - r_g r}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \frac{p_\phi^2}{2} + \frac{a r_g r}{\rho^2 \Delta} p_t p_\phi \quad (10)$$

である．ここで， $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ， $\Delta = r^2 - r_g r + a^2$ ， a はブラックホールの角運動量に相当するパラメータである．また，このハミルトニアンは，電荷を表すパラメータ e を用意して $\Delta = r^2 - r_g r + a^2 + e^2$ と定義し直すことにより，電荷を持つブラックホールにも拡張できる．なお本論文では用いていないが，宇宙論の研究などに使用されるカスナー時空 [69] と呼ばれる特殊な時空に対しても，例えば次のようにハミルトニアンを定義できる．

$$H = \frac{1}{r^2 C_1} \frac{p_t^2}{2} - p_r^2 - \frac{1}{r^2 C_2} \frac{p_\theta^2}{2} - \frac{1}{r^2 C_3} \frac{p_\phi^2}{2} \quad (11)$$

式 (11) で定義される時空は，宇宙ヒモ [70] と呼ばれる非常に特殊なブラックホールを表している．以上見たように本研究に関連するブラックホールに対しては，光線の運動を支配するハミルトニアンが存在することが分かった．

3.3.2 シンプレクティック数値解析

シンプレクティック数値解析はハミルトン力学に対して適用可能な微分方程式の数値解法で，数値的な局所誤差を蓄積させないという特徴がある．厳密には，次のように定義される．まず，座標成分の微分形式 dq_i と運動量成分の微分形式 dp_i に対して，ある瞬間 $s = s_0$ 時の成分 $(dq_i(s_0), dp_i(s_0))$ から数値的に $s = s_0 + \Delta s$ 時の成分 $(dq_i(s_0 + \Delta s), dp_i(s_0 + \Delta s))$ を求める．そしてそれらの値が，外微分形式の外積 \wedge を用いて定義されるシンプレクティック 2 次形式が保存される形になっている場合，すなわち，

$$\sum_{i=0}^3 dq_i(s_0) \wedge dp_i(s_0) = \sum_{i=0}^3 dq_i(s_0 + \Delta s) \wedge dp_i(s_0 + \Delta s) \quad (12)$$

が成り立つ場合，その数値解法をシンプレクティック数値解析法と呼ぶ。

シンプレクティック数値解析では，個々の成分についてはやはり打ち切り誤差が生じるものの，外積の総和を取ると誤差が打ち消し合い，式 (12) が厳密に満たされる．このようにシンプレクティック数値解析には厳しい制約条件があるため，古典的 Runge-Kutta 法のようにあらゆる問題に適用可能なわけではない．ハミルトン力学で記述される物理現象がシンプレクティック 2 次形式 (12) を保存する理由は，ハミルトンの正準方程式 (6) の厳密解が，パラメータ s について正準変換と呼ばれる特別な形をしているからである．シンプレクティック性を保存する数値解析法は，特に周期解を持つハミルトン系，例えば太陽系の惑星の数十億年にも及ぶ長期シミュレーション [71] などには欠かせない技術となっており，本論文で示す通り周期解を持たないハミルトン系に対しても通常の数値解析法よりも良い結果を示すことがあり，近年では数値相対論 [72] と呼ばれる分野にも使用されている [73]

一般に，広く使用されている古典的 Runge-Kutta 法などは，打ち切り誤差の次数に応じただけ誤差が生じ，式 (12) は満たされない．それは物理的にはリュウビルの体積不変の定理 [74] に反することを意味し，物理法則に対し忠実な結果を表さないことになる。

3.4 シンプレクティック・レイトレーシングの設計と実装

3.4.1 陰的シンプレクティック数値解析

ハミルトンの正準方程式に対するシンプレクティック数値解析は様々なものが提案されているが [65]，今回の実装ではガウス・ルジャンドル型 [75] と呼ばれる手法を採用する．解くべき方程式は式 (6) である．この方程式は時間発展についての常微分方程式の一般形

$$\frac{dx}{ds} = f(s, x) \quad (13)$$

の形をしていると見なすことができる．式 (13) の形の微分方程式を数値的に解くには連続的に変化する独立変数 s を離散化して s_1, s_2, \dots としなければならず，その際の間隔 $\tau = s_{k+1} - s_k$ を刻み幅と呼ぶ．また，数値解法によって計算され

た値が真の解を τ によってテイラー展開した時に τ の p 次の項まで一致することが保証されてる場合に、その数値解法を p 次の解法であると言う。

ところで、式 (6) は $2n$ 個の方程式により構成されているので、定式化にあたって

$$z = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} f(z) = & (-\partial H/\partial q_1, \dots, -\partial H/\partial q_n, \\ & \partial H/\partial p_1, \dots, \partial H/\partial p_n) \end{aligned} \quad (15)$$

とベクトルで表現する。ここで、 H はハミルトニアンであり z の関数である。そして $2n$ 次元位相空間の点 z_k から、次の位置 z_{k+1} を算出するには、次の計算を行う。

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_k + \tau \left(\frac{1}{4} f(Z_1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) f(Z_2) \right), \\ Z_2 &= z_k + \tau \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) f(Z_1) + \frac{1}{4} f(Z_2) \right), \\ z_{k+1} &= z_k + \frac{\tau}{2} (f(Z_1) + f(Z_2)). \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 τ は先に述べた刻み幅を表す定数である。この公式は Z_1 、 Z_2 について陰的なので、 $Z_1 = Z_2 = z_k$ を初期値とし、適当な回数だけ反復計算をする必要がある。収束判定は通常の ANSI/ISO 規定の C 言語における double 精度出力程度、すなわち小数点以下 6 桁程度が不変になった時点で反復を終了させている。我々の実験では、条件にもよるが 3 回程度の反復計算で収束することが多かった。ここに示した計算による $z_k \rightarrow z_{k+1}$ という写像はシンプレクティック性を保存することが、直接計算により容易に証明できる [65]。また、打ち切り誤差は 4 次のオーダーであり、しばしば使用される次の公式で表される通常の Runge-Kutta 公式と同じ次数である。

$$\begin{aligned} Z_1 &= \tau f(z_k), \\ Z_2 &= \tau f\left(z_k + \frac{1}{2} Z_1\right), \\ Z_3 &= \tau f\left(z_k + \frac{1}{2} Z_2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_4 &= \tau \mathbf{f}(z_k + \mathbf{Z}_3), \\ z_{k+1} &= z_k + \frac{1}{6}(\mathbf{Z}_1 + 2\mathbf{Z}_2 + 2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4). \end{aligned} \quad (17)$$

3.4.2 実装環境と処理の流れ

シンプレクティック・レイトレーシングの全体の処理の流れは通常の光線追跡法と同様である。すなわち、観測者の視点と視線方向を微分方程式の初期値とし、数値的に微分方程式を解きながら光線の軌道を順次求める。光線がもし空間に配置した物体と交差したなら、交差点の物体の色を調べてスクリーンにプロットし、軌道計算を打ち切る。この光線の軌道計算をスクリーンの画素数だけ繰り返すことで、画像を生成する。2章と同様に背景には平面を配置し、背景画像としてNASAのHubble Space Telescope Public Picturesのうち、Dust in Spiral Galaxies⁴を平面上にマッピングする。ブラックホールの近傍に配置する球オブジェクトの表面には、図15に示す地球の海洋温度分布を表した画像データをマッピングする。温度分布を表した画像は様々な色が使用されており、相対論的な光線の波長の変化の観測に適するからである。

実装に使用した計算機は2章と同様のsgi社のOnyx2(CPU R10000×16)であるが、言語は同機に標準添付されているMIPS Cで、並列化処理はOpenMP⁵を用いた。一本の光線の軌道計算にCPUを一つ割り当てる手法も重力場光線追跡法と同様である。

3.5 可視化結果と考察

ブラックホールが存在しない場合、ハミルトニアンとして式(8)を用いて時空を描画すると図16のようになる。

次に、球オブジェクトと背景画像との間に球対称ブラックホールを配置した場合の画像が図17である。使用したハミルトニアンは式(9)で、ブラックホール半径は $r_g = 0.2$ とした。重力レンズ効果によって球オブジェクトが左右に分かれ

⁴<http://www.astr.ua.edu/keel/research/dust.html>

⁵<http://www.openmp.org/>

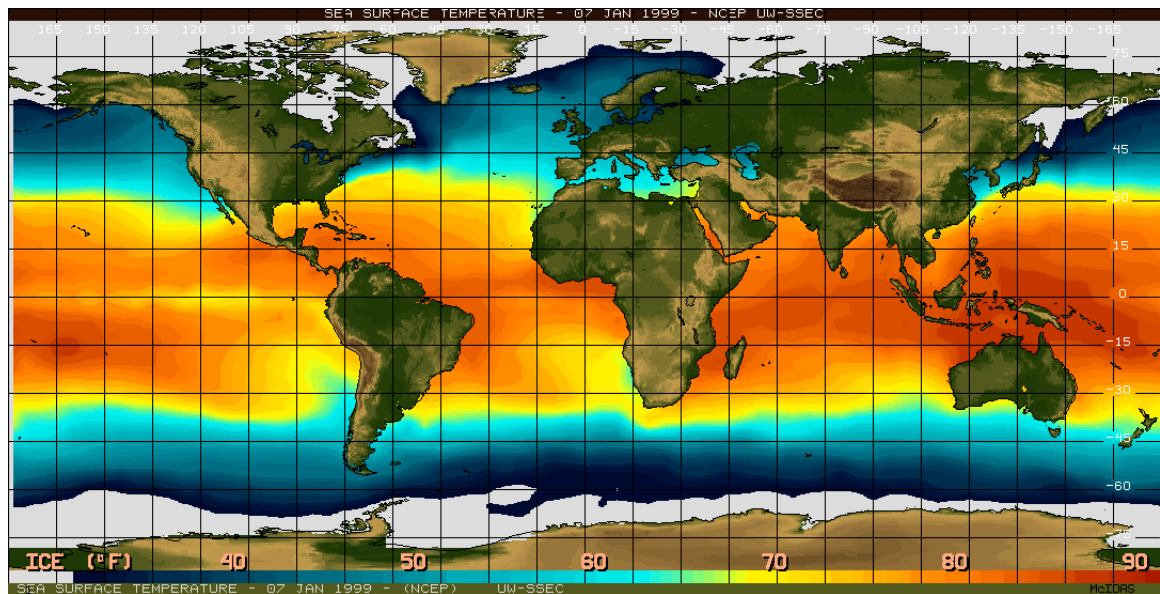


図 15 海洋温度分布マップ

で見え、さらに赤方偏位現象によって温度分布マップの白い部分が赤みを帯びている。

続いて、軸対称ブラックホールを配置した場合の画像が図 18 である。ハミルトニアンは式 (10) を用いており、角運動量に相当するパラメータは $a = 0.5$ とした。図 18 における対称の軸は、図 19 に示すように、対称軸が視線方向に対して鉛直で紙面に対して上下方向に設定されている。軸対称のブラックホールは質量に加えて角運動量に相当するエネルギーを持っているため、同じ質量のブラックホールでも図 17 よりも図 18 の方が背景画像の歪みが大きくなっていることが分かる。

図 20 は、図 21 に示すように、対称の軸が視線方向と平行で紙面に対して垂直に設定されている場合の生成画像である。球対称のブラックホール時空では、その対称性より、どの方向から観測しても時空の歪み方は同じである。しかし軸対称のブラックホール時空では対称性が減ることにより観測方向によって異なる歪みを見せることが本実験により視覚的に確認できる。この例からも分かるように、軸対称のブラックホール時空は球対称のブラックホール時空に比べ遥かに複雑で

多様な性質を持つ [76].

以上、シンプレクティック・レイトレーシング法を用いて重力場光線追跡法と同様にブラックホール時空を可視化可能なことが確認できた。ここで用いたガウス・ルジャンドル型のシンプレクティック数値解析法は安定的で数値計算の刻み幅をどのようにとっても真の解に対して良い近似を与えることが示されている [77]. 実際、本章の実装に対しても次のような補助実験で、数値計算の刻み幅を多少大きくとって速く計算することが可能であることを示すことができる。

ここで使用する実験方法は、山下 [35] の手法などでも採用されている「一般相対論において光はヌルベクトルとして扱われる」という事実を利用した方法である。つまり、線素と呼ばれる次の量

$$\Delta s^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \Delta \tau^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \Delta r^2 + r^2 \Delta \theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \Delta \phi^2 \quad (18)$$

が、光線の軌道上では必ずゼロになる性質を利用する。光線の座標を数値的に算出して、その座標を式 (18) に代入した結果がゼロからずれていると、ずれの分だけ不正確な計算結果であると言える。そこで、式 (18) の値を光線の軌道上で積算した値を誤差と定義し、重力場光線追跡法とシンプレクティック・レイトレーシング法での誤差を比較する。従来の重力場光線追跡法に関する研究では、文献 [31][35] では刻み幅変化型の 2 次の Runge-Kutta 法、文献 [39] では 4 次の Runge-Kutta-Fehlberg 法、文献 [32] では Euler 法、文献 [78] では 3 次の Leap frog 法など様々な数値解法が使用されている。そのため全てと比較することは難しいために、ここでは非シンプレクティック数値解析の代表として、古典的な刻み幅固定の 4 次の Runge-Kutta 法を用いることにする。

比較結果を図 22 に示す。図 22 において、縦軸は誤差積算値、横軸は数値計算の刻み幅を表す。破線は測地線の方程式を 4 次の Runge-Kutta 公式 (17) を用いて解いた場合、実線はハミルトンの正準方程式をガウス・ルジャンドル型の公式 (16) を用いて解いた場合の刻み幅に対する誤差積算値を表す。ここで表されている誤差積算値は 1 万本の光線をブラックホール周辺に発射した時の式 (18) の値の絶対値の合計である。計算は全て ANSI/ISO 規定の C 言語における double 精度で行っている。図から、どちらの手法でも誤差は刻み幅に対して単調に増加するが、提案手法の方が誤差が小さいことが分かる。この実験ではブラックホール

半径が $r_g = 0.02$ で宇宙の大きさがブラックホール半径の 1000 倍程度の球状にモデル化している。従って縦軸は概ね宇宙の大きさと同程度の桁数を持っていることになる。誤差の定義式 (18) は 2 乗で定義されている上に結果は 1 万本の光線の積算誤差の合計値であるが、それでも図 22 の破線の結果は無視できるほど小さいわけではない。この結果から、用いた微分方程式の数値解法の次数が同じ 4 次であるにも関わらず、シンプレクティック数値解法が誤差の点では有利であることが分かる。この違いは、しばしば行われるように「もし光速が非常に遅かったら」という仮定を置いて相対論的效果を大きく強調して提示する場合に顕著に現れる。例として、刻み幅を 0.005 に設定してブラックホールを観測した場合に背景の銀河の歪み具合がどのように変わってくるか、ブラックホールの近傍を拡大した画像で比較してみる。図 23 は光速が実際の約 90% であった場合の計算結果である。左が測地線の方程式を Runge-Kutta 法で解く従来手法による結果、右がハミルトンの正準方程式をシンプレクティック数値解析により解く手法による結果である。この場合には、差異はまだ小さい。しかし、図 24 のように、光速が実際の約 70% と仮定すると結果が大きく異なってくる。本論文では観測者は静止しており時空も静的であることを仮定しているが、光速に近いような速度で物体あるいは観測者が移動する場合に、光速が遅くなると仮定した場合と同様な可視化結果が得られると考えられる。どちらの場合も、光速と観測者あるいは移動物体との相対速度が縮まることを意味するからである。

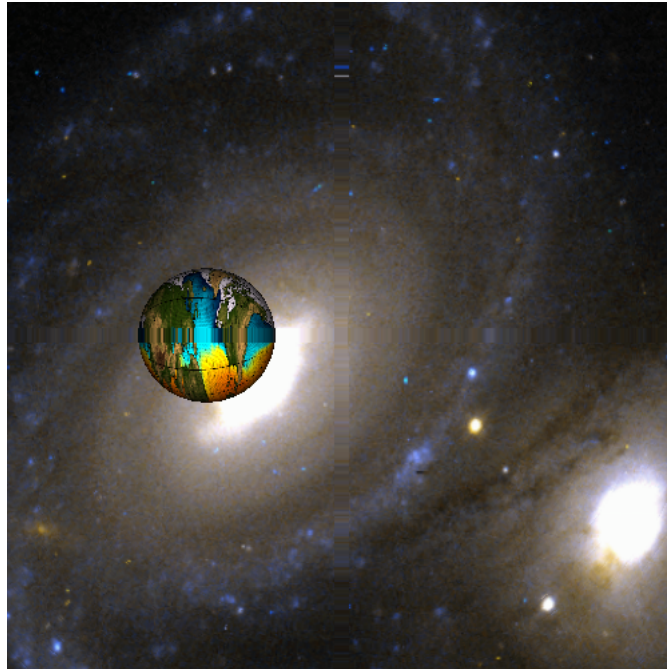


図 16 シンプレクティック・レイトレーシングの実行例：ブラックホールが存在しない場合

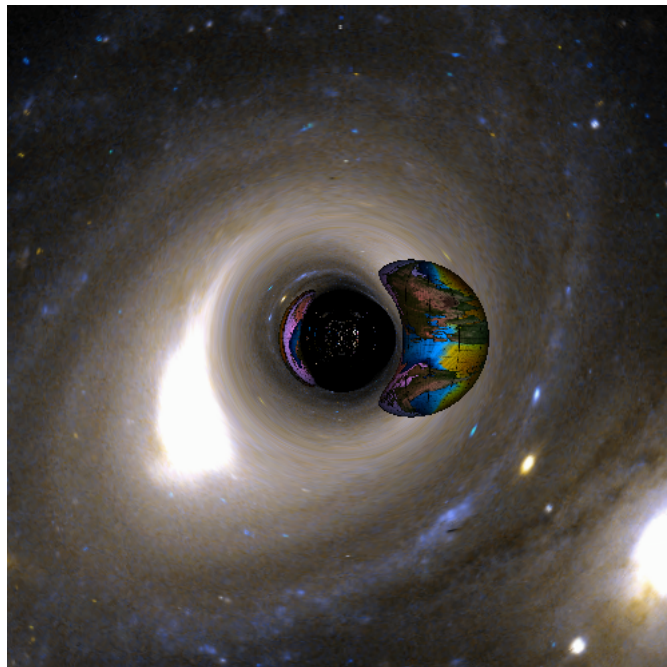


図 17 シンプレクティック・レイトレーシングの実行例：球対称ブラックホールを配置した場合

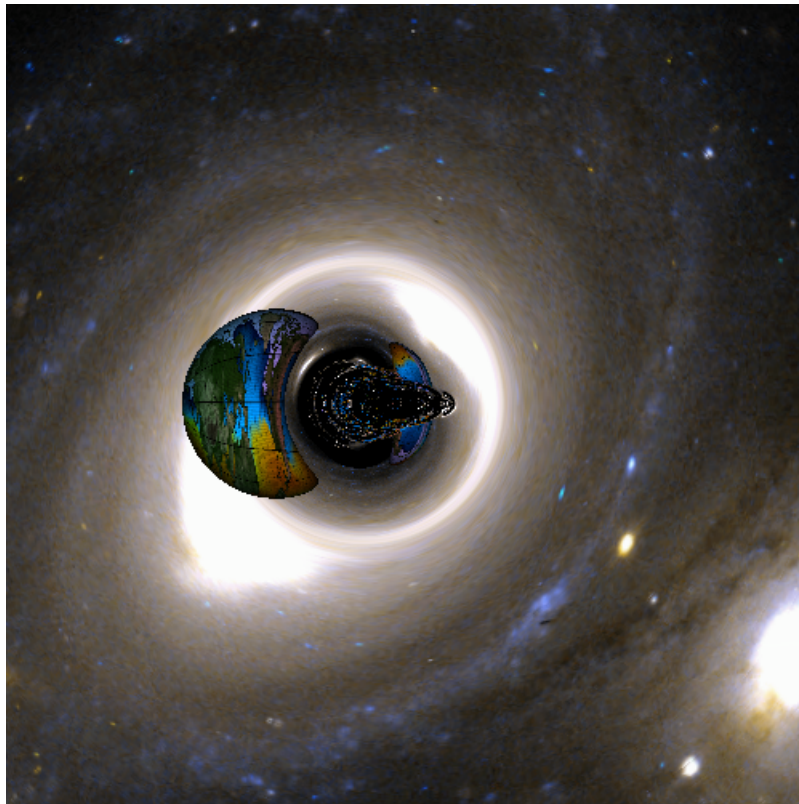


図 18 シンプレクティック・レイトレーシングの実行例：軸対称ブラックホールを配置した場合

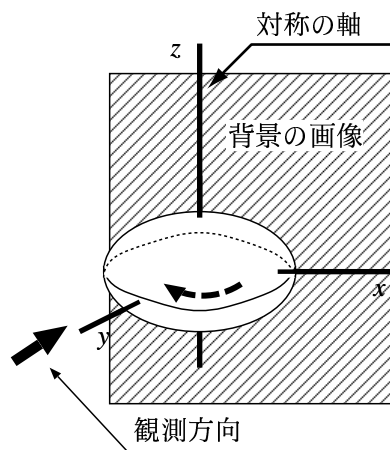


図 19 軸対称ブラックホールを正面から観測する場合の概念図

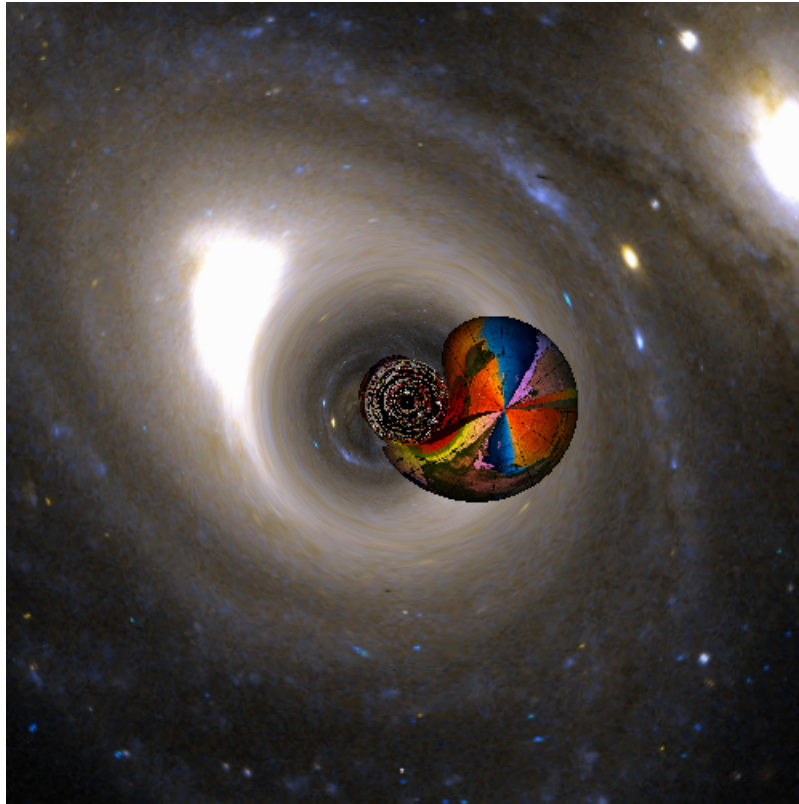


図 20 シンプレクティック・レイトレーシングの実行例：軸対称ブラックホールを上から観測した場合

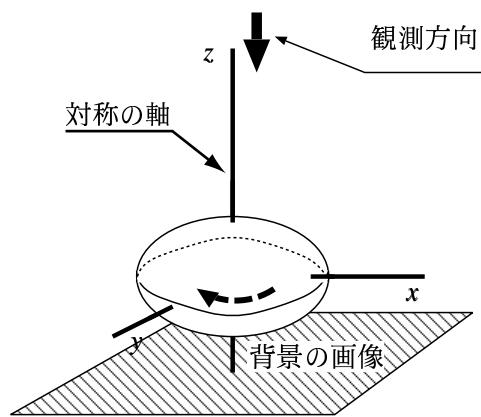


図 21 軸対称ブラックホールを上から観測する場合の概念図

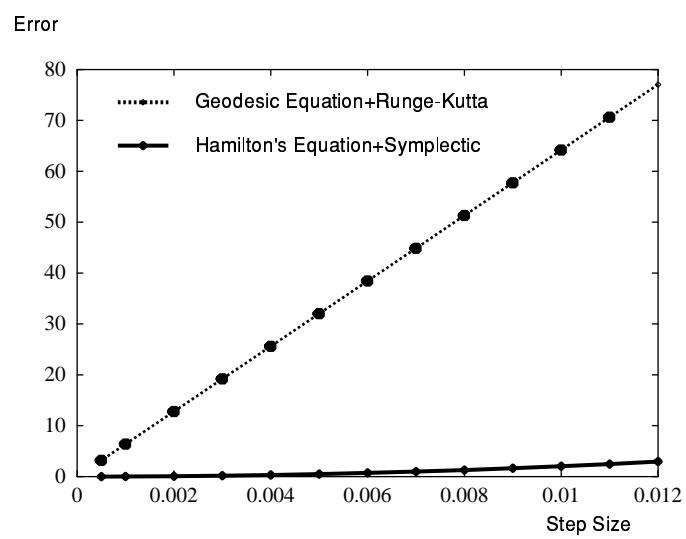


図 22 誤差積算値 (1 万本の光線についての誤差絶対値の和) の比較. 縦軸, 横軸とも幾何単位系.

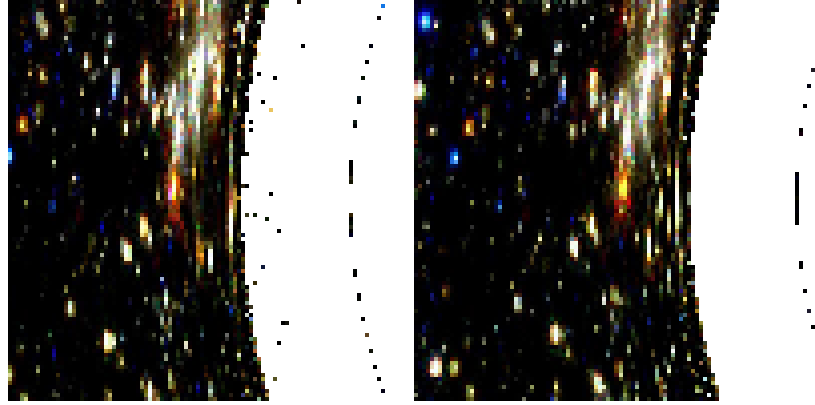


図 23 光速が通常の場合の 90% の場合の可視化の比較 (いずれも刻み幅は 0.005) . 左が測地線の微分方程式と Runge-Kutta 法を用いた場合, 右がハミルトンの正準方程式とシンプレクティック数値解析を用いた場合.

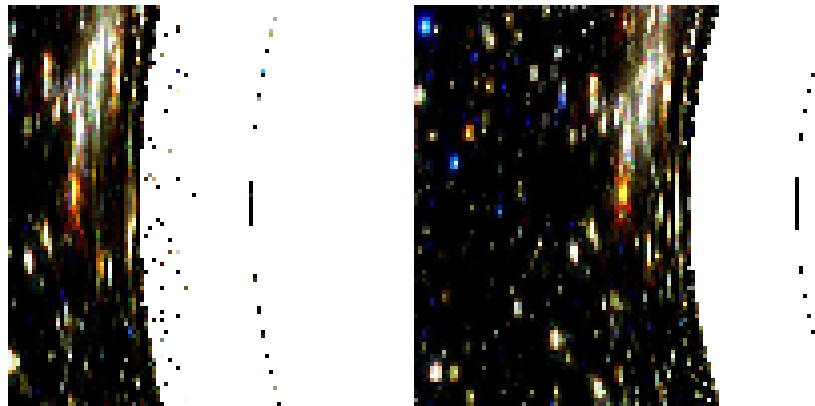


図 24 光速が通常の場合の 70% の場合の可視化結果の比較 (いずれも刻み幅は 0.005) . 左が測地線の微分方程式と Runge-Kutta 法を用いた場合, 右がハミルトンの正準方程式とシンプレクティック数値解析を用いた場合.

3.6 結言

本章では、光線を追跡してCG画像を生成するアプローチでの新しいブラックホール時空の可視化手法であるシンプレクティック・レイトレーシング法を提案した。提案手法は従来手法に比べて、数値計算の刻み幅を変化させて計算の精密さを変化させても安定的に誤差を少なく保てることが分かった。また、あるブラックホール時空における光線の軌道を計算するには、ブラックホールに対するハミルトニアン関数を一つ準備すれば光線の軌道を表す方程式が得られるため、軸対称ブラックホール時空のような複雑な時空に対しても従来手法より数式の導出や実装が短時間で可能となる。反面、従来手法では必要がなかった非線形連立方程式が計算の過程に導入されており、計算コストが高いという問題が残された。

提案手法には問題が残されたとはいえ、シンプレクティック数値解析法がコンピュータグラフィックスの生成に適用可能であることを証明したことで意義がある。ハミルトン力学と結び付けられたことで、数学や物理学の分野で開発されているハミルトン系に対する様々な技術が利用できるため、まだまだ発展する可能性があると言える。

4. シンプレクティック・レイトレーシングの高速化

4.1 序言

3章において、ブラックホール時空で光線追跡を行う際にシンプレクティック数値解析が適用可能であることが確認できた。実装には任意のハミルトニアンに対し適用可能な Runge-Kutta 型シンプレクティック数値解法を用いたため、様々なブラックホール時空を正確に可視化可能なシステムとなった。しかし欠点として、陰的な解法であるために非線型連立方程式を解く必要があり、計算コストが高いという問題が残った。本研究では高速かつ正確にブラックホール時空で光線追跡を行うことを目標としており、計算の高速化は達せられなければならない。本章では、シンプレクティック・レイトレーシングにおける陽的な計算手法について述べる。

まず4.2節では、3章において提案したシンプレクティック・レイトレーシング法の特徴について論じ問題点を整理する。次に4.3節では、対称分解法 [79] に基づき4次のオーダーの打ち切り誤差を持つ陽的なシンプレクティック数値解法を導く。続く4.4節では実装について述べてから作成画像を示し、4.5節で2章及び3章で述べた手法との比較をする。

4.2 陰的シンプレクティック・レイトレーシングの利点と問題点

3章では、陰的な Runge-Kutta 型のシンプレクティック数値解析法であるガウス・ルジャンドル型の公式を用いたシンプレクティック・レイトレーシング法を提案した。一般に陰的な常微分方程式の数値解法は安定度や精度において陽的な手法よりも優れており、さらにガウス・ルジャンドル型の公式はあらゆるハミルトン系に対して適用可能である。これはシンプレクティック・レイトレーシング法が、アインシュタインの重力場方程式の解析解として発見されているあらゆるブラックホール時空を可視化可能であることを意味する。

一方、陰的な数値解法は非線型連立方程式を解く必要があり、通常数値解析に関する書籍では「手間がかかる (more trouble and more expensive)」と称される。

シンプレクティック数値解析自体は蓄積誤差を出しにくいとしても、 Δ_s 時間の光線追跡に要する反復計算の各ステップにおいて誤差が出ている可能性があり、反復回数だけ誤差が蓄積する。従って、誤差の蓄積の観点からも計算速度の向上のためにも、陽的なシンプレクティック数値解析を用いる光線追跡法の開発は必須である。

しかし、ある種のハミルトニアンに対しては精度の良いシンプレクティック数値解析法が容易に構成できることが分かっているが [80]、相対論的效果を考慮したハミルトニアンを対象にする場合、重力が弱い場合でも陽的なシンプレクティック数値解析法を導くことは難しい [71]。

そこで考えられるアプローチの一つとしては、重力場光線追跡法からシンプレクティック・レイトレーシング法に移行した場合のように、汎用的なシステムから研究目的の範囲内で対象を特化させることで性能向上を目指す方法がある。本章では、可視化対象を球対称ブラックホール時空に特化させることで陽的なシンプレクティック数値解析法を導き、局所的にも大域的にも誤差が小さくしかも高速に計算可能な手法を確立する。

4.3 陽的なシンプレクティック数値解法の構成

本章で対象とする、球対称のブラックホール周辺での光線の運動を表すハミルトニアンは、次のものである (式 (9) と同じ)。

$$H = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{p_t^2}{2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{p_r^2}{2} - \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{p_\phi^2}{2r^2 \sin^2 \theta}. \quad (19)$$

式 (19) が運動量成分について 4 項の和の形になっていることに注目すると、個々の項についてのシンプレクティック数値解法を導き順次実行し、ハミルトニアン (19) についてのシンプレクティック数値解法を構成するという手法が考えられる。

まず付録 B に示すように、次の一連の計算を実行することが 1 次のオーダーの陽的シンプレクティック数値解法となる。

$$F_1(\tau) := \begin{cases} t^* &= t + \tau \frac{p_t}{1 - r_g/r} \\ p_r^* &= p_r + \tau \frac{r_g p_t^2}{2(r - r_g)^2} \end{cases} \quad (20)$$

$$F_2(\tau) := r^* = r + \tau p_r^* \quad (21)$$

$$F_3(\tau) := \begin{cases} p_r^{**} &= p_r^* \sqrt[3]{\frac{3}{2} r g \frac{p_r^*}{r^{**2}} \tau + 1} \\ r^{**} &= r^* \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2} r g \frac{p_r^*}{r^{**2}} \tau + 1} \right)^2 \end{cases} \quad (22)$$

$$F_4(\tau) := \begin{cases} p_r^{***} &= p_r^{**} - \tau \frac{p_\theta^2}{r^{**3}} \\ \theta^* &= \theta - \tau \frac{p_\theta}{r^{**2}} \end{cases} \quad (23)$$

$$F_5(\tau) := \begin{cases} p_r^{****} &= p_r^{***} - \tau \frac{p_\phi^2}{r^{**3} \sin^2 \theta^*} \\ p_\theta^* &= p_\theta - \tau \frac{\cos \theta^* p_\phi^2}{r^{**2} \sin^3 \theta^*} \\ \phi^* &= \phi - \tau \frac{p_\phi}{r^{**2} \sin^2 \theta^*} \end{cases} \quad (24)$$

そして付録Cで示すように、次のように計算することで2次のオーダーの解法が得られ、それを $S_2(\tau)$ とおく。

$$S_2(\tau) := F_1\left(\frac{1}{2}\tau\right) \rightarrow F_2\left(\frac{1}{2}\tau\right) \rightarrow F_3\left(\frac{1}{2}\tau\right) \rightarrow F_4\left(\frac{1}{2}\tau\right) \rightarrow F_5(\tau) \quad (25)$$

$$\rightarrow F_4\left(\frac{1}{2}\tau\right) \rightarrow F_3\left(\frac{1}{2}\tau\right) \rightarrow F_2\left(\frac{1}{2}\tau\right) \rightarrow F_1\left(\frac{1}{2}\tau\right) \quad (26)$$

さらに付録Dで示すように、次のように計算することで4次のオーダーの解法が得られる。

$$S_4(\tau) := S_2(k_1\tau) \rightarrow S_2(k_2\tau) \rightarrow S_2(k_1\tau) \quad (27)$$

ここで、 k_1 , k_2 は $k_1 = (4 + 2^{2/3} + 2^{4/3})/6$, $k_2 = -(1 + 2^{1/3})^2/3$ と定義される定数である。

4.4 陽的な解法によるシンプレクティック・レイトレーシングの実装と可視化結果

実装に使用した機器は3章と同様でsgi社のOnyx2である。使用したソフトウェアはMIPS CとOpenMPに加えgcc⁶のObjective-Cの機能を使い、実装システムの大部分をオブジェクト指向化した。

⁶<http://gcc.gnu.org/>

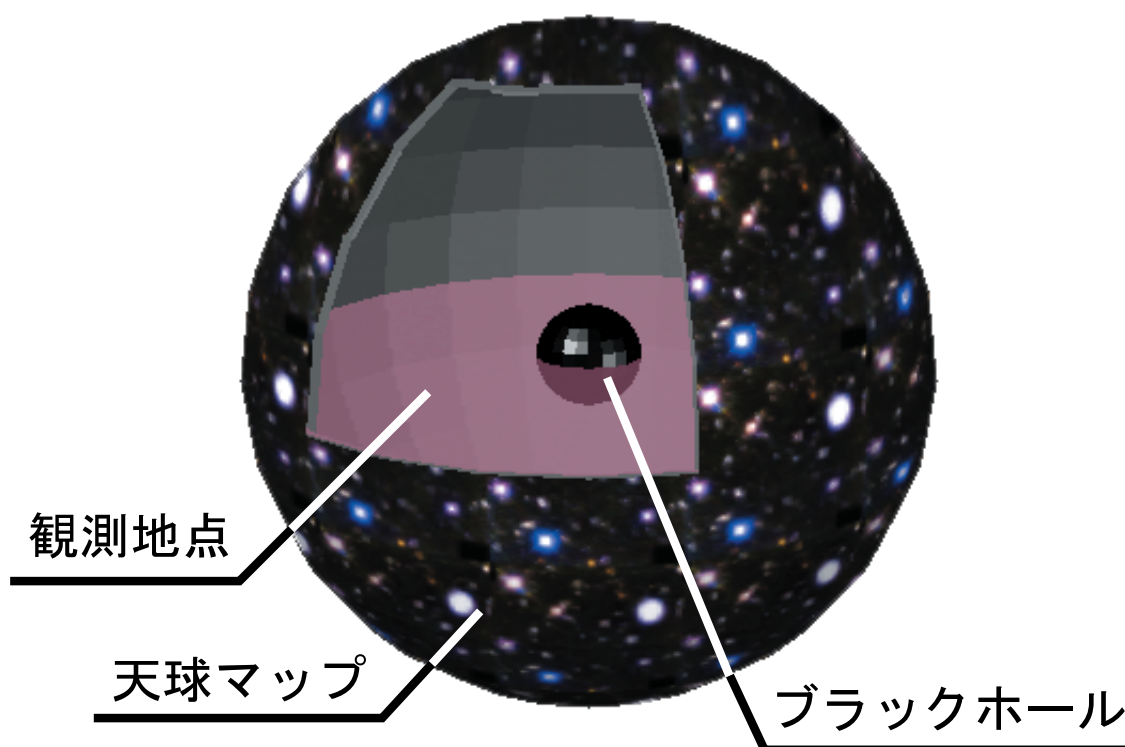


図 25 設定する世界モデル

陽的なシンプレクティック数値解析法により長期間の精度の良い光線追跡が可能となったので、光線がブラックホールを周回するような状況をも可視化可能になった。そこで前章までのブラックホールの背後に背景画像を配置する設定から、図 25 のように宇宙を球状にモデル化する設定に変更した。図 25 に示すように原点にブラックホールが存在し、原点から離れたところに観測者を配置する。天球には NASA が配布している Hubble Space Telescope Public Pictures のうち、Hubble Spies Giant Star Clusters Near Galactic Center⁷ (STScI-PRC99-30) の画像データがマッピングされている。

このような設定で、まずブラックホールが存在しない場合の観測画像は図 26 のようになる。そして球対称のブラックホールを配置した場合が図 27 である。図 27 は観測者の背後に存在する星が見えていたり、同じ星が複数回描画される入れ

⁷<http://osite.stsci.edu/pubinfo/pr/1999/30/index.html>

子宇宙現象も可視化されているが、画像の性質上詳細については分かりにくいものとなっているため、次のような単純化した天球マップを用いる実験を試みる。

まず図 28 のように天球を方位角方向に 4 等分して色分けをする。つまり天球を上から見下ろすと、図 28 の上図のようになる。図 28 上図の矢印は、観測者の視線方向を表す。矢印方向を観測するとスクリーンの左半分が赤色、右半分が水色になるような画像が得られるはずで、実際に画像を生成すると図 29 が得られる。そしてこの天球の中に球対称のブラックホールを配置すると図 30 に示すような画像が得られる。図 30 を見ると、背後に存在するはずの青や緑の部分が前方に見えていることが確認でき、さらに図 29 で確認したように本来前方にある赤や水色の部分がもう一度観測されていることが分かる。これは天球から発せられた光線が、直接観測者の視界に入ったものと、ブラックホールの周りを 1 周してから観測者の視界に入ったものの 2 種類の場合があるからである。

ここまでの可視化結果は十分遠方にある星や銀河が歪んで見えるという大域的な様子の可視化であった。さらにブラックホールの近傍の様子を可視化するために、x-y-z 軸と半透明の平面を配置した様子が図 31 である。そして球対称のブラックホールを配置すると図 32 のような画像が得られる。各軸が直行している部分の白い円が描かれている場所にブラックホールがある。各軸を表す円柱のブラックホールに近い部分で赤方偏位現象により白い円柱の色が赤みを帯びていることが分かる。また、半透明の平面の上部が盛り上がっているが、これも重力レンズ効果の影響であることが知られている [81]。次に平面に厚みを加えて直方体状にし、スカラー曲率と呼ばれる次式で定義される量

$$R = \frac{12r_g^2}{r^6} \quad (28)$$

を直方体の内部の色と対応させてボリューム・レンダリングをした結果が図 33 である。スカラー曲率は時空の歪み具合を表し、ブラックホールが存在しなければスカラー曲率は常にゼロである。色との対応は、スカラー曲率がゼロなら赤、時空の歪みが大きくなり、スカラー曲率が大きくなるに連れ緑、青と波長が短くなるようにする。従ってブラックホールが存在しない図 33 では直方体は赤くなっている。ここに、各軸を表す円柱の半径の 1/10 以下の極小さなブラックホールを配置した場合が図 34 である。背景画像はほとんど歪んでいないが、ブラック

ホールによる時空の歪みは原点付近に伝搬していることが分かる。ブラックホールを大きくしていくと、図 35、図 36 のようになる。

次節で詳しく論じられるように、一般にシンプレクティブ・レイトレーシング法は、数値解法が陰的か陽的かに関わらず重力場光線追跡法よりもブラックホール近傍の精密な光線追跡が可能である。そこで、光源から曲進して観測者の視界に入る光だけではなく、ブラックホールを周回してから視界に入る光も追跡することで、同じ光源が何度も観測される入れ子宇宙現象の可視化が可能である。図 37 は、図 27 においてブラックホール近傍を拡大した画像を同時に示したものである。ブラックホール近傍では狭い視界に広範囲の光源が圧縮されるように入ってくるため、各画像は異なるスケールが施されている。図 37 の中で、例えば緑枠の画像の中では右側に青い星があり、左方向には白い星が、左上にはオレンジ色の星が見えている。これらの星から発せられた光がブラックホール周囲を一周してから観測者の視界に入った形状が、赤枠の画像内に見えている。赤枠の画像内では縦方向に引き延ばされているが、例えば青い星は分かりやすく見えている。このような入れ子宇宙現象は現在のところ実際に観測映像として得られることは考えられないが、1960 年代に重力レンズ効果が実際に観測されることは有り得ないと思われていた歴史を考えると、将来的に望遠鏡により観測されることも有り得るかもしれない。

さらに、観測者が遠方からブラックホールに接近し、ブラックホールの中を横切ってブラックホールから飛び去るような状況を設定した場合の一連の画像を示したものが図 38 である。ブラックホール半径 $r_g = 0.5$ であり、宇宙全体の大きさは 110 にモデル化してある。(1) は遠方からブラックホールが存在する方向を観測した場合の観測画像で、中央部分に小さくブラックホールによる歪みが見えている。ブラックホールからは距離 100 程度離れている。(2) はブラックホールから距離 10 まで接近した場合である。ブラックホールの歪みが大きくなっている。(3) はブラックホールからの距離が 2 まで接近している。(4) はブラックホール半径内に突入した場合である。まったく何も見えていない。(5) はブラックホールの中心を越えて、ブラックホールからの距離 0.5002 の地点からブラックホールを背後にしてブラックホールの外側に視線を向けた場合の観測画像である。銀河の

一部が拡大されており，外側の黒い部分はブラックホールを表している．さらにブラックホールからの距離が開いてくると，(6)のように拡大されていた部分が縮小されていく．(7)はブラックホールからの距離が0.502の地点まで離れた場合である．宇宙全体が丸く観測者の前方に見える．外側の黒い部分はブラックホールである．そしてさらにブラックホールから離れていくと，(8)のように宇宙全体の画像が大きくなっていく．そのまま十分ブラックホールから離れると，(1)の画像の中央部の歪みすらない，平坦な時空の画像が得られる．

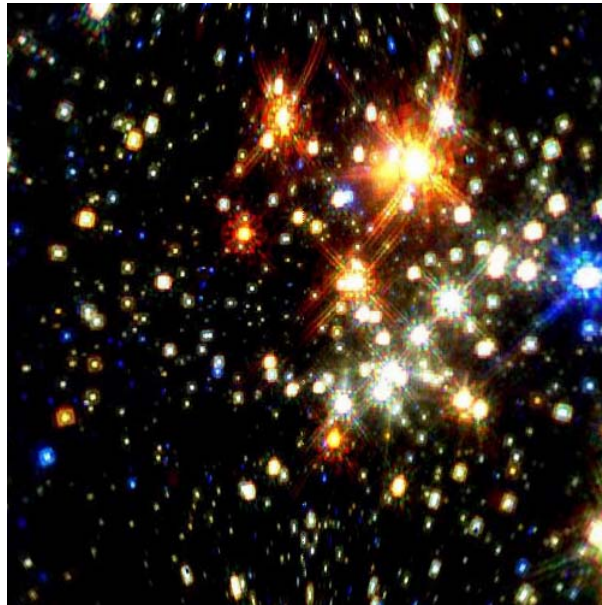


図 26 陽的シンプレクティック・レイトレーシングの実行例：ブラックホールが存在しない時空

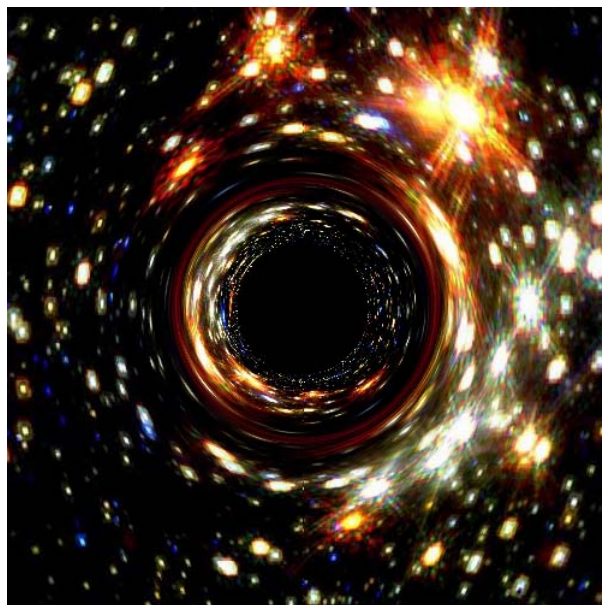


図 27 陽的シンプレクティック・レイトレーシングの実行例：球対称ブラックホールが存在する時空

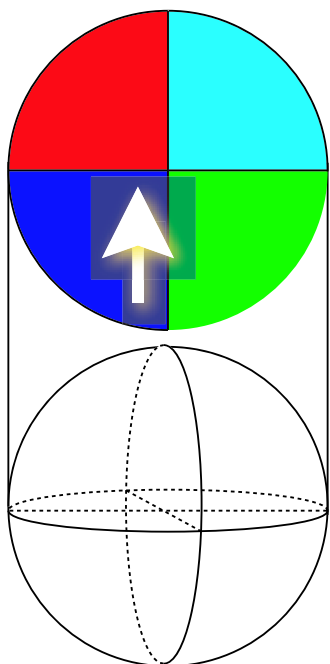


図 28 カラーリングした天球

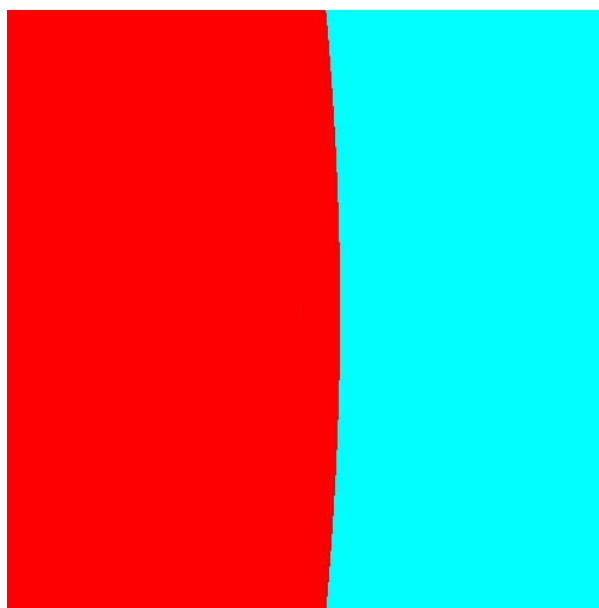


図 29 4色に塗り分けられた天球を用いた例：ブラックホールが存在しない時空

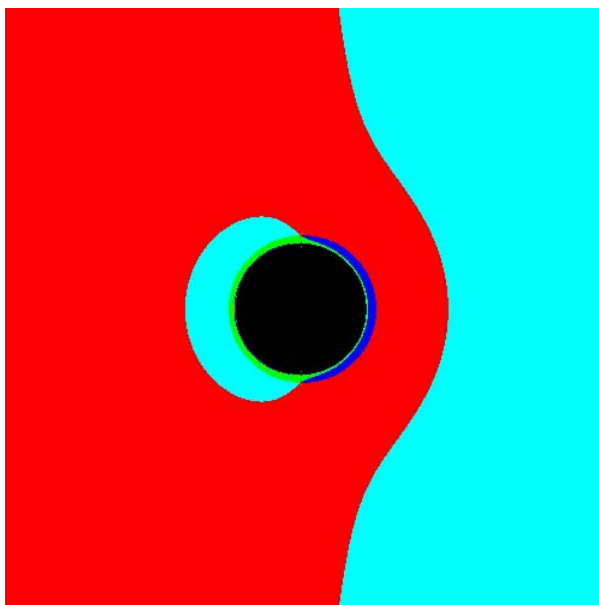


図 30 4色に塗り分けられた天球を用いた例：球対称ブラックホールが存在する時空

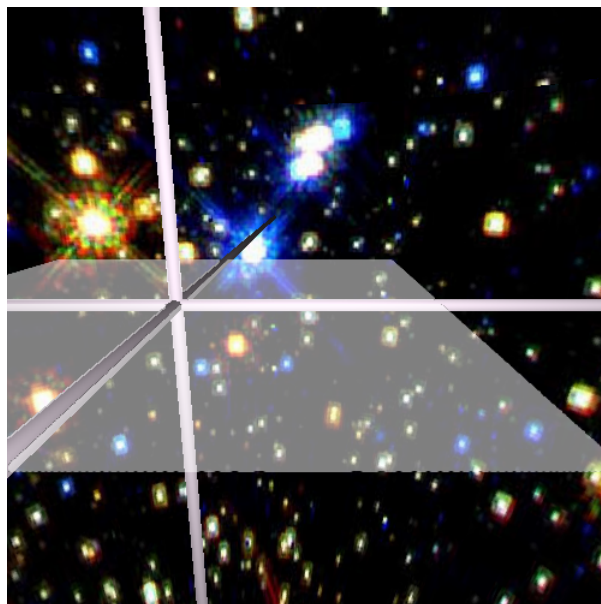


図 31 半透明の平面を配置した例：ブラックホールが存在しない時空

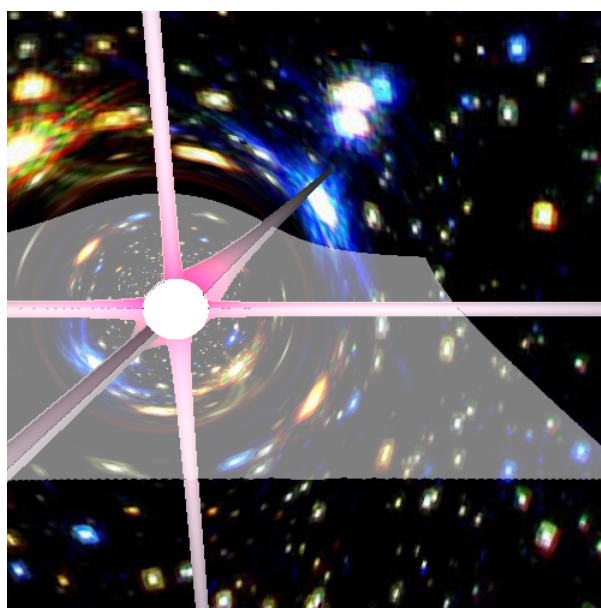


図 32 半透明の平面を配置した例：球対称ブラックホールが存在する時空

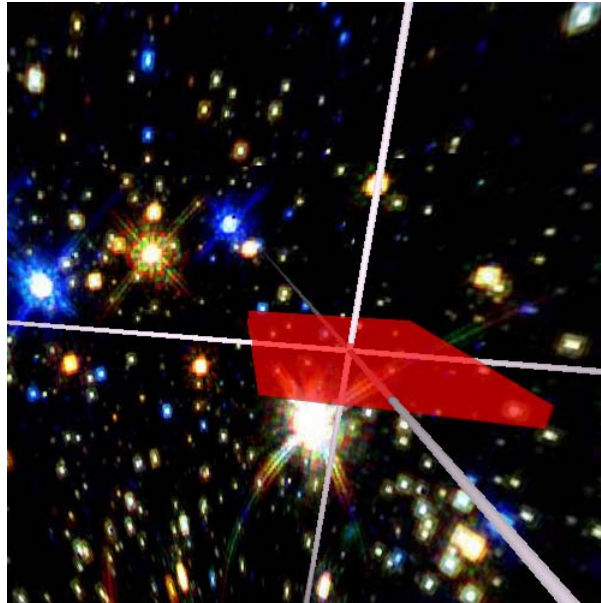


図 33 時空の曲率をボリュームレンダリングにより表現した例：ブラックホールが存在しない時空

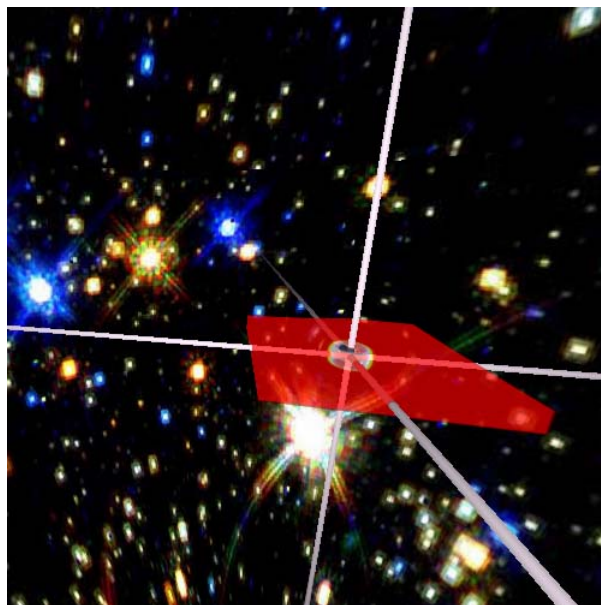


図 34 時空の曲率をボリュームレンダリングにより表現した例：球対称ブラックホールが存在する時空 ($r_g = 0.001$)

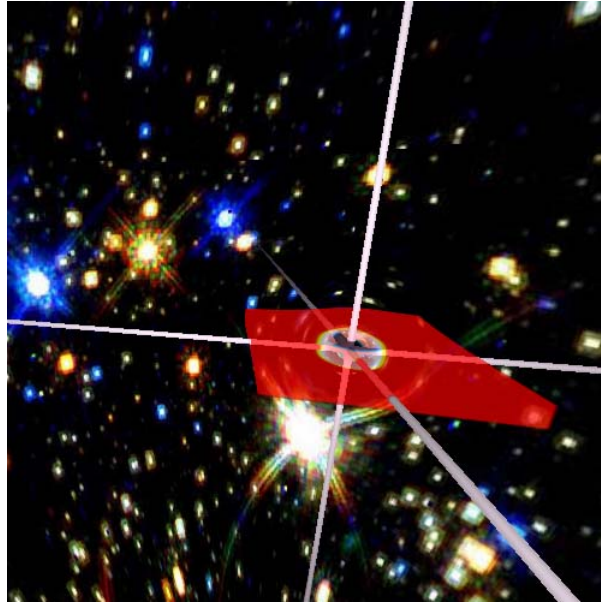


図 35 時空の曲率をボリュームレンダリングにより表現した例：球対称ブラックホールが存在する時空 ($r_g = 0.003$)

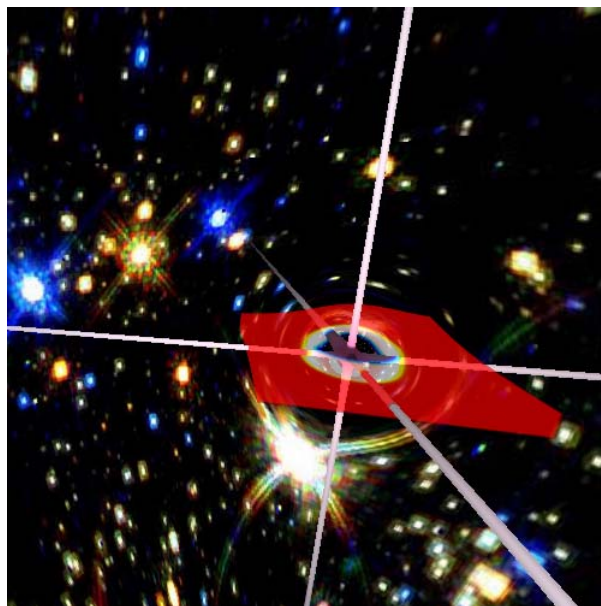


図 36 時空の曲率をボリュームレンダリングにより表現した例：球対称ブラックホールが存在する時空 ($r_g = 0.008$)

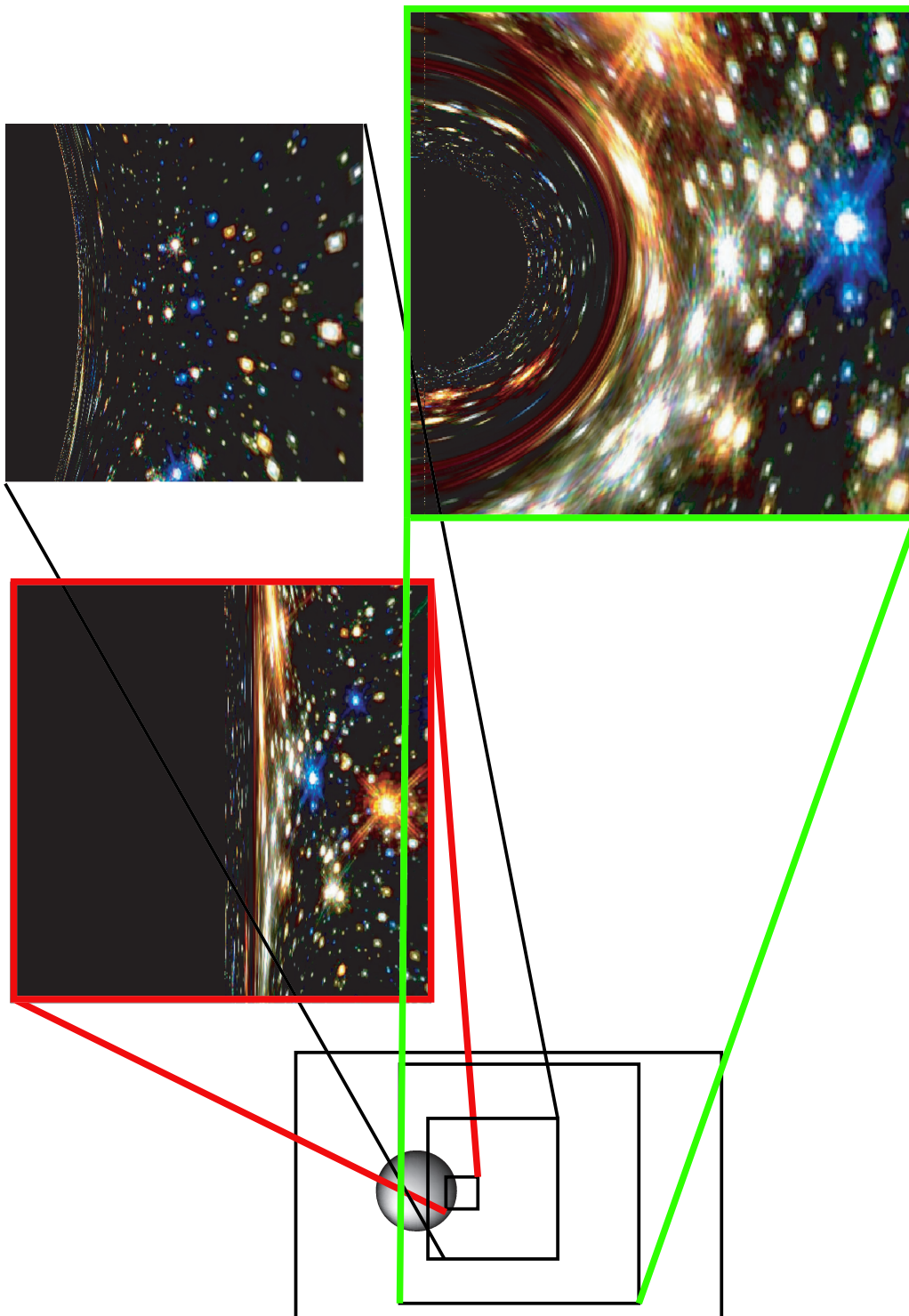


図 37 入れ子宇宙現象の可視化例

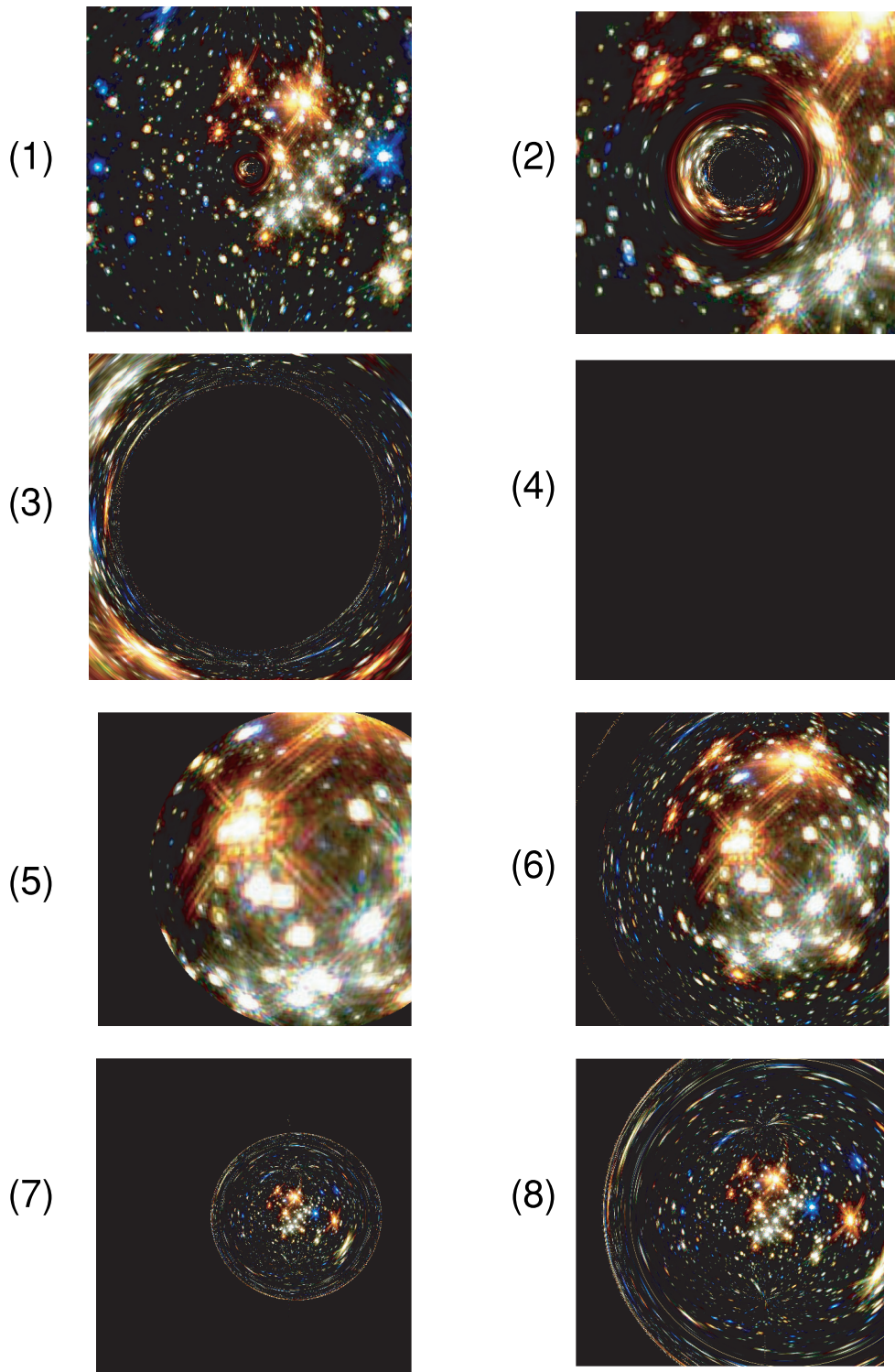


図 38 観測者がブラックホールを通過する時の観測画像

4.5 陰的な解法による結果及び重力場光線追跡法との比較

本節では、2章で述べた重力場光線追跡法、3章で述べた陰的な数値解法を用いるシンプレクティック・レイトレーシング、本章で述べた陽的な数値解法を用いるシンプレクティック・レイトレーシングの数値計算の精度と速度について考察する。

光線の一般的な軌道は解析的に計算することは難しいが、次のような特殊な状況では軌道が完全に決まる。ブラックホール半径を r_g とし、光線の発射地点は $r = 1.5r_g$ とする。そして発射方向を $r = 1.5r_g$ の球の表面に対し接線方向となるように光を発射すると、光線の軌道は $r = 1.5r_g$ の円となる。つまり原点からの距離 r が不変となることが理論的に計算できる。数值的に軌道を計算し、もし r が変化すれば、それは数値計算の誤差であると考えられる。

補助実験として、一連のCG作成に用いている Onyx2 上で市販ソフト *Mathematica* を実行し、説明した特殊な状況での数値計算結果を比較する。計算時間の測定には、*Mathematica* に内蔵されている Timing 関数を使用した。光線の軌道を計算し、原点からの距離と計算期間をグラフ化したのが図 39 である。ここで計算期間とは、一本の光線を少しずつ伸ばしながら追跡する伸ばす回数のことを指す。点線が陰的なシンプレクティック・レイトレーシングによる結果、実線が陽的なシンプレクティック・レイトレーシングによる結果、一点鎖線が重力場光線追跡法による結果である。ブラックホール半径 $r_g = 10.0$ 、計算の刻み幅は 0.9 とした。

陰的なシンプレクティック・レイトレーシングによる計算結果は、 $r = 1.5r_g$ から不変である。しかし計算時間は約 309 秒である。重力場光線追跡法による計算結果は、計算期間が 500 回を越える頃から r が小さくなる、つまりブラックホールに落ち込んでしまっている。計算期間 900 回まで計算した場合の計算時間は約 13 秒である。陽的なシンプレクティック・レイトレーシングによる計算結果は、 $r = 1.5r_g$ から揺らいでいるが、極端に離れることはない。揺れは小さく、CG 作成の際には無視できる範囲である。そして計算時間は約 10 秒であった。この結果より、球対称のブラックホール時空を可視化する際には陽的なシンプレクティック・レイトレーシング法が計算時間が短く、かつ長期間の光線追跡をしても誤差

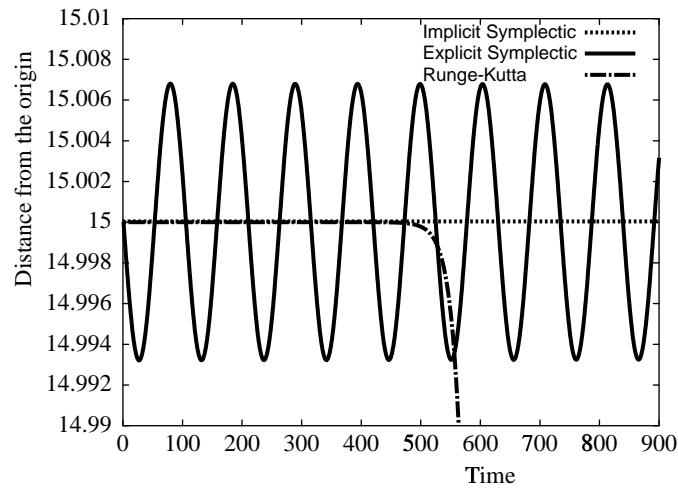


図 39 光線の軌道計算の比較例

は蓄積しないため、可視化の計算に適していると言える。ただし陰的なシンプレクティック・レイトレーシングでも、反復計算回数を減らして速く計算することも可能である。どの程度の精密さでどの程度まで誤差を抑えられるかについては、まだ分かっていない。

ここで三つの手法、(1) 重力場光線追跡法（測地線の微分方程式を Runge-Kutta 法で解く手法）、(2) 陰的シンプレクティック・レイトレーシング法（ハミルトンの正準方程式をガウス・ルジャンドル公式で解く手法）、(3) 陽的シンプレクティック・レイトレーシング法（ハミルトンの正準方程式を本論文で導いた陽的な式で計算する手法）のそれぞれの計算量を概算してみる。2.3 節で定義した光線の先端を一回伸ばすのに必要な計算量は、各手法の計算式より次のようになる。まず重力場光線追跡法では使用する微分方程式は式 (4)、数値的に解く手法は、式 (17) である。式 (4) は 4 つの式から成っており、式 (17) は各式を 4 回評価することを表しているため、合計で 16 回の計算が必要である。陰的シンプレクティック・レイトレーシング法では、使用する微分方程式は式 (6) であり 8 つの式から成っている。使う数値解法である式 (16) では、各式を (式の数 \times 反復回数 + 2) 回だけ計算する。式の数 は 8 で反復回数は数回から数百回まで変化する。従って陰的シンプレクティック・レイトレーシングの計算回数は最小でも約 30 回、最大で

表 2 レンダリング時間の比較

	ブラックホール無し	ブラックホール有り
重力場光線追跡法	1分36秒	1分38秒
陽的 SR	2分11秒	2分21秒
陰的 SR	1時間35分	1時間40分



図 40 100 × 100 画素の画像作成例

約 1000 回にもおよぶことがある。陽的シンプレクティック・レイトレーシングでは、使う式は式 (20) から式 (24) であり、式 (26) のように組み合わせて計算するので、式 (26) の段階での計算回数は 17 回である。そして 4 次のオーダにするために式 (27) のように式を 3 回評価すると計算回数は 51 回となる。従って各演算の計算速度や状況設定などを無視すると、重力場光線追跡法の方が計算回数が少ない。陰的シンプレクティック・レイトレーシングと陽的シンプレクティック・レイトレーシングでは、明らかに陽的な手法の方が計算量が少ない。実際に 100 × 100 画素の小さな画像を生成し、計算時間を比較したものが表 2 である。表ではシンプレクティック・レイトレーシング法を SR と略記している。生成される画像は、ブラックホールの無い平坦な時空とブラックホールの有る歪んだ時空で、それぞれ図 40 の左と右の画像である。全ての手法で、本研究で使用している sgi Onyx2 を用いて 13CPU の並列処理をしている。ブラックホール半径は $r_g = 1.0$ であり、数値計算の刻み幅は $\tau = 0.01$ である。この刻み幅は、手法を問わずほぼ同じ画像が生成されるだけ十分細かくとったものである。表 2 では重力



図 41 ハミルトニアン値の表示例

場光線追跡法のレンダリング時間が最も短くなっているが、ブラックホールの極近傍に光線がある場合に計算誤差によりブラックホールに陥り計算が打ち切られてしまうような状況が含まれていることも考慮して検討しなければならない。また本研究では、重力場光線追跡法は球対称ブラックホール時空のみが実装されており、平面上での光線追跡を仮定していることから（付録 A 参照）必然的に数値計算が有利になることも考慮すべきである。この実験では、手法により出力画像に目視で判別可能な違いは現れていない。そこでゼロになるべきのハミルトニアン値を表示したものが図 41 である。値がゼロから離れるに従って明るくなるように描画している。ハミルトニアンの保存を意識した手法では右の図のようにブラックホールが存在する場所以外の画素が黒くなっているが、重力場光線追跡法では左の図のようにブラックホール近傍でハミルトニアン値が変化していることが分かる。

結論として、3手法のうちのどれが優れているか、といった比較は出来ていない。数値計算手法が異なり解く方程式も異なるので単純に比較はできず、可視化対象が単純な球対称ブラックホールでは差が現れにくいからである。3章で確認したように、軸対称など球対称ブラックホールよりもエネルギーが強いブラックホールの場合、ブラックホール半径が同じでも時空の歪みが強くなる。従ってより複雑なブラックホール時空の可視化で比較した場合、図 41 の結果を考えると重力場光線追跡法における計算誤差の発生が可視化結果に影響してくる可能性がある。

4.6 結言

本章では、可視化対象を球対称ブラックホールに限定することで、高速かつ正確に対象を可視化可能な陽的なシンプレクティック・レイトレーシング法を提案した。そして陽的なシンプレクティック・レイトレーシング法を実装し、複数の提示方法で計算結果を可視化した。シンプレクティック・レイトレーシング法の光線の軌跡の計算部分を、陰的な手法から陽的な手法に変更したことで描画に要する計算速度が非常に速くなった。各種設定やパラメータにより全体の計算時間は大きく変化するが、概ね陰的シンプレクティック・レイトレーシング法よりも陽的シンプレクティック・レイトレーシング法の方が10倍から100倍の高速化になっている。重力場光線追跡法と陽的シンプレクティック・レイトレーシング法では計算速度の差は大きくは現れないが、シンプレクティック数値解析法を用いている以上、陽的シンプレクティック・レイトレーシング法の方が計算誤差が少ない。

本章で陽的なシンプレクティック・レイトレーシング法の式を導出することができたのは、球対称ブラックホール時空での光線の軌道を表すハミルトニアンが、運動量成分についての和の形になっていたからである。つまり各運動量は独立した項にあることに着目したと言える。一方、式(10)で表される軸対称ブラックホール時空の場合、最後の項で時間についての運動量成分 p_t と空間の ϕ 方向についての運動量成分 p_ϕ が一つの項の中にあるため、同じ方法での陽的な解法の導出は難しい。しかし、シンプレクティック・レイトレーシング法が重力場光線追跡法に比べて精度良く計算できるという利点は、軸対称ブラックホールのように球対称ブラックホールよりも強いエネルギーをもったブラックホールの場合にさらに大きく現れるのではないかと考えており、本研究の有効性をさらに詳しく調べるためには軸対称ブラックホール時空を対象とした陽的なシンプレクティック・レイトレーシング法の開発は必須だと思われる。

5. 結論

本研究では、相対論を意識しなくても直感的にブラックホールによって引き起こされる現象が理解できることを目的とした、ブラックホールの可視化手法を提案した。具体的には、従来から研究されてきた重力場光線追跡法を改良すると共に、全く新しい画像生成手法であるシンプレクティック・レイトレーシング法を提案した。

2章では、古くから提案されており、近年になって計算機上で実現されつつある重力場光線追跡法について考察した。まず実装に必要な数式を導き、次に実装してブラックホール時空を可視化し、計算速度と結果の正当性の検証方法について問題が残ることを確認した。

3章では、2章で確認された問題点を解決するためのシンプレクティック・レイトレーシング法を開発した。まず重力場光線追跡法には曲進する光線を追跡できるという利点がある一方で、相対論的に正しくない可視化結果を提示する可能性がある重大な問題点を指摘した。そしてハミルトン力学の理論に基づき、光線の追跡手法をシンプレクティック数値解析法が適用可能なように再構成した。また、実装しブラックホール時空の可視化結果を示した。

4章では、3章で提案した手法の計算コストを下げるための計算手法を提案した。一般的なシンプレクティック・レイトレーシング法はあらゆるブラックホール時空が可視化可能であるが、陰的な数値解法を用いるため安定度や精度が高い一方で計算コストが高い問題があった。そこで最も代表的なブラックホールである球対称のブラックホールを対象として、光線の軌跡を陽的に計算する手法を確立した。そして重力場光線追跡法、陰的なシンプレクティック・レイトレーシング法、陽的なシンプレクティック・レイトレーシング法を比較し、球対称なブラックホールを可視化対象にする場合は陽的なシンプレクティック・レイトレーシング法が最も優れていることを確認した。また、提案手法を実装してブラックホール時空の可視化結果を示し、重力レンズ効果や入れ子宇宙現象などブラックホール時空の様子を視覚的に示せることを確認した。

ブラックホールは物理学上の話題でありながら一般の人達の関心も高く、本研究が教育や科学の啓蒙に役立つと考えられる。また、重力レンズ天文学 [82] など

物理学や天文学への応用も考えられる。本研究により可視化とハミルトン系が結び付けられたので、相対論的な力学系の可積分性に関する研究 [83] に対して新たな研究手法を提案できるかもしれない。さらに、実際にブラックホール時空の可視化画像を一枚ずつ提示していくと、必ず自在に見渡したりパラメータを変化させたいという要求を受ける。従ってユーザインターフェースの改良や仮想環境への応用も残された課題である。また、本研究では観測者は静止しているという仮定があった。観測者を含めてブラックホール時空内でオブジェクトが高速に移動しているような状況を可視化することも興味深い課題である。誤差を蓄積させない数値計算法という観点からも、本研究で中心となったシンプレクティック数値解析法の他にもシンメトリック数値解析法 [84]、離散変分法 [85] など多くの手法が提案されてきており、検討の余地がある。

科学的可視化の分野では、可視化用のソフトウェアが普及したおかげで逆に可視化に関する新しい話題が少なくなってきたという指摘がある [86]。しかし歪んだ空間が対象となるブラックホール時空の可視化については、従来の光の直進性を仮定している CG 作成ソフトウェアがほとんど使えないために、まだまだ研究の課題が残されていると言える。

謝辞

本研究を行う機会を与えて頂き、研究の全過程において直接懇切なる御指導御鞭撻を賜ったソフトウェア基礎講座 横矢 直和 教授に心より感謝申し上げます。

本研究の全過程を通して、終始有益な御助言と励ましの言葉を頂いた像情報処理学講座 千原 國宏 教授 に厚く御礼申し上げます。

本研究の遂行にあたり、終始的確な御助言と励ましの言葉を頂いた情報科学センター 湊 小太郎 教授 に深く感謝致します。

本研究の全過程を通して、直接懇切なる御指導御鞭撻を賜ったソフトウェア基礎講座 竹村 治雄 助教授に心より感謝申し上げます。

本研究について様々な御助言、御指導を与えて下さった元 ソフトウェア基礎講座 岩佐 英彦 助手 およびソフトウェア基礎講座 山澤 一誠 助手 に厚く御礼申し上げます。

本研究を始めるそもそものきっかけを与えて頂き、機会ある毎に様々な御助言と励ましの言葉を与えて下さった大阪教育大学 天文学教室 福江 純 助教授 および筑波大学 電子・情報工学系 山下 義行 助教授 に深く感謝申し上げます。

最後に、私の生活を支えて下さり研究する時間を与えて下さった学校法人永井学園 浅井 康徳 専務理事 及び株式会社アジア・ユナイテッド・コンピューティング の社員の皆様に感謝します。

参考文献

- [1] K. C. Cheng. A history of flow visualization: Chronology. In *Proc. Flow Visualization and Image Processing*, pp. 21–34, 1997.
- [2] S. Liebes. Gravitational lenses. *Physical Review*, Vol. 133, No. 3B, pp. 835–844, 1964.
- [3] S. Refsdal. The gravitational lens effect. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, No. 128, pp. 295–306, 1964.
- [4] B. H. McCormick, T. A. DeFanti, and M. D. Brown (eds.). Visualization in scientific computing. *Computer Graphics*, Vol. 21, No. 6, 1987.
- [5] N. Max. *Turning a Sphere Inside Out*. Geometry Center, 1977.
- [6] C. Gunn and D. Maxwell. *Not Knot*. Geometry Center, 1977.
- [7] R. P. Grzeszczuk, M. Huang, and L. H. Kasuffman. Physically-based stochastic simplification of mathematical knots. *IEEE Trans. Visualization and Computer Graphics*, Vol. 3, No. 3, pp. 262–272, 1997.
- [8] T. v. Walsum and F. H. Post. Selective visualization of vector fields. Technical report, Delft University of Technology. Report 94-06.
- [9] S. K. Ueng, C. Sikorski, and K. L. Ma. Efficient streamline, streamribbon, and streamtube constructions on unstructured grids. *IEEE Trans. Visualization and Computer Graphics*, Vol. 2, No. 2, pp. 100–110, 1996.
- [10] L. Hesselink, Y. Levy, and Y. Lavin. The topology of symmetric second-order 3d tensor fields. *IEEE Trans. Visualization and Computer Graphics*, Vol. 3, No. 1, pp. 1–11, 1997.
- [11] R. M. Ford and R. N. Strickland. Representing and visualizing fluid flow images and velocimetry data by nonlinear dynamical systems. *Graphical Models and Image Processing*, Vol. 57, No. 6, pp. 462–482, 1995.

- [12] W. E. Lorensen. Marching through the visible man. In *Proc. IEEE Visualization'95*, pp. 368–373, 1995.
- [13] L. J. Rosenblum (eds.). Visualization blackboard: Graphic voyages through the universe. *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 14, No. 6, pp. 7–11, 1994.
- [14] L. J. Rosenblum (eds.). Visualization blackboard: Visualizing black hole space-times. *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 13, No. 1, pp. 12–14, 1993.
- [15] J. Bernholc. Computational materials science: The era of applied quantum mechanics. *Physics Today*, Vol. 52, No. 9, pp. 30–35, 1999.
- [16] A. Einstein. 特殊および一般「相対性理論」について（金子務訳）. 白揚社, 1991.
- [17] G. Gamov. *Mr. Tompkins in Wonderland*. Cambridge University Press, 1940.
- [18] M. L. Boas. Apparent shape of large objects at relativistic speeds. *American J. Physics*, Vol. 29, No. 5, pp. 283–286, 1961.
- [19] R. A. Goldstein and R. Nagel. 3-d visual simulation. *Simulation*, Vol. 23, No. 6, pp. 25–31, 1971.
- [20] T. Whitted. An improved illumination model for shaded display. *Commun. ACM*, Vol. 23, No. 6, pp. 343–349, 1980.
- [21] 西村仁志, 出口弘, 辰巳敏一, 河田享, 白川功, 大村皓一. コンピュータグラフィックスシステム links-1 における並列処理の性能評価. 電子通信学会論文誌, Vol. J68-D, No. 4, pp. 733–740, 1985.

- [22] J. Salmon and J. Goldsmith. A hypercube ray-tracer. In *Proc. 3rd Conf. Hypercube Concurrent Computers and Applications*, Vol. 2, pp. 1194–1206, 1988.
- [23] 村田誠治, 權五鳳, 村上和彰, 富田眞治. 『熱視線』: 視線探索法を高速処理する専用並列レンダリング・マシン—マクロパイプラインの各ステージにおける命令レベル並列処理—. 並列処理シンポジウム JSPP 論文集, pp. 109–116, 1991.
- [24] D. Badouel, K. Bouatouch, and T. Priol. Distributing data and control for ray tracing in parallel. *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 14, No. 4, pp. 69–77, 1994.
- [25] T.-Y. Lee and J. B. Nicholas. Parallel implementation of ray-tracing algorithm on the intel delta parallel computer. In *Proc. 9th International Parallel Processing Symposium*, pp. 688–692, 1995.
- [26] P.-K. Hsiung and R. H. P. Dunn. Visualizing relativistic effects in spacetime. In *Proc. Supercomputing'89*, pp. 597–606, 1989.
- [27] P.-K. Hsiung, R. H. Thibadeau, C. B. Cox, R. H. P. Dunn, M. Wu, and P. A. Olbrich. Wide-band relativistic doppler effect visualization. In *Proc. Visualization'90*, pp. 83–92, 1990.
- [28] P.-K. Hsiung and R. H. Thibadeau. Spacetime visualization of relativistic effects. In *Proc. 8th Ann. Computer Science Conference*, pp. 236–243, 1990.
- [29] W. Gekelman, J. Maggs, and L. Xu. Rel-time relativity. *Computers in Physics*, Vol. 5, No. 4, pp. 372–385, 1991.
- [30] M.-C. Chang, F. Lai, and W.-C. Chen. Image Shading Taking into Account Relativistic Effects. *ACM Trans. Graphics*, Vol. 15, No. 4, pp. 265–300, 1996.

- [31] 山下義行. ブラック・ホールのコンピュータグラフィックス:光線追跡法の曲がった4次元時空への拡張. 情処学論, Vol. 30, No. 5, pp. 642–651, 1989.
- [32] S. Bryson. Virtual spacetime: An environment for the visualization of curved spacetimes via geodesic flows. In *Proc. Visualization'92*, pp. 291–298, 1992.
- [33] 山下義行. 一般相対論的4次元時空における幾何モデリングの汎用的手法. 第54回情処全大, Vol. 4, pp. 221–222, 1997.
- [34] 山下義行. 一般相対論に基づくコンピュータグラフィックス. *Visual Computing グラフィックスとCAD 合同シンポジウム'98*, pp. 97–102, 1998.
- [35] 山下義行. 相対性理論のコンピュータグラフィックス. 日本物理学会誌, Vol. 53, No. 11, pp. 819–825, 1998.
- [36] H.P. Nollert, U. Kraus, and H. Ruder. Visualization in curved spacetimes. i. visualization of objects via four-dimensional ray-tracing. In *Relativity and Scientific Computing*, chapter 16. Springer-Verlag Berlin, 1996.
- [37] M. Berger, T. Trout, and N. Levit. Ray tracing mirages. *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 10, No. 3, pp. 36–41, 1990.
- [38] 齋藤泰, 牧野光則, 大石進一. レイトレーシング法を用いた異方性不均質透明体の表現. 信学論, Vol. J76-D-II, No. 8, pp. 1755–1762, 1993.
- [39] 佐藤哲, 岩佐英彦, 竹村治雄, 横矢直和. 物体の相対論的運動の重力場光線追跡法による可視化. 信学技報 IE95-126, 1996.
- [40] J. Amanatides. Ray tracing with cones. In *Proc. SIGGRAPH'84*, pp. 129–135, 1984.
- [41] P. S. Heckbert and P. Hanrahan. Beam tracing polygonal objects. In *Proc. SIGGRAPH'84*, pp. 119–127, 1984.
- [42] M. Watt. Light-water interaction using backward beam tracing. In *Proc. SIGGRAPH'90*, pp. 377–385, 1990.

- [43] H. W. Jensen and P. H. Christensen. Efficient simulation of light transport in scenes with participating media using photon maps. In *Proc. SIGGRAPH'98*, pp. 311–320, 1998.
- [44] M. Chen and J. Arvo. Perturbation methods for interactive specular reflections. *IEEE Trans. Visualization and Computer Graphics*, Vol. 6, No. 3, pp. 253–264, 2000.
- [45] J.-H. Chuang and W.-J. Hwang. A new space subdivision for ray tracing csg solids. *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 15, No. 6, 1995.
- [46] 青野雅樹, 大淵竜太郎, 伊藤貴之. 写実的レンダリングの基礎技術と最近の話題. *情報処理*, Vol. 38, No. 3, pp. 203–208, 1997.
- [47] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Co., 1973.
- [48] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, 1973.
- [49] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [50] 富田憲二. 相対性理論. 丸善, 1990.
- [51] 佐藤文隆, 小玉英雄. 一般相対性理論. 岩波書店, 1992.
- [52] R. M. Wald. *General Relativity*, pp. 470–471. The University of Chicago Press, 1984.
- [53] M. B. Allen III and E. L. Isaacson. *Numerical Analysis for Applied Science*, chapter 7 (Ordinary Differential Equations), pp. 349–394. John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [54] 松島与三. 多様体入門. 裳華房, 1965.
- [55] 野水克巳. 現代微分幾何入門. 裳華房, 1981.

- [56] 日本色彩学会. 色彩科学ハンドブック. 東京大学出版会, 1980.
- [57] 名取亮. 数値解析とその応用. コロナ社, 1990.
- [58] 岩崎洋一. 専用並列計算機による「場の物理」の研究 (研究課題番号 08np0101) . 平成4年度~8年度 科学研究費補助金 (創成的基礎研究費) 研究成果報告書, 1997.
- [59] E. Gröller. Nonlinear ray tracing: Visualizing strange worlds. *The Visual Computer*, Vol. 11, pp. 263–274, 1995.
- [60] 中尾充弘, 山本野人. 精度保証付き数値計算. 日本評論社, 1998.
- [61] 伊理正夫, 藤野和建. 数値計算の常識. 共立出版株式会社, 1985.
- [62] W. H. Enright, D. J. Higham, B. Oweren, and P. W. Sharp. A survey of the explicit Runge-Kutta method. Technical Report 291/94, Dept. Computer Science, Univ. of Toronto, 1995.
- [63] W. B. Hayes and K. R. Jackson. Global error measures for large n-body simulations. Technical report, Dept. Computer Science, Univ. of Toronto, 1996.
- [64] L. F. Shampine, R. C. Allen Jr., and S. Pruess. *Fundamentals of Numerical Computing*. John Wiley & Sons, Inc., 1997.
- [65] J.M. Sanz-Serna. Symplectic intergrators for Hamiltonian problems: An overview. *Acta Numerica*, Vol. 1, pp. 243–286, 1991.
- [66] H. Yoshida. Recent progress in the theory and application of symplectic integrators. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 56, pp. 27–43, 1993.
- [67] 佐藤文隆. 相対論と宇宙論, pp. 119–128. サイエンス社, 1981.

- [68] J. Foster and J. D. Nightingale. 一般相対論入門 (原哲也訳) . 吉岡書店, 1990.
- [69] E. Kasner. Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations. *American Journal of Mathematics*, Vol. 43, pp. 217–221, 1921.
- [70] A. K. Raychaudhuri. Cosmic strings in general relativity. *Physical Review D*, Vol. 41, No. 10, pp. 3041–3046, 1990.
- [71] P. Saha and S. Tremaine. Long-term planetary integration with individual time steps. *Astron. J.*, Vol. 108, No. 5, pp. 1962–1969, 1994.
- [72] K. Oohara. Numerical relativity. In *Proc. Numerical Astrophysics Using Supercomputers*, pp. 61–69, 1996.
- [73] K. C. B. New, K. Watt, C. W. Misner, and J. M. Centrella. Stable 3-level leapfrog integration in numerical relativity. *Physical Review D*, Vol. 58, No. 6 (064022), 1998.
- [74] 山本義隆, 中村孔一. 解析力学 I, pp. 303–305. 朝倉書店, 1998.
- [75] D. I. Pullin and P. G. Saffman. Long-time symplectic integration: The example of four-vortex motion. *Proc. Royal Society of London Series A*, Vol. 432, pp. 481–494, 1991.
- [76] B. O'Neill. カー・ブラックホールの幾何学 (井川 俊彦訳) . 株式会社トッパン, 1996.
- [77] 前田茂. シンプレクティック写像の応用について—ハミルトン系の離散版. 応用数理, Vol. 8, No. 3, pp. 30–39, 1998.
- [78] B.M. Jensen. Null geodesics around a Kerr Black Hole.
<http://www.astro.ku.dk/~milvang/RelViz/>, 1996.
- [79] 大貫義郎, 鈴木増雄, 柏太郎. 経路積分の方法, pp. 174–197. 岩波書店, 1992.

- [80] H. Yoshida. Construction of higher order symplectic integrators. *Physical Letter A*, Vol. 150, pp. 262–268, 1990.
- [81] ニュートン編集部. ブラックホールと宇宙. ニュートン, Vol. 11, No. 2, pp. 54–81, 1991.
- [82] 表實. 重力レンズで見る宇宙の姿. 数理科学, Vol. 30, No. 9, pp. 41–46, 1992.
- [83] 曾田康秀, 鈴木慎吾, 前田恵一. 相対論の中のカオス. 数理科学, Vol. 32, No. 9, pp. 36–42, 1992.
- [84] G. D. Quinlan. Resonances and instabilities in symmetric multistep methods. Technical report, astro-ph/9901136, 1999.
- [85] 降旗大介, 森正武. 偏微分方程式に対する差分スキームの離散的分による統一的導出. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 8, No. 3, pp. 317–340, 1998.
- [86] 藤井孝藏. CFDにおける可視化処理. 日本航空宇宙学会誌, Vol. 44, No. 509, pp. 379–385, 1996.
- [87] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. 場の古典論 (広重徹, 恒藤敏彦訳). 東京図書, 1964.
- [88] 佐藤光. 群と物理, pp. 55–56. 丸善株式会社, 1992.

研究業績

学術論文誌

1. 佐藤 哲, 岩佐 英彦, 竹村 治雄, 横矢 直和, “シンプレクティック・レイトレーシング: ブラックホール時空での光線追跡”, 情報処理学会論文誌, Vol. 42, No. 3, March 2001. (本論文 3 章に関連)
2. 佐藤 哲, 岩佐 英彦, 竹村 治雄, 横矢 直和, “高速シンプレクティック・レイトレーシング: 入れ子宇宙の可視化”, 情報処理学会論文誌 (条件付き採録). (本論文 4 章に関連)

国際会議 (査読付き)

1. Tetsu Satoh, Hidehiko Iwasa, Haruo Takemura and Naokazu Yokoya, “Visualization of Black Hole Based on Computational Relativistic Fluid Dynamics”, *Proceedings of the 1st Pacific Symposium on Flow Visualization and Image Processing*, pp. 712–717, Honolulu, February 1997.

研究会・シンポジウム

1. 佐藤 哲, 岩佐 英彦, 竹村 治雄, 横矢 直和, “物体の相対論的運動の重力場光線追跡法による可視化”, 電子情報通信学会画像工学研究会技術報告, IE95-126, February 1996. (本論文 2 章に関連)
2. 佐藤 哲, 竹村 治雄, 横矢 直和, “ブラックホール時空でのシンプレクティック・レイトレーシング”, 情報処理学会ハイパフォーマンスコンピューティング研究会研究報告, 2000-HPC-83-1, October 2000. (本論文 4 章に関連)

全国大会

1. 佐藤 哲, 岩佐 英彦, 竹村 治雄, 横矢 直和, “Regge 多様体による重力場方程式の数値計算”, 第 51 回情報処理学会全国大会講演論文集 (1), pp. 33–34, September 1995.
2. 佐藤 哲, 岩佐 英彦, 竹村 治雄, 横矢 直和, “重力場光線追跡法のための光の軌道と波長の計算法”, 電子情報通信学会 1996 年総合大会論文集, D-645, March 1996. (本論文 2 章に関連)
3. 佐藤 哲, 岩佐 英彦, 竹村 治雄, 横矢 直和, “4 次元円柱型線素を持つ擬リーマン多様体のストリームリボンによる可視化”, 第 54 回情報処理学会全国大会講演論文集 (4), pp. 71–72, September 1997.
4. 佐藤 哲, 岩佐 英彦, 竹村 治雄, 横矢 直和, “シンプレクティック・レイ・トレーシングによるブラックホールの可視化”, 第 59 回情報処理学会全国大会特別セッション (2) 講演論文集, pp. 69–74, September 1999. (本論文 3 章に関連)
5. 佐藤 哲, 岩佐 英彦, 竹村 治雄, 横矢 直和, “シンプレクティック・レイ・トレーシング: 曲がった光線によるブラックホールの可視化”, 日本応用数理学会 1999 年度会講演予稿集, pp. 120–121, October 1999. (本論文 3 章に関連)
6. 河合 裕文, 松宮 雅俊, 佐藤 哲, 山澤 一誠, 竹村 治雄, 横矢 直和, “弾性体のバネモデルの粗密表現による計算量削減手法”, 日本バーチャルリアリティ学会第 5 回大会論文集, pp. 229–232, September 2000.
7. 佐藤 哲, 竹村 治雄, 横矢 直和, “ブラックホール時空でのシンプレクティック・レイ・トレーシングの高速化”, 日本応用数理学会 2000 年度会講演予稿集, pp. 594–595, October 2000. (本論文 4 章に関連)
8. 佐藤 哲, 竹村 治雄, 横矢 直和, “ブラックホール時空内でのシンプレクティック・レイ・トレーシング”, 電気関係学会関西支部連合大会講演論文集,

G367, November 2000. (本論文4章に関連)

表彰

1. 2000年 情報処理学会, 第59回全国大会大会奨励賞

付録

A. ブラックホール時空での光線の運動方程式の導出

ブラックホール時空では，直線の方程式は次のような測地線の微分方程式に拡張される．

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \quad (\text{A.1})$$

変分原理，最小作用の原理によると，質量を持つ物体，質量がゼロの光子のいずれも運動の軌跡はこの方程式に従う [87]．式 (A.1) 中のクリストッフェル記号は，計量テンソル g_{ij} を用いて次のように定義される．

$$\Gamma_{ki}^l = \frac{1}{2} g^{lm} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \quad (\text{A.2})$$

計量テンソル g_{ij} は，時空の微少線素と呼ばれる量

$$ds^2 = g_{kl} dx^k dx^l \quad (\text{A.3})$$

により定義され，相対論においては最も基本的な量である．アインシュタインの重力場方程式を用いて球対称なブラックホール時空での計量テンソルを求めると，次のようになる．

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

この計量テンソルはシュヴァルツシルト解と呼ばれる．式 (A.4) を式 (A.2) に代入し，さらにその結果を式 (A.1) に代入すると次のような光線の運動方程式が得られる．

$$\frac{dt}{ds} = c_1 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{c_2^2}{r^3} \left(1 - \frac{3r_g}{2r}\right) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{c_2}{r^2} \quad (\text{A.7})$$

ここでは球対称時空の性質より、 $\theta = \pi/2$ の平面上に限定しても一般性は失われないことを利用している。 c_1, c_2 は $s = 0$ の初期値により決定される積分定数で、付録 (E) において導出する。

B. 球対称ブラックホール時空での陽的なシンプレクティック数値解法（1次）の導出

球対称のブラックホール時空での光線の軌道を表すハミルトニアンは、次式のように表される（本文中の式 (9) と同じ）。

$$H = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{p_t^2}{2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{p_r^2}{2} - \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{p_\phi^2}{2r^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{B.1})$$

このハミルトニアンは、運動量成分について4項の和の形になっているとみなすことができる。

そこで、まず第一項を

$$H_1 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{p_t^2}{2} \quad (\text{B.2})$$

とおくと、ハミルトンの正準方程式 (6) で右辺がゼロにならない式は

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = + \frac{\partial H_1}{\partial p_t} = \frac{p_t}{1 - r_g/r} \\ \frac{dp_r}{ds} = - \frac{\partial H_1}{\partial r} = \frac{r_g p_t^2}{2(r - r_g)^2} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

の二つである。そして左辺を差分で置き換えるオイラー法を適用すると、

$$\begin{cases} t(s + \Delta s) = t(s) + \Delta s \frac{p_t}{1 - r_g/r} \\ p_r(s + \Delta s) = p_r(s) + \Delta s \frac{r_g p_t^2}{2(r - r_g)^2} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

という1次の解法が得られる。そしてこの解法は、ハミルトニアン H_1 が表す、変数が t と p_r のみの位相空間の中での解析解になっており、シンプレクティック性を保存する写像となっている。同様に、第2項は括弧を展開して

$$H_2 = -\frac{p_r^2}{2} \quad (\text{B.5})$$

及び

$$H_3 = \frac{r_g p_r^2}{r} \quad (\text{B.6})$$

と置くと、

$$r(s+\Delta s) = r(s) + \Delta s p_r(s) \quad (\text{B.7})$$

及び

$$\begin{cases} p_r(s+\Delta s) = p_r(s) \sqrt[3]{\frac{3}{2} r_g \frac{p_r(s)}{r(s)^2} \Delta s + 1} \\ r(s+\Delta s) = r(s) \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2} r_g \frac{p_r(s)}{r(s)^2} \Delta s + 1} \right)^2 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

が、それぞれの位相空間での解析解として得られる。全く同様に、

$$H_4 = -\frac{p_\theta^2}{2r^2} \quad (\text{B.9})$$

及び

$$H_5 = -\frac{p_\phi^2}{2r^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{B.10})$$

から、

$$\begin{cases} p_r(s+\Delta s) = p_r(s) - \Delta s \frac{p_\theta(s)^2}{r(s)^3} \\ \theta(s+\Delta s) = \theta(s) - \Delta s \frac{p_\theta(s)}{r(s)^2} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

及び

$$\begin{cases} p_r(s+\Delta s) = p_r(s) - \Delta s \frac{p_\phi(s)^2}{r(s)^3 \sin^2 \theta(s)} \\ p_\theta(s+\Delta s) = p_\theta(s) - \Delta s \frac{\cos \theta(s) p_\phi(s)^2}{r(s)^2 \sin^3 \theta(s)} \\ \phi(s+\Delta s) = \phi(s) - \Delta s \frac{p_\phi(s)}{r(s)^2 \sin^2 \theta(s)} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

が解として得られる。

ところで、正準方程式の解はハミルトニアン H に対応する微分作用素 D_H を導入して形式的に

$$z(\tau) = e^{\tau D_H} z(0) \quad (\text{B.13})$$

と書けることが知られている [66]。つまり、 $e^{\tau D_H}$ という項が

$$e^{\tau D_H} : z(0) \mapsto z(\tau) \quad (\text{B.14})$$

という写像を意味する。また、ハミルトニアンが複数の項の和である場合、例えば $H = A + B$ であるなら

$$z(\tau) = e^{\tau(D_A + D_B)} z(0) \quad (\text{B.15})$$

となる。従ってハミルトニアン (B.1) に対応する解は

$$z(\tau) = e^{\tau(D_{H_1} + D_{H_2} + D_{H_3} + D_{H_4})} z(0) \quad (\text{B.16})$$

である。式 (B.16) は、式 (B.14) を考慮すると、式 (B.1) から導出されるハミルトンの正準方程式が解析的に解けた場合の表現である。しかし解析解を求めることは不可能なので、

$$e^{\tau(D_{H_1} + D_{H_2} \dots)} = e^{\tau f(D_{H_1})} e^{\tau g(D_{H_2})} \dots \quad (\text{B.17})$$

のように分解することにより、真の解を近似する手法が一般的である。

ところで、 D_{H_1}, D_{H_2}, \dots は微分作用素なので一般に非可換であり、

$$e^{D_{H_1} + D_{H_2}} = e^{D_{H_1}} e^{D_{H_2}} \quad (\text{B.18})$$

とは限らない。例えば3項の場合、 $e^A e^B e^C = e^Z$ となる Z はリー群論における Campbell-Hausdorff の公式により

$$\begin{aligned} Z = & A + B + C + \frac{1}{2} ([A, B] + [A, C] + [B, C]) \\ & + \frac{1}{12} ([A, [A, B]] + [A, [A, C]] + \dots) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

となる。ここで、大括弧は

$$[A, B] \equiv AB - BA \quad (\text{B.20})$$

で定義される括弧積である。括弧積には次のような性質があり、しばしばリー代数の定義に用いられる [88].

1. $[xA + yB, C] = x[A, C] + y[B, C]$ ただし $x, y \in R$ (双線形性)
2. $[A, B] = -[B, A]$ (反対称性)
3. $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (ヤコビの恒等式)

Campbell-Hausdorff の公式を用いると,

$$e^{\tau(D_{H_1}+D_{H_2}+D_{H_3}+D_{H_4})} = e^{\tau D_{H_1}} e^{\tau D_{H_2}} e^{\tau D_{H_3}} e^{\tau D_{H_4}} + O(\tau^2) \quad (\text{B.21})$$

となり, これは式 (B.4), 式 (B.7), 式 (B.8), 式 (B.11), 式 (B.12) の順に評価することが 1 次のオーダーの打ち切り誤差を持つ解の近似計算になることを示している.

C. 2 次の陽的な解法の導出

ハミルトニアンが 5 項の和の式の場合の近似式 (B.21) を展開するために,

$$S(\tau) = e^{\tau(A+B+C+D+E)} \quad (\text{C.1})$$

とおく. 簡単のために, D_{H_1} を A , D_{H_2} を B などと書く. 対称分解 [79] と呼ばれる手法を用いて $S(\tau)$ を τ について 2 次近似するために,

$$S(\tau) = e^{v\tau A} e^{w\tau B} e^{x\tau C} e^{y\tau D} e^{z\tau E} e^{y\tau D} e^{x\tau C} e^{w\tau B} e^{v\tau A} + O(\tau^3) \quad (\text{C.2})$$

とおいて, 2 次まで近似可能となる係数 (v, w, x, y, z) を計算する. すると, 式 (B.19) より

$$S(\tau) = e^{\tau R_1 + \tau^2 R_2 + \tau^3 R_3 \dots} + O(\tau^3) \quad (\text{C.3})$$

と書けることが分かる. ここで, $R_1 = 2vA + 2wB \dots + zE$, $R_2 = 1/2([vA, wB] + [vA, xC] \dots)$, そして R_3 は $[A, [A, B]]$ など 2 重の括弧積から構成される項の和である. ここで,

$$S(-\tau) = e^{-v\tau A} e^{-w\tau B} e^{-x\tau C} e^{-y\tau D} e^{-z\tau E} e^{-y\tau D} e^{-x\tau C} e^{-w\tau B} e^{-v\tau A} \quad (\text{C.4})$$

となることを考えると，対称性を持たせたことにより

$$S(\tau)S(-\tau) = 1 \quad (\text{C.5})$$

となることが分かる．これは，

$$e^{v\tau A}e^{-v\tau A} = e^{v\tau A - v\tau A} = 1 \quad (\text{C.6})$$

など，非可換な微分演算子が自分自身とは可換と考えられることから導ける．すると，式 (C.3) を用いると

$$S(\tau)S(-\tau) = e^{\tau^2 R_2 + \tau^4 R_4 + \dots} = 1 \quad (\text{C.7})$$

であるから， $R_2 = R_4 = R_6 = \dots = 0$ であることが分かる．従って τ について 1 次まで元の式 (C.1) と一致していれば，自動的に 2 次までも一致する．よって

$$\begin{aligned} S(\tau) &= e^{v\tau A} e^{w\tau B} e^{x\tau C} e^{y\tau D} e^{z\tau E} e^{y\tau D} e^{x\tau C} e^{w\tau B} e^{v\tau A} \\ &= e^{\tau R_1 + \tau^3 R_3 + \dots} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

が τ について 1 次の項まで元の式 (C.1) と一致するには R_1 のみ考慮すれば良く， $R_1 = 2vA + 2wB + 2xC + 2yD + zE$ と式 (C.1) より

$$2v = 1$$

$$2w = 1$$

$$2x = 1$$

$$2y = 1$$

$$z = 1$$

が条件となる．つまり，

$$S(\tau) = e^{\frac{1}{2}\tau A} e^{\frac{1}{2}\tau B} e^{\frac{1}{2}\tau C} e^{\frac{1}{2}\tau D} e^{z\tau E} e^{\frac{1}{2}\tau D} e^{\frac{1}{2}\tau C} e^{\frac{1}{2}\tau B} e^{\frac{1}{2}\tau A} \quad (\text{C.9})$$

は式 (C.1) を 2 次のオーダで近似する解法となる．

D. 4 次の陽的な解法の導出

本節では、吉田 [80] のアプローチで 2 次の数値解法から 4 次の数値解法を構成する。前節と同様に対称分解を考え、

$$S_4(\tau) = S(d_1\tau)S(d_2\tau)S(d_1\tau) \quad (\text{D.1})$$

が、式 (C.1) を τ について 4 次まで近似するような係数を探す。式 (C.8) より

$$S(d_1\tau) = e^{d_1\tau R_1 + d_1^3\tau^3 R_3 \dots} \quad (\text{D.2})$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_4(\tau) &= S(d_1\tau)S(d_2\tau)S(d_1\tau) \\ &= e^{d_1\tau R_1 + d_1^3\tau^3 R_3 \dots} e^{d_2\tau R_1 + d_2^3\tau^3 R_3 \dots} e^{d_1\tau R_1 + d_1^3\tau^3 R_3 \dots} \\ &= e^{(2d_1 + d_2)\tau R_1 + (2d_1^3 + d_2^3)\tau^3 R_3 \dots} \end{aligned}$$

となり、これが式 (C.1) と τ について 4 次の項まで一致するための条件は

$$\begin{cases} 2d_1 + d_2 = 1 \\ 2d_1^3 + d_2^3 = 0 \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

である。式 (D.3) は 3 つの解を持つが、実数のものは次の一組である。

$$\begin{cases} d_1 = \frac{4 + 2^{2/3} + 2^{4/3}}{6} \\ d_2 = -\frac{(1 + 2^{1/3})^2}{3} \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

この定数を用いて式 (D.1) を評価することが 4 次のシンプレクティックな陽的な数値解法となる。ただし式 (D.4) では、 $d_1 = 1.3512\dots$ 、 $d_2 = -1.7024\dots$ でともに $|d_1|, |d_2| \geq 1$ であり、方程式の解が符号が変化するなど不連続性を持つ近辺では τ の値によっては精度が落ちることがある。その場合、

$$S_4(\tau) = S(d_1\tau)S(d_2\tau)S(d_3\tau)S(d_4\tau)S(d_5\tau)S(d_4\tau)S(d_3\tau)S(d_2\tau)S(d_1\tau) \quad (\text{D.5})$$

などと分解する数を増やせば良い。この場合、 $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = a$, $d_5 = b$ と
おくと、同様に4次の解法となる条件として

$$\begin{cases} 8a + b = 1 \\ 8a^3 + b^3 = 0 \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

が得られ、解は

$$\begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

となる。明らかに $|a|, |b| \leq 1$ であり、こちらを用いる方が計算は安定する。しかし式(D.5)で示されるだけ計算量が増える。

E. 初期値問題

重力場光線追跡法で用いられる測地線の微分方程式でも、シンプレクティック・
レイトレーシング法で用いられるハミルトンの正準方程式においても、方程式の
初期値はニュートン力学のようにすぐに与えられるわけではなく、数値相対論に
おける初期値問題と呼ばれている。ある座標 (r, θ, ϕ) から方向 (v_x, v_y, v_z) に向け
て光線を発射しようとする場合、方向ベクトルを歪んだ座標系での成分に変換し
なければならない。ここでは、球対称ブラックホール時空での方向ベクトルの変
換方法について述べる。

まず、計量テンソルの定義式及びハミルトニアン拘束条件より、速度の大きさ
の拘束条件が導かれる。

$$c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \quad (\text{E.8})$$

大きさ1に正規化された方向ベクトル (v_x, v_y, v_z) から条件を満たす $(dr, d\theta, d\phi)$ を
求めるためには、共形変換という手法を用いる。まず、通常の座標系 (x, y, z) ある
いは (r, θ, ϕ) に加えて、共形変換により得られる座標系 (X, Y, Z) あるいは (R, θ, ϕ)
を考える。二つの座標系は

$$r = R \left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^2 \quad (\text{E.9})$$

という変換式で結ばれる． $r > 0$ 及び $(1 - r_g/4R)^2 > 0$ なので $R > 0$ であり， $R > 0$ なら $(1 + r_g/4R)^2 > 1$ なので常に $r > R$ である．従って (R, θ, ϕ) 座標系は (r, θ, ϕ) 座標系を原点を中心に $(1 + r_g/4R)^2$ だけ縮小した空間である．変換式の両辺を微分すると

$$r' = \left(1 + \frac{r_g}{4R}\right) \left(1 - \frac{r_g}{4R}\right) R' \quad (\text{E.10})$$

なので， $R > 0$ と仮定しても $R = r_g/4$ の地点で R' の値は定まらなくなる．しかしシュバルツシルトの外部解は $r > r_g$ を対象としており， r と R の大小関係が崩れることはない．

変換後の線素は

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{r_g}{4R}\right)^2}{\left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^2} c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^4 (dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{E.11})$$

であり，光に関しては $ds^2 = 0$ であるから，次のように変形することができる．

$$\frac{\left(1 - \frac{r_g}{4R}\right)^2}{\left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^6} c^2 dt^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (\text{E.12})$$

右辺は $dX^2 + dY^2 + dZ^2$ であるから，速度の満たすべき式は次のようになる．

$$\frac{\left(1 - \frac{r_g}{4R}\right)^2}{\left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^6} c^2 = \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2 \quad (\text{E.13})$$

この拘束条件は，次のようにおくことで満たすことができる．

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\left(1 - \frac{r_g}{4R}\right)}{\left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^3} c v_x \quad (\text{E.14})$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\left(1 - \frac{r_g}{4R}\right)}{\left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^3} c v_y \quad (\text{E.15})$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\left(1 - \frac{r_g}{4R}\right)}{\left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^3} c v_z \quad (\text{E.16})$$

(x, y, z) 空間と (X, Y, Z) 空間はスケーリングの違いで角度が保たれるので， (v_x, v_y, v_z) の示す方向と (dX, dY, dZ) の示す方向は等しい．また， R は次式にて与えられる．

$$R = \frac{1}{4} \left(2r \left(1 + \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \right) - r_g \right) \quad (\text{E.17})$$

R は r より計算でき、 θ や ϕ は不変なので、 $(dr, d\phi, d\theta)$ が R 及び (v_x, v_y, v_z) から計算できれば良い。 (R, θ, ϕ) 空間での極座標変換を考えると、各成分の微分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} dR &= dX \sin \theta \cos \phi + dY \sin \theta \sin \phi + dZ \cos \theta \\ &= c \frac{1 - \frac{r_g}{4R}}{\left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^3} (v_x \sin \theta \cos \phi + v_y \sin \theta \sin \phi + v_z \cos \theta) \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{\cos \theta \cos \phi}{R} dX + \frac{\cos \theta \sin \phi}{R} dY - \frac{\sin \theta}{R} dZ \\ &= c \frac{1 - \frac{r_g}{4R}}{\left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^3} \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{R} v_x + \frac{\cos \theta \sin \phi}{R} v_y - \frac{\sin \theta}{R} v_z \right) \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

$$\begin{aligned} d\phi &= -\frac{\sin \phi}{R \sin \theta} dX + \frac{\cos \phi}{R \sin \theta} dY \\ &= c \frac{1 - \frac{r_g}{4R}}{\left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^3} \left(-\frac{\sin \phi}{R \sin \theta} v_x + \frac{\cos \phi}{R \sin \theta} v_y \right) \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

dr は、式 (E.17) 及び式 (E.18) より次のように計算できる。

$$\begin{aligned} dr &= \left(1 - \frac{r_g}{4R}\right) \left(1 + \frac{r_g}{4R}\right) dR \\ &= \left(1 - \frac{r_g}{4R}\right) \left(1 + \frac{r_g}{4R}\right) c \frac{1 - \frac{r_g}{4R}}{\left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^3} (v_x \sin \theta \cos \phi + v_y \sin \theta \sin \phi + v_z \cos \theta) \\ &= c \left(1 - \frac{r_g}{4R}\right)^2 \left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^{-2} (v_x \sin \theta \cos \phi + v_y \sin \theta \sin \phi + v_z \cos \theta) \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

これらの式より、重力場光線追跡法の場合もシンプレクティック数値解析の場合も初期値が定まる。まず、重力場光線追跡法の場合、光線の運動を2次元平面上に限ると、初期値として与えなければならないのは積分定数 c_1 と c_2 である。始めに

$$\frac{dt}{ds} = \frac{c_1}{1 - r_g/r} \quad (\text{E.22})$$

を c_1 の定義式と考え、パラメータ s を $t \rightarrow \infty$ で t に一致するようにとると $c_1 = 1$ となる。次に

$$c_2 = R^2 \left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^4 \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{ds} \quad (\text{E.23})$$

より

$$c_2 = cR \left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^3 \left(1 - \frac{r_g}{4R}\right)^{-1} (-\sin \phi v_x + \cos \phi v_y) \quad (\text{E.24})$$

が定まる.

シンプレクティック数値解析の場合, 同様に

$$p_\theta = -cR \left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^3 \left(1 - \frac{r_g}{4R}\right)^{-1} (\cos \theta \cos \phi v_x + \cos \theta \sin \phi v_y - \sin \theta v_z) \quad (\text{E.25})$$

及び

$$p_\phi = -cR \sin \theta \left(1 + \frac{r_g}{4R}\right)^3 \left(1 - \frac{r_g}{4R}\right)^{-1} (-\sin \phi v_x + \cos \phi v_y) \quad (\text{E.26})$$

が初期値となる. p_r は式 (E.21) より計算できる.

F. 幾何単位系

本論文では, 幾何単位系を用いて単位の記述を省略することが多い. 幾何単位系は, 光速 c と重力定数 G を 1 とおいて時間と重さの次元を消し, 全て長さの次元で表す単位系であり, 通常的一般相対性理論の文献では普通に用いられている.

ある量 u の次元を $[u]$ で表すことにすると, まず $[c] = [LT^{-1}] = 1$ より時間は $[t] = [T] = [L]$ となり長さと同じ次元になる. 次に $[G] = [L^3 M^{-1} T^{-2}] = 1$ より, $[T] = [L]$ となったことを考慮して $[M] = [L]$ を得る. これらの式から幾つかの通常の単位系と幾何単位系の対応をまとめると図 F のようになる.

幾何単位系から通常の単位系の大きさを求めるときは, 1 とおいた式を逆に解くことになる. 例えば, $[c] = [LT^{-1}]$ より $[T] = [Lc^{-1}]$ なので, 幾何単位系で時間 t とは通常の単位系で記述すると $t/c = t \times 3.0 \times 10^{-10} \text{s}$ という値になる. また, 本論文ではブラックホール半径 r_g という量がブラックホールの強さを表す重要なパラメータとして頻出する. r_g は半径という言葉が使われているが, ブラックホールの質量に対応していて重さの次元を持つパラメータである. 従って幾何単位系でブラックホール半径が r_g であると言う時, 通常の単位系では $[G/c^2] = [LM^{-1}]$ より $[M] = [Lc^2/G]$ であり, $r_g c^2/G = r_g \times 9.0 \times 10^{20} \times 6.67 \times 10^8 = r_g \times 6.003 \times 10^{29} g$ という量を表していることになる. 従って本論文中で, ブラックホール半径 $r_g = 1.0$

単位	通常の次元	幾何単位系の次元
長さ	L	L
時間	T	L
重さ	M	L
速度	LT^{-1}	1
加速度	LT^{-2}	L^{-1}
力	$LT^{-2}M$	L^{-2}
エネルギー	$L^2T^{-2}M$	L

図 42 通常の単位系と幾何単位系

や $r_g = 0.001$ といった値が使われているが、通常の単位系での長さと考えると 10 の 29 乗といった相当大きな量を扱っていることになる。