NAIST-IS-DT9661002

博士論文

複数の仕様を満足する制御系の**LMI**を用いた設計法

大形 明弘

1999年2月8日

奈良先端科学技術大学院大学
情報科学研究科 情報システム学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に
博士 (工学) 授与の要件として提出した博士論文である。

大形 明弘

審査委員： 西谷 紘一 教授
高橋 豊 教授
小笠原 司 教授
山下 裕 助教授

複数の仕様を満足する制御系の LMI を用いた設計法*

大形 明弘

内容梗概

線形行列不等式（Linear Matrix Inequalities）を用いる制御系設計法は凸計画問題に帰着でき、大域的な最適解を高速に求めることができることから、一般に普及しつつある。しかし、LMI に帰着できない制御系設計問題も多く、こうした問題に対する解法が現在活発に研究されている。

複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を、LMI を用いて設計する場合、各仕様に対応した LMI の共通解を求めるのが普通である。これは、LMI の共通解を求める問題が凸計画問題に帰着できることによる。しかし、各仕様に対応した LMI が共通解をもつことは、複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための十分条件にすぎない。複数の仕様を同時に満たす定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための必要十分条件は双線形行列不等式 (Bilinear Matrix Inequalities) であらわされ（あるいは、LMI と非凸な制約式との系であらわされ)、LMI に等価変換することはできない。

本研究では、複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための必要十分条件を直接解くアルゴリズムを提案した。この必要十分条件は、パラメータ空間（LMI の変数の空間）において、ゲイン行列に対応した線形部分空間（同一のゲイン行列を与える変数の集合）が、各仕様に対応した LMI の解集合と、それぞれ交わることである。提案したアルゴリズムは、ゲイン行列に対応した線形部分空間を、各仕様に対応した LMI の解集合と線形部分空間との距離に基づいて探索するものである。対象システムの状態数と入力数がともに 1 で

---

*奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報システム学専攻 博士論文, NAIST-IS-DT9661002, 1999 年 2 月 8 日.

ある特別な場合について、アルゴリズムの理論的な解析をおこない、アルゴリズムが必ず収束すること、もし解が存在するならば、初期値を解の十分近くに選べば必ず解に収束することを示した。この結果から、対象システムの状態数と入力数がともに1である特別な場合については、このアルゴリズムによって、もし解が存在するならば、十分条件を満たす解が存在しないときにも、初期値を適当に選べば、解を見い出すことができることがわかる。

提案したアルゴリズムが、制御系の設計法として有効であることを示すために、2つの制御対象について数値実験をおこなった。第1の制御対象は、制御系のベンチマーク問題として知られる倒立振子である。まず、振子軸の粘性摩擦係数と台車駆動系の等価粘性摩擦係数が不確かである場合に、閉ループ系の固有値の範囲を保証するロバスト制御系を設計した。不確かなパラメータの範囲を分割し、各区画で固有値の範囲を保証するLMIをつくった。すべてのLMIの共通解から求めたゲイン行列よりも、提案したアルゴリズムで求めた、すべてのLMIが共通解をもたないときのゲイン行列の方が、より大きな不確かさに耐え得ることを確認した。次に、倒立振子に対する制御仕様として、減衰率と入力に関する制限をそれぞれ与え、この2つの仕様を満たすゲイン行列を求めた。入力の上限値を固定したとき、各仕様に対応するLMIの共通解から求めたゲイン行列よりも、提案したアルゴリズムで求めた、LMIに共通解が存在しないときのゲイン行列の方が、より大きな減衰率が得られることを確認した。第2の制御対象は吸収冷凍機である。物理モデルから得られた非線形システムを微分包含で近似して制御系設計用モデルをつくり、制御仕様として、すべての動作点で安定性と入力に対する制限が満たされること、1つの動作点（平均的な動作点）で減衰率に対する制限が満たされ、かつ負荷変動から出力変化への L_2 ゲインが最小であることという2つの仕様を与え、これらの仕様を満たすゲイン行列を求めた。入力の上限値と減衰率の下限値を固定したとき、各仕様に対応するLMIの共通解から求めたゲイン行列よりも、提案したアルゴリズムで求めた、LMIが共通解をもたないときのゲイン行列の方が、より小さな L_2 ゲインが得られることを確認した。これらの数値実験から、提案したアルゴリズムは、従来法に較べてよりよい制御性能をもつ制御系を設計する、有効な手段であることを確認した。

キーワード

複数仕様, 線形行列不等式 (LMI), 双線形行列不等式 (BMI), 非凸制約, 非線形性, ロバスト制御, 倒立振子, 吸収冷凍機

Design of A Controller to Satisfy Multiple Specifications via LMI*

Akihiro Ogata

Abstract

Once a specification for a controller is described as an LMI, the controller satisfying this specification can be obtained easily because finding a solution of an LMI can be reduced to a convex programming problem. This is the reason why LMI is considered to be a powerful tool for controller design. However, if multiple specifications are given for a controller, the controller design problem cannot be reduced to a convex programming problem. This is because even if each specification is described as an LMI, the condition that guarantees all specifications are satisfied by a controller is formulated as an equation with a non-convex solution set. If all LMIs have a common solution, a controller satisfying all specifications can be obtained through convex programming because the condition is satisfied automatically. The aim of this study is to develop an algorithm to find a constant state feedback gain matrix satisfying multiple specifications formulated as LMIs that lack a common solution.

In the space of LMI's variables, the set of variables reduced to a gain matrix is a set of a class of linear subspaces. A gain matrix satisfying all of the specifications exists if and only if the solution set of the LMI for each specification intersects a linear subspace of the class. The algorithm developed finds such a linear subspace of the class by the way similar to the alternating projection method, which is

*Doctor's Thesis, Department of Information Systems, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, NAIST-IS-DT9661002, February 8, 1999.

used to find the common point of multiple convex sets. Our algorithm examines whether a linear subspace of the class intersects all of the solution sets or not. If the linear subspace does not intersect a solution set, the point nearest the linear subspace is found in the solution set. A linear subspace that includes this point is chosen from the class and examined in the next step.

The algorithm is analyzed theoretically for the special case in which the system has one state variable and one input. In this case, it is proved that the algorithm converges regardless of the initial value and that it finds a solution if the initial value is set close enough to the solution.

The algorithm is also examined through simulations for the case in which the system has multiple state variables. First, a robust control problem of an inverted pendulum is solved with the algorithm. In the design problem, the range of the parameter is divided into regions, and to stabilize the closed loop system for each region is considered as a specification. It is shown that a stabilizing controller for a wider parameter range can be found using the algorithm rather than the convex programming approach of finding a common solution of LMIs. Second, another controller design problem for an inverted pendulum is solved with the algorithm. Two specifications, one for the control input and one for the decay rate of the closed loop system, are given for the controller. It is shown that for a fixed range of the input a larger decay rate is achieved with the controller obtained through the algorithm than with the controller obtained through the convex programming approach. Third, the algorithm solves the disturbance rejection problem of an absorption heat pump system. In the design problem, the effect of the variation of the cooling load (disturbance) on the temperature of the supply water (output) is measured by the L_2 gain. Because minimizing the L_2 gain from the disturbance to the output leads to a high-gain and a small decay rate controller, a specification for the input range and a specification for the decay rate need to be added. It is shown that a lower L_2 gain is achieved with the controller obtained through the algorithm than with the controller obtained through the convex programming approach.

These results proved the effectiveness of the algorithm.

Keywords:

multiple specifications, linear matrix inequlities (LMI), bilinear matrix inequlities (BMI), non-convex constraints, nonlinearity, robust control, inverted pendulum, absorption heat pump

目 次

図目次

表目次

1. 序論

数学史に線形行列不等式（LMI）が初めて現れたのは、リャプノフが線形常微分方程式の解の安定性を、今日リャプノフ不等式と呼ばれるLMIで調べることを提案したときである。そして、LMIが制御系の設計との関連で研究されだしたのが、1940年代からである。1980年代始めにはLMIを解く問題が凸計画問題であることが認識された。さらに、1980年代の終りに内点法を用いたLMIの高速解法が開発され、LMIを用いた制御系の設計法は、実用的な設計法として制御研究者の注目を集めることになった。1994年には、それまでの成果が1冊の本 [1] にまとめられ、LMIを用いた制御系の設計法は、一般に知られることになった。最近、MATLABのLMI Toolboxなどの LMIの数値計算パッケージソフトが発売されるにいたって、LMIは制御系を設計する手段として定着した感がある。

近年、LMIが制御理論の研究に急速に取り入れられたのは、LMIが次のような特徴をもっていたからだと考えられる。

- LMIを解く問題は凸計画問題に帰着できるので、大域的最適解を求めることができ、さらに、内点法などによって高速に解を求めることができる。
- 制御理論、回路理論、信号処理などの分野の基礎的な結果と深い結びつきがあり、これまでの諸結果を統一的に把握することができる。

しかし、制御系設計問題がすべてLMIであらわされるわけではない。制御系設計問題は一般に双線形行列不等式 (BMI) であらわされ、その一部がLMIに等価変換される。これまでは、主にLMIに等価変換される制御系設計問題の研究がおこなわれてきたが、最近の研究は、LMIに等価変換されない制御系設計問題に移行しつつある。これは対象とする問題が、凸性をもつ問題から、凸性をもたない問題へ移行している、ということもできる。

LMIに等価変換できない制御問題を解こうとする研究の流れは2つある。一つはBMIの局所的な最適解を求めるアルゴリズムを用いるものである [3]。この一般性をもった方法に対して、問題ごとに、その特徴を利用した解法を研究する流れがある。これには次のような研究がある。

- パラメータ依存 LMI を有限個の LMI で近似する方法の研究 [25][27]
- 次数制約つきの制御系設計問題に対する反復射影法の応用の研究 [5]
- 多数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めるための探索アルゴリズムの研究 [19]

3つのうちの後の2つは幾何学的な方法をもちいている。本研究は、多数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めるための幾何学的な解法の研究に属する。

これまでに、多数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めるために提案されているアルゴリズムは、理論的な解析がおこなわれておらず、いくつかの数値例で解が得られることを示しているにすぎない。本研究の目的は、多数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求める問題に対して、理論的な裏付けのあるアルゴリズムを開発することである。

本論文の構成は次の通りである。第2章では LMI の定義を述べ、制御系の設計仕様を LMI であらわす方法を説明する。第3章では複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を LMI を用いて求める問題を説明し、この問題を解くためのアルゴリズムを提案する。第4章と第5章は、提案したアルゴリズムの有効性を示す数値実験の結果である。まず、第4章では倒立振子の制御系を設計した結果を、次に、第5章ではプロセス制御への応用として、吸収冷凍機の制御系を設計した結果を示す。最後に結論を述べる。付録では、複数の仕様を満たす定数状態フィードバック行列を求めるための他のアルゴリズムを挙げ、本研究で提案するアルゴリズムとの比較をおこなう。

2. LMI を用いた制御系の設計

この章では LMI を用いて制御系を設計する方法について述べる。

2.1 LMI

線形行列不等式 (LMI) は、ベクトル $x = [x_1, x_2, \cdots, x_l]^T \in \Re^l$ を変数として含む行列 $F(x)$ について、次のようにあらわされる。

$$F(x) > 0 \tag{1}$$

上式の不等号は $F(x)$ が正定値であることをあらわしている。このとき、$F(x)$ は x に対してアフィンな形をしていることを仮定する。すなわち、

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{l} x_i F_i$$

また、ここで $F_i\ (i = 1, \cdots, l)$ は対称行列であることを仮定する。

次に、LMI を用いた基本的な問題形式について述べる。式 (1) を満たす x を求める問題を**線形行列不等式問題**と呼ぶ。$F(x)$ は実対称行列であるからその固有値は実数であり、式 (1) と $F(x)$ の固有値に関する不等式

$$\lambda_{min}(F(x)) > 0$$

は等価である。ただし、$\lambda_{min}(\cdot)$ は対称行列の最小固有値をあらわすものとする。したがって、線形行列不等式問題を解くには、

$$f(x) = -\lambda_{min}(F(x)) \tag{2}$$

を x について最小化し、その結果 $f(x) < 0$ となる解 x を求めればよいことになる。$f(x)$ は凸関数であるので、$f(x)$ を最小化する問題は凸計画問題になる。

次の形式で与えられる問題は**固有値問題**と呼ばれ、やはり、凸計画問題に帰着できることが知られている [1]。

$$\text{minimize } c^T x$$

$$\text{subject to } F(x) > 0$$

ただし、$c \in R^{1\times n}$ である。

2.2 制御系に対する設計仕様の LMI を用いた表現

制御系の設計仕様を LMI で表現することができる。

2.2.1 ノミナル性能

制御対象は次式であらわされるものとする。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_w w + B_u u, \\ y &= Cx + D_w w + D_u u, \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、$x \in \Re^n, u \in \Re^m, w \in \Re^l, y \in \Re^k$ はそれぞれシステムの状態、入力、外乱、出力をあらわす。また、A, B_w, B_u, C, D_w, D_u はそれぞれ適当な次元の定数行列である。

安定化可能性　ある $m \times n$ 型行列 K に対して、システム (3) が定数状態フィードバック $u = Kx$ によって安定化できるための必要十分条件は、次式を満たす、n 次正定対称行列 P と $m \times n$ 型行列 Y が存在することである。

$$AP + PA^T + B_u Y + Y^T B_u^T < 0$$

上式に解が存在するとき、その解 P, Y から仕様を満たすフィードバックゲイン行列は $K = YP^{-1}$ によって計算される。

L_2 ゲイン　ある $m \times n$ 型行列 K に対して、システム (3) が定数状態フィードバック $u = Kx$ によって、外乱 w から出力 y への L_2 ゲインを、ある正数 γ より小さくできるための必要十分条件は、次式を満たす、n 次正定対称行列 P と $m \times n$ 型行列 Y が存在することである[1]。

$$\begin{bmatrix} AP + PA^T + B_u Y + Y^T B_u^T + B_w B_w^T & (CP + D_u Y)^T \\ CP + D_u Y & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

[1] 入力から出力への L_2 ゲインが有界であるとき、システムは安定である。したがって、この式を満たす P, Y が存在すれば、システムは状態フィードバック $u = Kx$, $K = YP^{-1}$ によって安定化される。

ただし、I は n 次の単位行列である。

上式に解が存在するとき、その解 P, Y から仕様を満たすフィードバックゲイン行列は $K = YP^{-1}$ によって計算される。

2.2.2 ロバスト性能

制御対象は次式であらわされる線形時変システムであるとする。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B_w(t)w + B_u(t)u, \\ y &= C(t)x + D_w(t)w + D_u(t)u, \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} A(t) & B_w(t) & B_u(t) \\ C(t) & D_w(t) & D_u(t) \end{bmatrix} \in \Omega,\ for\ all\ t \geq 0.$$

ただし、

$$\Omega = Co\left\{ \begin{bmatrix} A_1 & B_{w1} & B_{u1} \\ C_1 & D_{w1} & D_{u1} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} A_L & B_{wL} & B_{uL} \\ C_L & D_{wL} & D_{uL} \end{bmatrix} \right\}$$

ここで、$A_1, B_{w1}, B_{u1}, C_1, D_{w1}, D_{u1}, \cdots, A_L, B_{wL}, B_{uL}, C_L, D_{wL}, D_{uL}$ はそれぞれ A, B_w, B_u, C, D_w, D_u と同じ次元の定数行列である。また、Co は集合の凸包をあらわす。Ω は行列ポリトープと呼ばれる。このとき、式 (4) は微分包含と呼ばれるものの一種である。

安定化可能性　ある $m \times n$ 型行列 K に対して、システム (4) が定数状態フィードバック $u = Kx$ によって安定化できるための必要十分条件は、次式を満たす、n 次正定対称行列 P と $m \times n$ 型行列 Y が存在することである。

$$A_iP + PA_i^T + B_{ui}Y + Y^TB_{ui}^T < 0,\ i = 1, \cdots, L$$

上式に解が存在するとき、その解 P, Y から仕様を満たすフィードバックゲイン行列は $K = YP^{-1}$ によって計算される。

L_2ゲイン　ある $m \times n$ 型行列 K に対して、システム (4) が定数状態フィードバック $u = Kx$ によって、外乱 w から出力 y への L_2 ゲインを、ある正数 γ より小さくできるための必要十分条件は、次式を満たす、n 次正定対称行列 P と $m \times n$ 型行列 Y が存在することである[2]。

$$\begin{bmatrix} A_iP + PA_i^T + B_{ui}Y + Y^TB_{ui}^T + B_{wi}B_{wi}^T & (C_iP + D_{ui}Y)^T \\ C_iP + D_{ui}Y & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0,\ i = 1, \cdots, L$$

ただし、I は n 次の単位行列である。

上式に解が存在するとき、その解 P, Y から仕様を満たすフィードバックゲイン行列は $K = YP^{-1}$ によって計算される。

2.3　大域的線形化

非線形システムを線形時変システムとしてモデル化し、LMI を解くことによって、制御系を設計することができる。

非線形システムを線形システムで近似するために、通常、ある定常点の周りでテーラー展開し、2 次以上の項を無視する、という方法がとられる。このような線形化の方法は局所的であるといわれる。これに対して大域的線形化と呼ばれる方法がある。この方法について説明する。

次式の非線形システムを対象にする。

$$\dot{x} = f(x, u, w) \tag{5}$$

$$y = g(x, u, w) \tag{6}$$

この非線形システムに対して、次のような線形時変システムを考える。

$$\dot{x} = A(t)x + B_w(t)w + B_u(t)u \tag{7}$$

$$y = C(t)x + D_w(t)w + D_u(t)u \tag{8}$$

[2]前注と同様。

ここで、

$$\begin{bmatrix} A(t) & B_w(t) & B_u(t) \\ C(t) & D_w(t) & D_u(t) \end{bmatrix} \in \Omega$$

この線形時変システム (7)(8) の解軌道の集合が、非線形システム (5)(6) の解軌道の集合をすべて含むための条件は次式で示される [1]。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial w} & \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix} \in \Omega, \text{ for all } x, w, u$$

$$\begin{aligned} f(0,0,0) &= 0 \\ g(0,0,0) &= 0 \end{aligned}$$

この条件が成立するとき、線形時変システム (7)(8) はもとの非線形システム (5)(6) を大域的に線形化しているという。

線形システム (7)(8) は不確かさをもったシステム (4) とみなすことができ、Ω が行列ポリトープであらわされるとき、2.2.2節の方法で制御系を設計することができる。

3. 複数の仕様を満足する制御系の設計

3.1 背景

ある仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための必要十分条件を行列不等式で記述すると、双線形行列不等式 (Bilinear Matrix Inequality: BMI) になることが多い。しかし、BMI の解集合は一般に非凸であることから、大域的最適解を求めることは困難である [24]。BMI の局所的最適解を求めるアルゴリズムはいくつか提案されている [3]。BMI は LMI へ等価変換できる場合もあるが、いつでもそうであるとは限らない。

複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための必要十分条件については等価な LMI の存在が知られていない [24]。この必要十分条件はランク条件をともなった LMI に等価変換可能であることが示されている [18]。次数制約のあるコントローラの設計問題に現れる特別な形のランク条件つき LMI 問題については、局所的最適解を求めるアルゴリズムがいくつか提案されている [2][4][5][8] が、これらを複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求める問題に直接適用することは困難である（文献 [5] の方法を試みた例を付録 A.2に示す)。一方、BMI の十分条件を LMI であらわし、LMI を解くことによって解を得ることができる。しかしこの場合には、すべての仕様を満たすゲイン行列が存在しても求まらないことがある [16]。複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めるために、ゲイン行列の存在をあらわす必要十分条件を直接解くアルゴリズムも提案されている [19]。この方法は複数の仕様に対して共通のゲイン行列を得るために、ランク条件のかわりに幾何的な条件を用いており、本質的には凸計画問題となる特別な場合に解が得られることが示されている。しかし、一般の場合の解への収束性は示されていない（文献 [19] の方法と本研究で開発したアルゴリズムとの比較を付録 A.1に示す)。

本論文では、複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めるために、ゲイン行列の存在をあらわす必要十分条件を直接解く新しいアルゴリズムを提案する。この方法は文献 [19] と同様に複数の仕様に対して共通のゲイン行列を得るために、ランク条件のかわりに幾何的な条件を用いる。文献 [19] の方法

に較べてアルゴリズムの構成が単純なので、理論的な解析が容易であり、対象システムの状態数と入力数がともに1の特別な場合についてではあるが、アルゴリズムの収束性と、局所的な解への収束性を示すことができる。

3.2 複数の仕様を満足する定数状態フィードバックゲイン行列を求める問題

この節では、複数の仕様を満足する定数状態フィードバックゲイン行列を求める問題がどのような問題なのかを説明する。

3.2.1 記号

ここでは、以下の説明で用いる記号を定義する。

n 次対称行列 P と $m \times n$ 型の行列 Y の組 (P, Y) の全体を Σ であらわす。さらに、

$$\Sigma^+ \triangleq \{(P, Y) \in \Sigma : P > 0\}$$

とする。任意の $m \times n$ 型の行列 K に対して、線形部分空間 $L(K) \subset \Sigma$ を次のように定義する。

$$L(K) \triangleq \{(P, Y) \in \Sigma : Y = KP\} \tag{9}$$

$L(K)$ 全体の集合を $\mathcal{L}$ であらわす。

$$\mathcal{L} \triangleq \{L(K) : K \in \Re^{m \times n}\}$$

$Z_1 = (P_1, Y_1), Z_2 = (P_2, Y_2) \in \Sigma$ の距離 $d(Z_1, Z_2)$ を次で定義する。

$$d(Z_1, Z_2) \triangleq \left\| \begin{bmatrix} P_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \right\|_F$$

ここで、$\|\cdot\|_F$ は行列のフロベニウスノルムをあらわす。Σ の任意の閉集合 S_1, S_2 に対して、S_1 と S_2 の距離 $d(S_1, S_2)$ を次で定義する（実際の計算法は付録B.2参照）。

$$d(S_1, S_2) \triangleq \min_{Z_1 \in S_1, Z_2 \in S_2} d(Z_1, Z_2)$$

$n = m = 1$ のとき Σ^+ は $p > 0$ の半平面であり ($n = m = 1$ のとき P, Y をそれぞれ p, y と書くことにする)、$\mathcal{L}$ の元は Σ の原点を通る直線である。このとき、y 軸の負の部分を Σ の角の基準軸とする。$L \in \mathcal{L}$ に対して、$L \bigcap \Sigma^+$ がこの基準軸となす角を $\Theta(L)$ であらわす。また、$\theta \in [0, \pi]$ に対して、$\Theta(L) = \theta$ となる $L \in \mathcal{L}$ を $\Lambda(\theta)$ であらわす。

3.2.2 問題の定式化

システム (10) に対して、N 個の制御仕様 $\mathcal{S}_i (i = 1, \cdots, N)$ が与えられているとする。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{10}$$

ここで、$x \in \Re^n$ は状態変数、$u \in \Re^m$ は入力、$y \in \Re^k$ は出力であり、A, B, C は定数行列である。さらに、仕様 $\mathcal{S}_i$ を実現する定数状態フィードバックのゲイン行列 K_i が次の LMI を満たす $(P_i, Y_i) \in \Sigma^+$ から、$K_i = Y_i P_i^{-1}$ によって求まるとする。

$$F_i(P_i, Y_i) < 0 \ (i = 1, \cdots, N) \tag{11}$$

仕様 $\mathcal{S}_i$ をあらわす LMI の解集合を C_i とする。

$$C_i \triangleq \{(P, Y) \in \Sigma^+ : F_i(P, Y) < 0\} \ (i = 1, \cdots, N)$$

一般に LMI の解集合は凸集合であるので、$C_i \ (i = 1, \cdots, N)$ は凸集合である。すべての仕様が同一のゲイン行列によって実現されるのは式 (11) を満たす $(P_i, Y_i) \in \Sigma^+ \ (i = 1, \cdots, N)$ が、さらに次式を満たすときである。

$$Y_1 P_1^{-1} = \cdots = Y_N P_N^{-1} \tag{12}$$

すべての仕様を実現する定数状態フィードバックゲイン行列を求めるには、式 (11) を非凸な制約 (12) のもとで解かなければならない。したがって、この問題の大域的な解を求めるのは困難である。

式 (11)(12) に解が存在することは、次式を満たす $m \times n$ 型行列 K が存在することと等価である [16]。

$$L(K) \bigcap C_i \neq \emptyset \ (i = 1, \cdots, N) \tag{13}$$

次式が成立することは、式 (13) をみたす K が存在するための十分条件になっている。

$$\bigcap_{i=1}^{N} C_i \neq \emptyset \tag{14}$$

もし、式 (14) が成立するならば、左辺の任意の要素を (P_0, Y_0) とすると、ゲイン行列は $K = Y_0 P_0^{-1}$ と求まる。(P_0, Y_0) を求める問題は LMI の実行可能解の一つを求める問題であり、凸計画問題として、容易に求めることができる（2.1節参照)。しかし、一般に式 (14) が成立しない場合でも、複数の制御仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列が存在する可能性がある。本論文では式 (13) を満足する K を直接求める一つのアルゴリズムを提案する。このアルゴリズムを制御系設計に用いることによって、式 (14) にもとづいて、凸最適化法で設計した場合よりも、よりよい制御性能を達成できることを第 4,5章で示す。

3.3 複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列計算法

この節では、複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を、その存在の必要十分条件から求めるために、本研究で開発したアルゴリズムを説明する。

3.3.1 アルゴリズム

問題 空間 Σ^+ に 2 つの錐ではない閉凸集合 C_1, C_2 がある。

$$C_1 \bigcap L(K) \neq \emptyset \text{ かつ } C_2 \bigcap L(K) \neq \emptyset$$

となるような K が存在するか。存在するならば、そのような K を 1 つ求めよ。

説明を簡単にするために、$N = 2$ とした。C_1, C_2 はそれぞれ仕様 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ に対応した LMI の解集合である。C_1, C_2 が錐ではないこと、および閉集合であること、という条件は C_1, C_2 と $L(K)$ の間の距離の定義を意味のあるものにするために必

要である。C_1 あるいは C_2 が凸錐である場合には、十分に小さな正数 ϵ を用いて、式 (11) を $F_i(P_i, Y_i) + \epsilon I \leq 0$ で置き換えることによって、凸錐ではない凸集合に変換する。I は単位行列をあらわす。C_1 あるいは C_2 が開集合である場合も同様に、式 (11) を $F_i(P_i, Y_i) + \epsilon I \leq 0$ で置き換えることによって、閉集合に変換する。

アルゴリズム　C_2 の任意の点を (P_0, Y_0) とし、$K_0 = Y_0 P_0^{-1}$ とする。

- Step 1　(初期化) :

  $k := 1$ とする。また、$L_2^{(0)} := L(K_0)$ とする。

- Step 2　(C_1 と交わる $\mathcal{L}$ の元の決定) :

  $L_2^{(k-1)}$ に最も近い C_1 の点を $Q_1^{(k)}$ とし、$Q_1^{(k)}$ を通る $\mathcal{L}$ の元を $L_1^{(k)}$ とする。

- Step 3　(C_2 と交わる $\mathcal{L}$ の元の決定) :

  $L_1^{(k)}$ に最も近い C_2 の点を $Q_2^{(k)}$ とし、$Q_2^{(k)}$ を通る $\mathcal{L}$ の元を $L_2^{(k)}$ とする。

- Step 4　(停止条件の判定) :

  $L_2^{(k)}$ が C_1 と C_2 の両者と交わるようになれば停止する。そうでなければ、$k := k+1$ として step 2 へ。

図 1はこのアルゴリズムの各ステップで $L_i^{(k)}$ $(i = 1, 2,\ k = 1, 2, \cdots)$ が定まる様子をあらわしている。

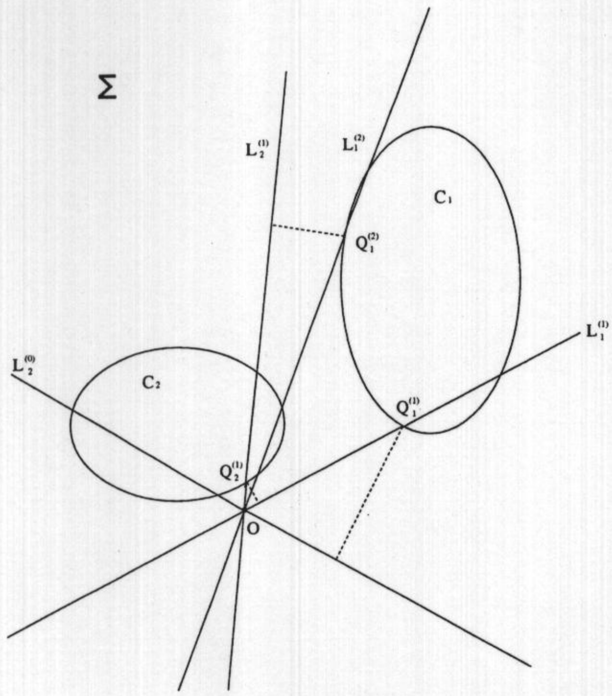

図 1 アルゴリズムの説明

このアルゴリズムは凸集合が 3 つ以上ある場合にも容易に拡張することができる。例えば凸集合が 3 つある場合には、C_1 を通る $\mathcal{L}$ の元を C_2 を通る $\mathcal{L}$ の元へ、C_2 を通る $\mathcal{L}$ の元を C_3 を通る $\mathcal{L}$ の元へ、そして、C_3 を通る $\mathcal{L}$ の元を C_1 を通る $\mathcal{L}$ の元へ、という順序で更新すればよい。

3.3.2 アルゴリズムの収束性の証明

$n = m = 1$ の場合について、アルゴリズムの収束性を考察する。

簡単のために C_1, C_2 は有界であるとし、その境界は滑らかであるとする。このとき、任意の $(p_0, y_0) \in C_2$ に対して、$L_0 = L(y_0 p_0^{-1})$ を初期値として、$L_2^{(k)}$ は収束する。このことは $\Theta(L_2^{(k)})$ が収束することを示すことによって証明することができる。以下で証明を示す。なお、この証明は C_1 と C_2 の凸性だけに基づいている。したがって、この証明は C_1, C_2 が LMI の解集合ではない一般の凸集合の場

合にも成り立つ。

まず必要な用語と記号を定義する。θが次式を満たすとき、C_1 と C_2 の共有角と呼ぶことにする。

$$\Lambda(\theta)\bigcap C_1 \neq \emptyset \text{ かつ } \Lambda(\theta)\bigcap C_2 \neq \emptyset$$

C に接する $\mathcal{L}$ の元を L_1, L_2 とする (図 2参照)。ただし、$\Theta(L_1) = \underline{\theta} < \bar{\theta} = \Theta(L_2)$ とし、$I = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ とする。また、L_1, L_2 と C との接点をそれぞれ Q_1, Q_2 とする。C の境界のうち、Q_1 から Q_2 までの区間を A と呼ぶことにする。ただし、原点に近い側の区間をとるものとする。また、$\bar{J}, \underline{J}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \underline{J} &= [0, \underline{\theta}] \\ \bar{J} &= [\bar{\theta}, \pi] \end{aligned}$$

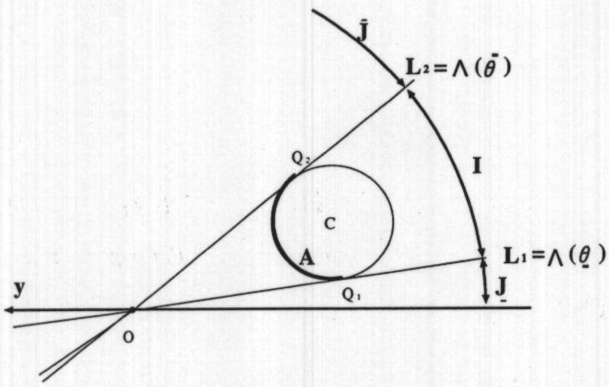

図 2 凸集合 C に関する記号の定義

C_1, C_2 について、ここで定義した $I, \underline{J}, \bar{J}$ に相当する集合をそれぞれ、$I_1, \underline{J}_1, \bar{J}_1$ および $I_2, \underline{J}_2, \bar{J}_2$ とする（図 3参照）。

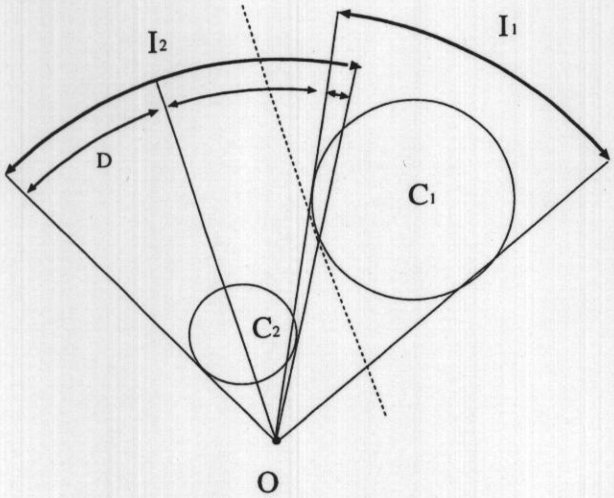

図 3 C_1 と C_2 の位置関係

ここで、次のことが成り立つと仮定する。

$$\begin{cases} I_2 \cap \bar{J}_1 \neq \emptyset & \text{ならば} \quad I_2 \cap \underline{J}_1 = \emptyset \\ I_2 \cap \underline{J}_1 \neq \emptyset & \text{ならば} \quad I_2 \cap \bar{J}_1 = \emptyset \end{cases}$$

このことが成立しないときには、アルゴリズムの第 1 段階（$k = 1$）で解が得られることがわかる。以後の説明では、$I_2 \cap \bar{J}_1 \neq \emptyset$ と仮定する。$I_2 \cap \underline{J}_1 \neq \emptyset$ の場合も同様である。

定義：写像 π_C　写像 $\pi_C : [0, \pi] \to I$ を次のように定義する。

$$\pi_C(\theta) := \begin{cases} \theta & (\theta \in I) \\ \theta' & (\theta \notin I) \end{cases}$$

ただし、θ' は次のように定める (図 4 参照)。$Q \in A$ で、Q における C の接線が $L = \Lambda(\theta)$ と平行であるものがただ 1 つ存在する。Q を通る $\mathcal{L}$ の元を L' とし、$\theta' = \Theta(L')$ とする。

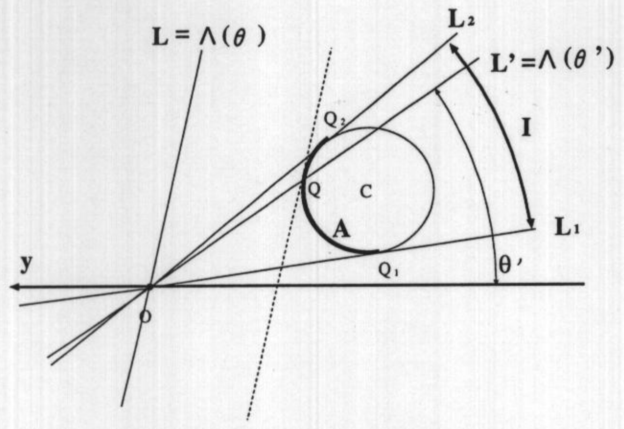

図 4 写像 π_C

写像 π_C に関して、次の補題が成立する。

補題 1　π_C は $\underline{J}$ および $\bar{J}$ で、それぞれ θ に関して単調減少する。

補題 1 の証明　ここでは、$\bar{J}$ における単調減少性を示すが、$\underline{J}$ における場合も同様である。

弧 A をパラメータ t をもつ曲線 $Q(t)$ と考える。ただし、$Q(0) = Q_1, Q(1) = Q_2$ とする。$L(t), L'(t) \in \mathcal{L}$ を次のように定義する（図 5参照）。

$$
\begin{aligned}
L(t) &: \text{点 } Q(t) \text{ における } C \text{ の接線と平行な } \mathcal{L} \text{ の元} \\
L'(t) &: Q(t) \text{ を通る } \mathcal{L} \text{ の元}
\end{aligned}
$$

また、$L(t), L'(t)$ の角度 $\theta(t), \theta'(t)$ を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
\theta(t) &= \Theta(L(t)) \\
\theta'(t) &= \Theta(L'(t))
\end{aligned}
$$

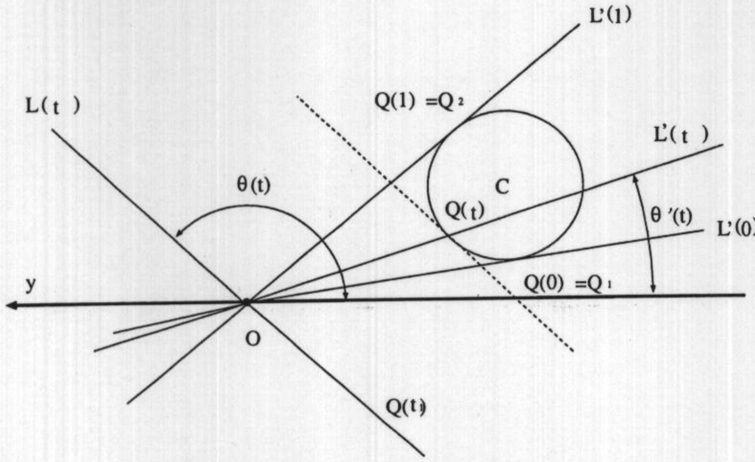

図 5 A のパラメータ表示

すると C の凸性から、$\theta(t)$ は t に関して単調減少、$\theta'(t)$ は t に関して単調増加であることがわかる。

π_C が単調減少であることを示すためには, $\theta_0, \theta_1 \in \bar{J}$ が $\theta_0 < \theta_1$ であるとき、$\pi_C(\theta_0) > \pi_C(\theta_1)$ となることを示せばよい（図 6参照）。

$\theta_0 < \theta_1$ とする。すると、$\theta_0 = \theta(t_0), \theta_1 = \theta(t_1)$ となる $t_0, t_1 \in [0,1]$ が存在する。すると、$\theta(t)$ の単調減少性から $t_0 > t_1$ となり、さらに $\theta'(t)$ の単調増加性から $\theta'(t_0) > \theta'(t_1)$ となることがわかる。このことは $\pi_C(\theta_0) > \pi_C(\theta_1)$ であることを意味している。□

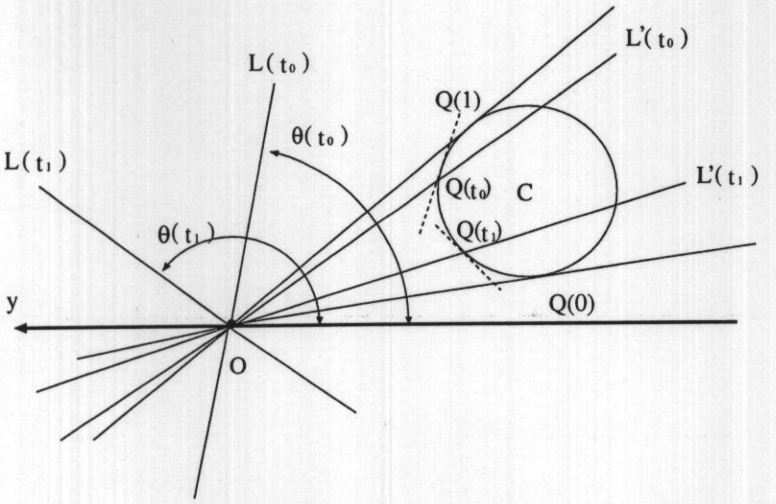

図 6 写像 π_C の単調性

定義：写像 Π 写像 $\Pi : I_2 \to I_2$ を次で定義する。

$$\Pi := \pi_{C_2} \circ \pi_{C_1}$$

上式の $\circ$ は写像の合成をあらわす。ここで定義した Π に関して次の補題が成立する。

補題 2 $\theta \in I_2$、かつ $\pi_{C_1}(\theta) \notin I_2$ であるとき、次式が成立する。

$$\left.\frac{\Pi(\eta)}{d\eta}\right|_{\eta=\theta} > 0 \tag{15}$$

補題 2 の証明 $\theta \in I_1$ とすると、$\pi_{C_1}(\theta) = \theta \in I_2$ となり、仮定に反する。$\theta \notin I_1$ より $\theta \in \bar{J}_1$ であるで、補題 1 より $\left.\frac{d\pi_{C_1}(\eta)}{d\eta}\right|_{\eta=\theta} < 0$ であることがわかる。また、$\pi_{C_1}(\theta) \notin I_2$ より $\pi_{C_1}(\theta) \in \underline{J}_2$ であるので、同じく補題 1 より $\left.\frac{d\pi_{C_2}(\eta)}{d\eta}\right|_{\eta=\pi_{C_1}(\theta)} < 0$ であることがわかる。したがって、式 (15) が成立する。

次の定理が成立する。

定理　任意の $\theta^{(0)} \in I_2$ に対して、$\theta^{(k)} \triangleq \Pi^k(\theta^{(0)})$ $(k = 1, 2, \cdots)$ は収束する。

定理の証明　任意の $\theta^{(0)} \in I_2$ に対して、$\theta^{(k)} = \Pi^k(\theta^{(0)})$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が収束することを示す。

あるkで $\theta^{(k)} \in I_1$ となったとすると、$\theta^{(k)}$ は解であるので、アルゴリズムは終了する。任意の $\theta \in I_2$ に対して、$\pi_{C_1}(\theta) \in I_1$ であるので、ある k で $\pi_{C_1}(\theta^{(k)}) \in I_2$ となったとすると、$\theta^{(k)}$ は解であるので、やはりアルゴリズムは終了する。

$\theta^{(k)} \in D \triangleq \{\theta : \theta \in I_2,\ \theta \notin I_1\ \pi_{C_1}(\theta) \notin I_2\}(k = 1, 2, \cdots)$ であるとする（D の定義については図3参照）。

補題2より、$\Pi(\theta)$ は θ に関して単調に増加するので、次のことが成立する。

- $\theta^{(1)} = \theta^{(0)}$ のとき

  $\theta^{(0)}$ は Π の不動点である（これは後に定義する「平行点」である）。

- $\theta^{(1)} > \theta^{(0)}$ のとき

$$\theta^{(2)} = \Pi(\theta^{(1)}) > \Pi(\theta^{(0)}) = \theta^{(1)}$$

  以下同様にして、$\theta^{(k+1)} > \theta^{(k)}$ $(k = 1, 2, \cdots)$。したがって、$\theta^{(k)}$ は単調増加列である。一方、$\theta^{(k)} \in I_2$ $(k = 1, 2, \cdots)$ であり有界である。有界な単調列は収束するので、$\theta^{(k)}$ も収束する。

- $\theta^{(1)} < \theta^{(0)}$ のとき

  $\theta^{(1)} > \theta^{(0)}$ のときと同様にして $\theta^{(k)}$ が単調減少列であることを示すことができる。したがって上と同じ理由により、この場合も $\theta^{(k)}$ は収束する。

証明終り □

定理の証明から次のことがわかる。$\theta^{(k)}$ はある $k = k^*$ で $\pi_{C_1}(\theta^{(k^*)}) \in I_2$ を満たし共有角のひとつへ収束するか、そうではない場合でも、$\theta^{(k)} \in D$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を満たし、有界であることから、D において収束する。後者の場合の収束先を I_2 の「平行点」と定義する。

定義： 平行点 (図 7) $\theta_2 \in I_2$ が Π の平行点であるとは、次の場合である。$\theta_1 = \pi_{C_1}(\theta_2)$ とし、$L_1 = \Lambda(\theta_1), L_2 = \Lambda(\theta_2)$ とする。また、L_1 と C_1 との交点を Q_1、L_2 と C_2 との交点を Q_2 とする。このとき、L_1 と Q_2 における C_2 の接線が平行であり、L_2 と Q_1 における C_1 の接線が平行である。

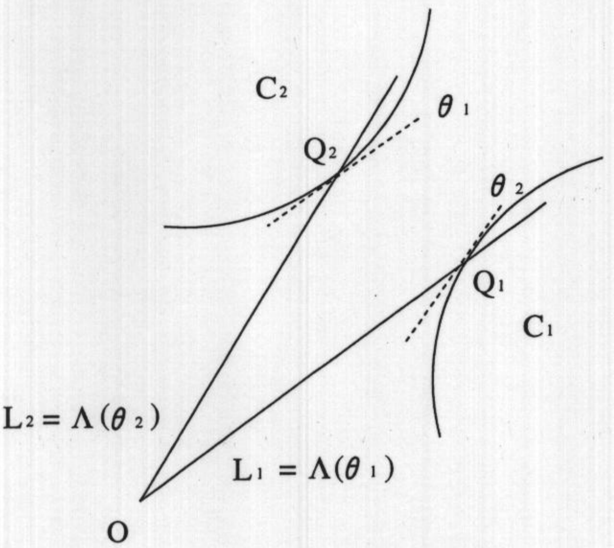

図 7 写像 Π の平行点

以上をまとめると、$n = m = 1$ のとき、任意の $\theta^{(0)} \in I_2$ に対して、$\theta^{(k)}$ は写像 $\Pi(\theta)$ の不動点の一つに収束する、となる。$\Pi(\theta)$ の不動点には 2 種類ある。ひとつは C_1 と C_2 の共有角であり、もうひとつが「平行点」である。したがって、「平行点」が存在しなければ、必ず共有角のひとつへ収束する。また、いい方をかえると、本論文で提案するアルゴリズムは方程式

$$\Pi(\theta) = \theta \tag{16}$$

を逐次代入法で解いていることに相当する、ともいえる。方程式 (16) の解のうち、平行点を除いたものが、式 (13) を満たす K を与える。

注意 アルゴリズムの収束性は Π の単調増加性に基づいている。したがって、凸集合の数が 4 つ以上の偶数個であるときには、2 つの場合と同様にアルゴリズ

ムの収束性と、解への局所的な収束性を示すことができる。なぜなら、$\pi_{Ci}(i = 1, 2, \cdots, 2N)$ が単調減少であれば、そのすべての合成関数は単調増加であるからである。

上の証明では凸集合は、その境界が滑らかであることを仮定したが、これを区分的に滑らかな場合にまで拡張することができる。このとき、π_C は単調非増加であり、Π は単調非減少となる。アルゴリズムの収束性と、解への局所的な収束性の証明は、境界が滑らかな場合と同様である。この場合の平行点とは、次のような点のことである。Q_1 から最も近い C_2 の点が Q_2 であり、Q_2 から最も近い C_1 の点が Q_1 である（図 8）。

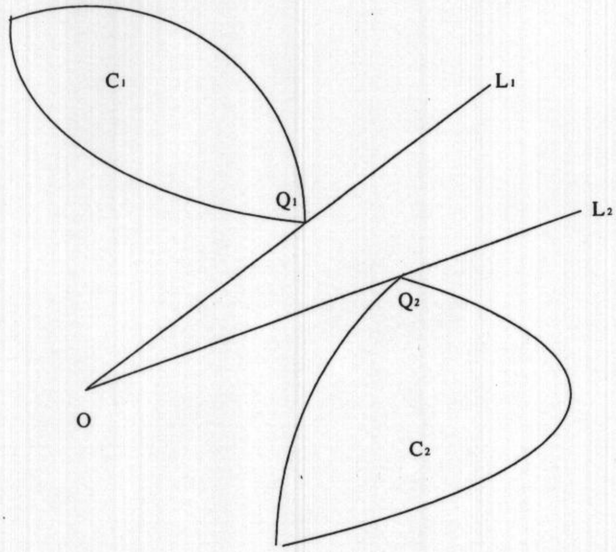

図 8　写像 Π の平行点（凸集合の境界が区分的に滑らかな場合）

3.3.3　数値例（$n = m = 1$ の場合）

$n = m = 1$ のときのいくつかの簡単な例について、Π の具体的な形を求めた。

例 1 :凸集合が 2 つの場合 (図 9)　2 つの凸集合 $C_1, C_2 \subset \Sigma$ を次のように定めた。

$$C_1 \ : \ 1.89p^2 - 2.74py + 3.11y^2 - 13.03p + 17.93y + 26.96 \leq 0$$
$$C_2 \ : \ 6.25p^2 + y^2 - 25p - 4y + 22.75 \leq 0$$

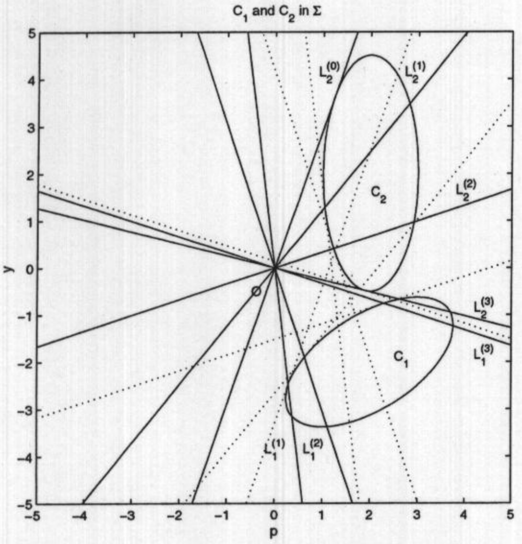

図 9 平面内の 2 つの楕円体

関数 π_{C_1}、π_{C_2} のグラフを図 10、図 11にそれぞれ示す。これらの図から、π_{C_i} は $\underline{J}_i, \bar{J}_i$ でそれぞれ単調減少していることが確認できる $(i = 1, 2)$。また、関数 $\Pi = \pi_{C_2} \circ \pi_{C_1}$ のグラフを図 12に示す。図中での網がけをした範囲が C_1 と C_2 の共有角である。

平行点は存在しないので、アルゴリズムは必ず C_1, C_2 の共有角のひとつへ収束する。

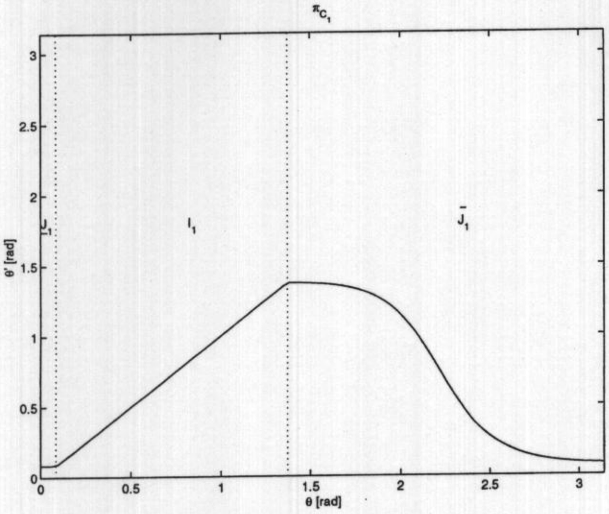

図 10 $\theta' = \pi_{C_1}(\theta)$ のグラフ

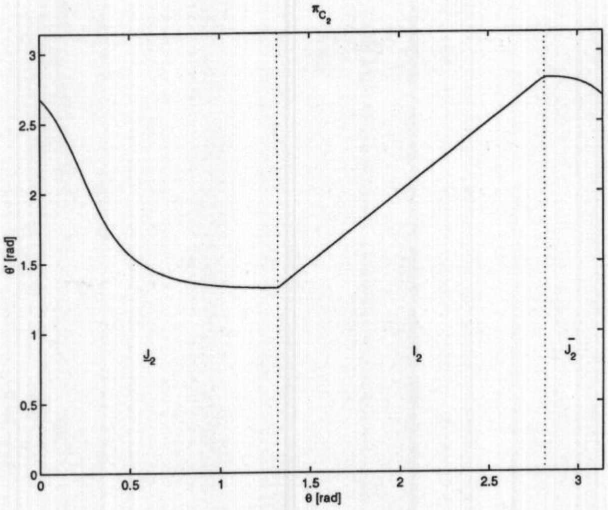

図 11 $\theta' = \pi_{C_2}(\theta)$ のグラフ

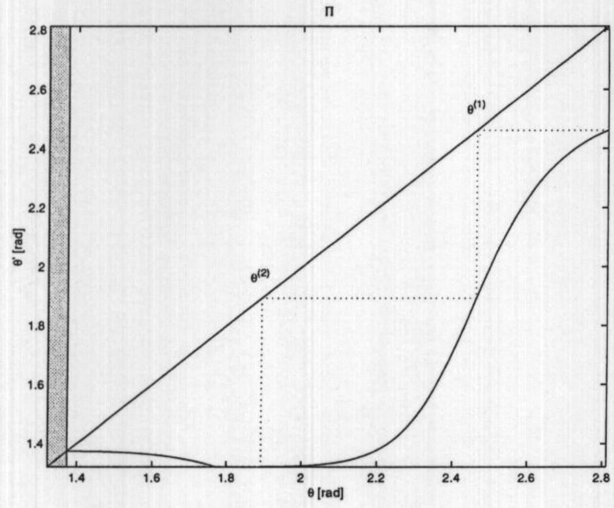

図 12 $\theta' = \Pi(\theta)$ のグラフ

図 9には $\theta^{(0)} = 2.8120$ のときの、アルゴリズムの実行例も示してある。図中の点線は $L_i^{(k)}(i = 1, 2; k = 0, 1, 2, \cdots)$ と平行な $C_j(j = 1, 2; j \neq i)$ の接線である。$L_2^{(3)}$ が求まった解であり、$\theta^{(3)} = 1.3205$ である。

例 2　次の例は、解への収束性が初期値に依存する場合である。2つの凸集合 $C_1, C_2 \subset \Sigma$ を次のように定めた。

$$\begin{aligned} C_1 &: \quad 4p^2 + y^2 - 16p + 12 \leq 0 \\ C_2 &: \quad p^2 + 6.25y^2 + 2p - 25y + 19.75 \leq 0 \end{aligned}$$

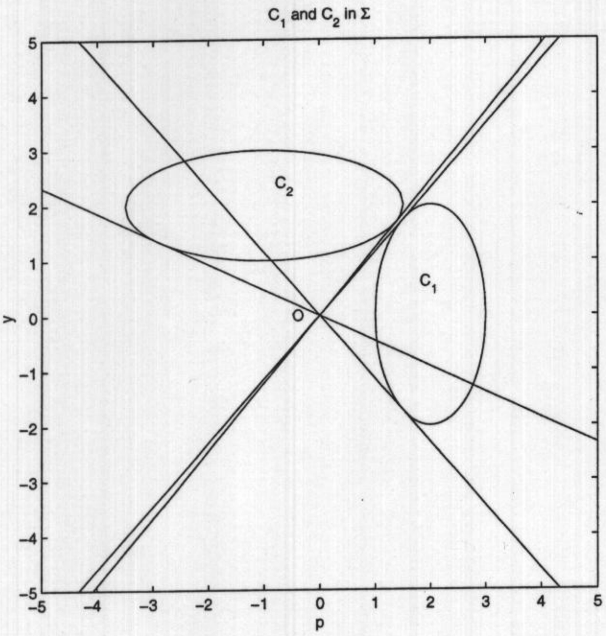

図 13　空間 Σ における凸集合 C_1, C_2(平行点が現れる例)

図 14はこの場合の関数 Π のグラフである。この関数には 2 つの平行点がある。一つは $\theta^1 = 0.01$[rad] であり、もう一つは $\theta^2 = 0.64$[rad] である。

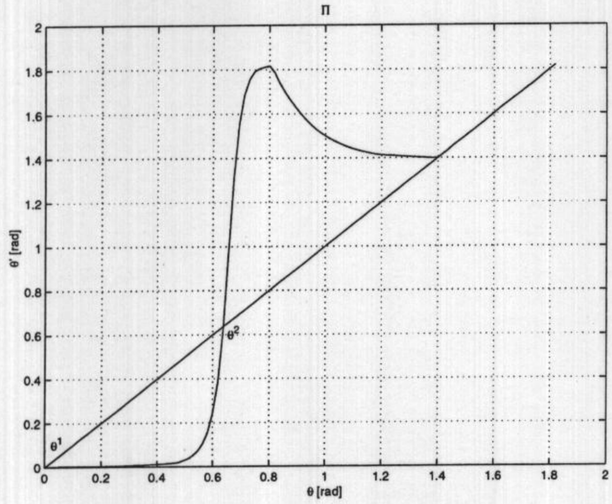

図 14 $\theta' = \Pi(\theta)$（平行点がある例）

平行点の存在のため、アルゴリズムの解への収束性は初期値に依存する。初期値 θ_0 を $\theta_0 < \theta^2$ となるように選んだ場合、$\theta^{(k)}$ は平行点 θ^1 に収束する。図 15はこの場合の例である。

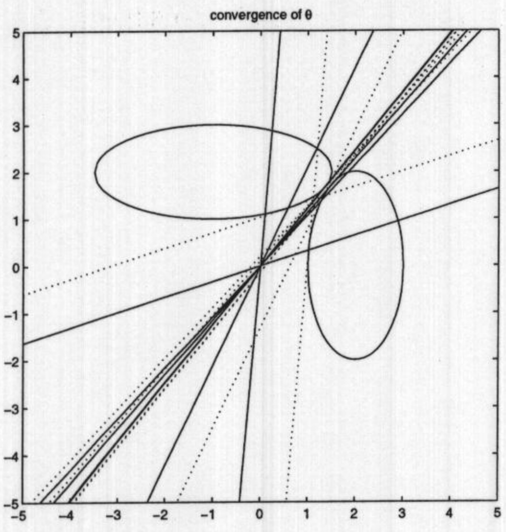

図 15 $\theta^{(k)}$ が収束する様子 ($\theta^{(0)} = 0.60$)（平行点に収束する場合）

k	0	1	2	3	4
$\theta^{(k)}$	0.6000	0.2416	0.0045	0.0023	0.0023

初期値 θ_0 を $\theta_0 > \theta^2$ となるように選んだ場合、$\theta^{(k)}$ は解に収束する。図 16はこの場合の例である。

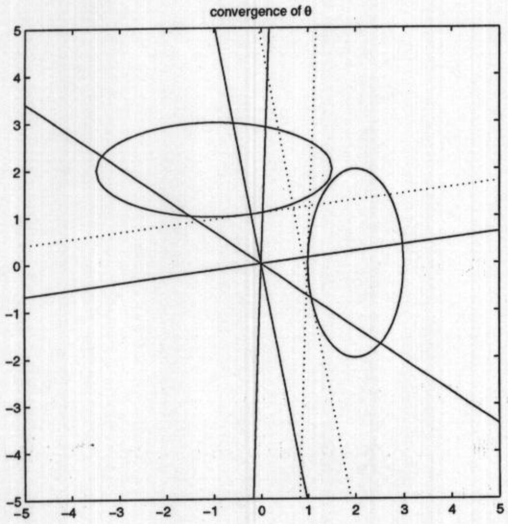

図 16 $\theta^{(k)}$ が収束する様子 ($\theta^{(0)} = 0.65$)（解に収束する場合）

k	0	1	2	3
$\theta^{(k)}$	0.6500	0.8770	1.6557	1.6557

例 3:凸集合が 3 つの場合 (図 17)　この例は $p > 0$ の範囲に限定されていない。凸集合が 3 つある場合のアルゴリズムの性質を調べる。

$$
\begin{aligned}
C_1 &: \quad 1.50p^2 + 2.24py + 3.50y^2 - 11.94p - 30.24y + 62.45 \leq 0 \\
C_2 &: \quad p^2 + 6.25y^2 + 4p - 25y + 22.75 \leq 0 \\
C_3 &: \quad 1.88p^2 - 1.14py + 1.37y^2 - 7.92p + 7.19y + 10.88 \leq 0
\end{aligned}
$$

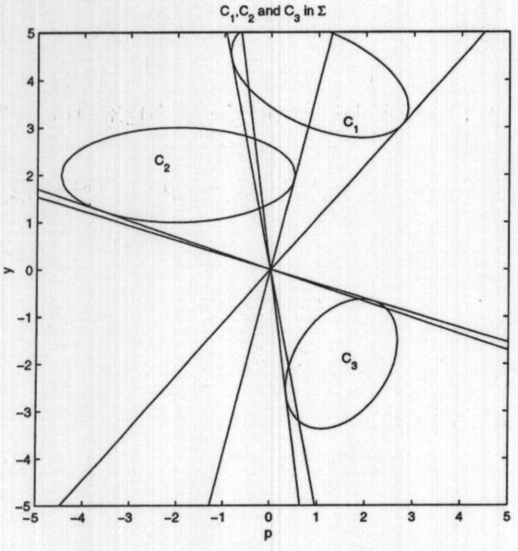

図 17 平面内の 3 つの楕円体

関数 $\Pi = \pi_{C_2} \circ \pi_{C_3} \circ \pi_{C_1}$ のグラフを図 18に示す。ただし、C_2 の接線（角度の小さい方）を角度の基準軸としている。図中の網がけした範囲が C_1, C_2, C_3 の共有角である。平行点は存在しないので、アルゴリズムは必ず共有角のひとつへ収束する。

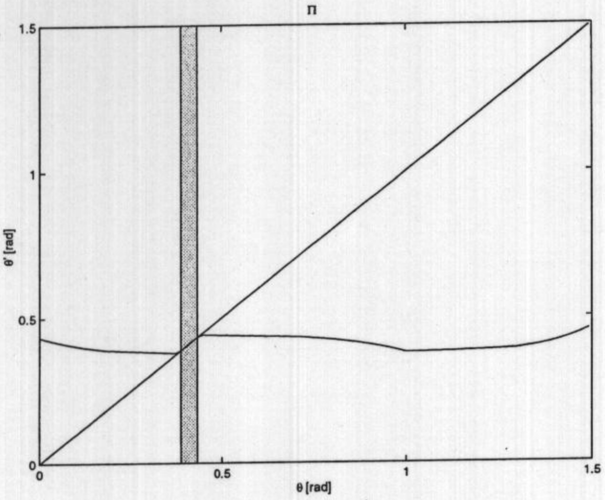

図 18 $\theta' = \Pi(\theta)$ のグラフ

4. 倒立振子への応用

4.1 倒立振子システム

対象とするシステムは文献 [21] で取り上げられている倒立振子である。

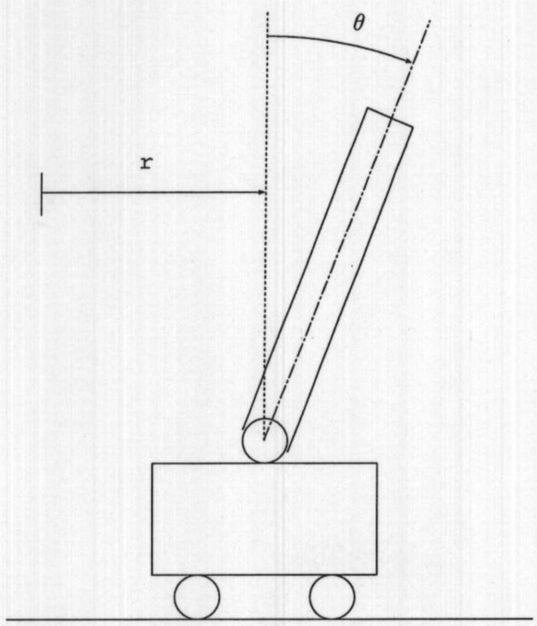

図 19 倒立振子

このシステムの動的挙動は次の微分方程式で記述されている。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{17}$$

$$y = Cx \tag{18}$$

ここで $u[V]$ はモータドライバへの入力電圧、x は次のような 4 次元状態ベクトルである。

$$x = \begin{bmatrix} \theta & \frac{d\theta}{dt} & r & \frac{dr}{dt} \end{bmatrix}^T$$

r[m] は台車の位置、θ[rad] は垂直線からの振り子の角度をあらわす。y は出力であり、$y(t) = r(t)$ であるとする。

係数行列 A, B, C は次のようになっている。

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)mgl}{D} & \frac{-(M+m)c}{D} & 0 & \frac{Fml}{D} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m^2l^2g}{D} & \frac{mlc}{D} & 0 & \frac{-F(J+ml^2)}{D} \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-mla}{D} \\ 0 \\ \frac{a(J+ml^2)}{D} \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

ここで、$D = (M+m)J + Mml^2$ である。パラメータ値は表 1のように与えられている。

表 1 倒立振子システムのパラメータ

記号	パラメータの意味	設計値
M[kg]	台車の質量	5.383
F[kg/s]	台車駆動系の等価粘性摩擦係数	23.73
a[N/V]	u から台車に働く力のゲイン	25.0
l[m]	軸から振り子の重心までの距離	0.115
m[kg]	振り子の重さ	0.1
J[kgm^2]	振り子の重心周りのモーメント	1.526 $\times 10^{-3}$
c[kgm^2/s]	軸の粘性摩擦係数	1.761 $\times 10^{-3}$

この倒立振子システムに対して、2 つの制御系設計問題を解く。

4.2 ロバスト制御

ここでは、軸の粘性摩擦係数 c と台車駆動系の等価粘性摩擦係数 F を不確かなパラメータと考える。ただし、これらに時間的な変動はないとする。表 1に示された c, F の設計値をそれぞれ c_1, F_1 とする。行列 A が不確かなパラメータに依存することを陽にあらわすために $A(c,F)$ と表記することにする（行列 B は c, F には依存しない）。式 (19) から $A(c,F)$ は c および F に関してアファインであることがわかる。

以下では、システム (17)(18) に対して次の仕様を満たす状態フィードバックゲイン行列を求める。ある数 α, β $(\beta > \alpha > 0)$ に対して、$c \in [\underline{c}, \bar{c}]$, $F \in [\underline{F}, \bar{F}]$ のとき、状態フィードバック $u = Kx$ によって、閉ループ系の極の実部が $-\alpha$ から $-\beta$ の範囲にあることを保証する。

仕様を満たす状態フィードバックゲイン行列の集合を $\mathcal{F}(\underline{c}, \bar{c}; \underline{F}, \bar{F}; \alpha, \beta)$ とする。

$$\mathcal{F}(\underline{c}, \bar{c}; \underline{F}, \bar{F}; \alpha, \beta) = \left\{ K \in \Re^{m\times n} \;\middle|\; \begin{array}{c} -\beta < Re(\lambda_i(A(c,F)+BK)) < -\alpha \\ i = 1, \cdots, n \\ \forall c \in [\underline{c}, \bar{c}],\ \forall F \in [\underline{F}, \bar{F}] \end{array} \right\}$$

ここで、$Re(z)$ は複素数 z の実部をあらわし、$\lambda_i(M)$ は行列 M の i 番目の固有値をあらわす。

4.2.1 設計に用いる LMI

システム (17)(18) が不確かさをもたない場合、状態フィードバック $u = Kx$ によって、閉ループ系の極の実部が $-\beta$ から $-\alpha$ の範囲となるような K が存在するための必要十分条件は、次の LMI が解 $(P, Y) \in \Sigma^+$ をもつことである。

$$\begin{aligned} & F(P,Y;A,B,\alpha,\beta) \\ &= \begin{bmatrix} AP + PA^T + BY + Y^TB^T + 2\alpha P & 0 \\ 0 & -AP - PA^T - BY - Y^TB^T - 2\beta P \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \qquad (20)$$

LMI (20) の解集合を $\mathcal{C}(A,B,\alpha,\beta)$ とあらわす。

$$\mathcal{C}(A,B,\alpha,\beta) = \{(P,Y)\ \in \Sigma^+ | F(P,Y;A,B,\alpha,\beta) < 0\}$$

次に、システム (17)(18) が不確かさをもつとする。パラメータの変域を集合 Ω であらわす。

$$\Omega = \{(c,F)|c \in [\underline{c},\bar{c}],\ F \in [\underline{F},\bar{F}]\}$$

Ω の 4 つの端点の集合を $\mathcal{V}$ とする。

$$\mathcal{V} = \{(c,F)|c \in \{\underline{c},\bar{c}\},\ \ F \in \{\underline{F},\bar{F}\}\}$$

このとき、状態フィードバック $u = Kx$ によって、閉ループ系の極の実部が $-\beta$ から $-\alpha$ の範囲となるような K が存在するための一つの十分条件は、次式が解 $(P,Y) \in \Sigma^+$ をもつことである。

$$F(P,Y;A(c,F),B,\alpha,\beta) < 0,\ \forall(c,F) \in \mathcal{V} \tag{21}$$

式 (21) の解集合を $\mathcal{C}_\Omega(\alpha,\beta)$ とする。

$$\mathcal{C}_\Omega(\alpha,\beta) = \bigcap_{(c,F)\in\mathcal{V}} \mathcal{C}(A(c,F),B,\alpha,\beta)$$

式 (21) の解 (P,Y) から得られる $K = YP^{-1}$ は仕様を満たす。これは式 (14) を解く場合に相当する。すなわち、仕様を満たす状態フィードバックゲイン行列を得るために、$(P,Y) \in \mathcal{C}_\Omega(\alpha,\beta)$ を求める場合である。

次に Ω を 4 つの部分集合に分解する。$\underline{c} = c_1 < c_2 < c_3 = \bar{c},\ \underline{F} = F_1 < F_2 < F_3 = \bar{F}$ とする。

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \{(c,F)|c \in [c_1,c_2],\ F \in [F_1,F_2]\} \\
\omega_2 &= \{(c,F)|c \in [c_2,c_3],\ F \in [F_1,F_2]\} \\
\omega_3 &= \{(c,F)|c \in [c_2,c_3],\ F \in [F_2,F_3]\} \\
\omega_4 &= \{(c,F)|c \in [c_1,c_2],\ F \in [F_2,F_3]\}
\end{aligned}$$

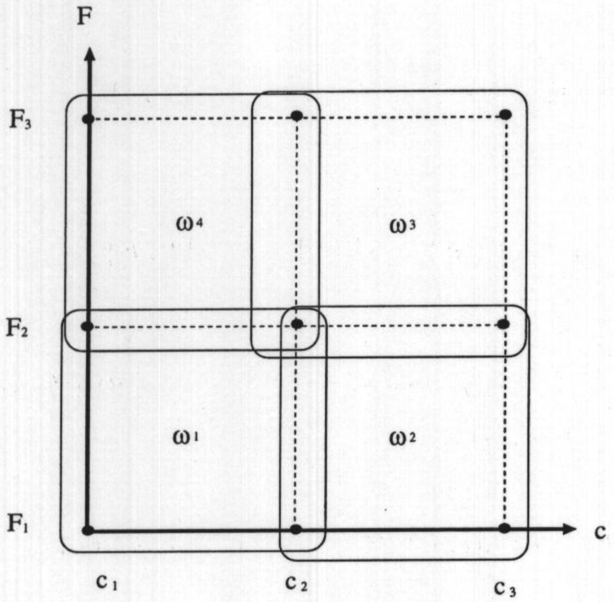

図 20 パラメータ領域の分割

各部分集合 ω_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ に対して、それぞれ式 (21) の形の十分条件で仕様を満たす状態フィードバックゲイン行列の存在を保証し、すべての部分集合共通の状態フィードバックゲイン行列を提案したアルゴリズムで求める。これは式 (13) を解く場合に相当する。そうすることによって、Ω に対して式 (21) を解く場合よりも、より広い範囲の不確かさに対して仕様を満足するフィードバックゲイン行列が求まる。

$C(c), C(c, c'), C(c; F), C(c, c'; F, F') \subset \Sigma^+$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} C(c) &= \mathcal{C}(A(c, F_1), B, 0.5, 5.0) \\ C(c, c') &= C(c) \bigcap C(c') \\ C(c; F) &= \mathcal{C}(A(c, F), B, 0.5, 5.0) \\ C(c, c'; F, F') &= C(c; F) \bigcap C(c'; F) \bigcap C(c; F') \bigcap C(c'; F') \end{aligned}$$

また、$S \subset \Sigma^+$ に対して、状態フィードバックゲイン行列の集合 $\mathcal{K}(S)$ を次式で定義する。

$$\mathcal{K}(S) = \{K = YP^{-1} | (P, Y) \in S\}$$

4.2.2　1つのパラメータについての実験

ここでは軸の粘性摩擦係数 c のみが不確かさをもつとする。台車駆動系の等価粘性摩擦係数 F はノミナル値 $F_1 = 23.73$[kg/s] に確定しているものとする。c のノミナル値は $c_1 = 1.761 \times 10^{-3}$[kgm^2/s] である。ここでは、$c$ の実際の値はノミナル値よりも大きいものとする。

c_2, c_3 を $c_3 > c_2 > c_1$ を満たす数とする。$C_1, C_2 \subset \Sigma^+$ を次のように定義する。

$$C_1 = C(c_1, c_2),\ C_2 = C(c_2, c_3)$$

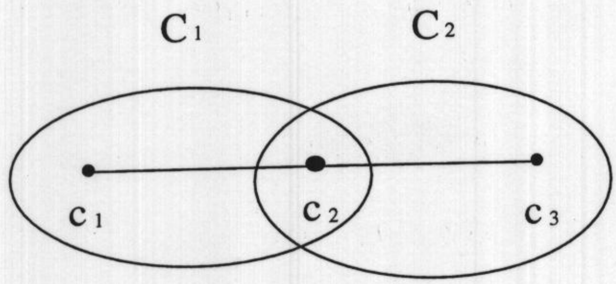

図 21　C_1, C_2 の概念図

c_1, c_2, c_3 の間隔の大きさによって C_1, C_2 の位置関係が変わる。

1. $C_1 \bigcap C_2 \neq \emptyset$ $(case[1])$

   任意の $(P, Y) \in C_1 \bigcap C_2$ に対して $K = YP^{-1} \in \mathcal{F}(c_1, c_3; F_1, F_1; \alpha, \beta)$ である。これは式 (14) の解が存在する場合に相当する。(図 22参照)

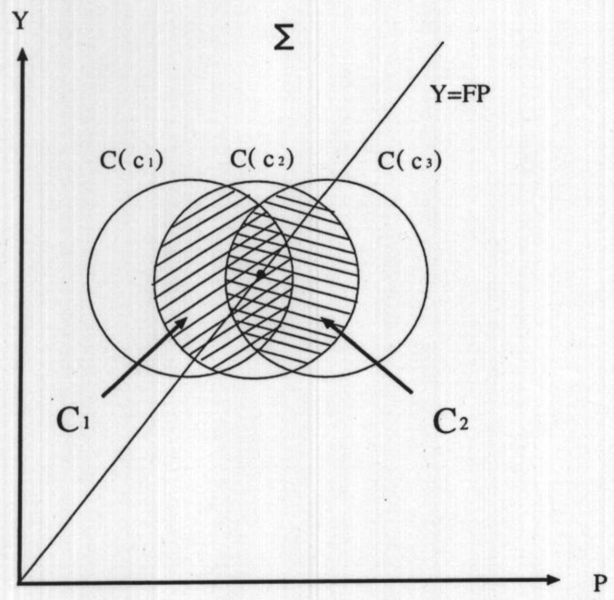

図 22 Case [1]： $C_1 \bigcap C_2 \neq \emptyset$

2. $C_1 \bigcap C_2 = \emptyset$ かつ $C_1 \neq \emptyset$ かつ $C_2 \neq \emptyset$

   (a) $\exists K,\ L(K) \bigcap C_1 \neq \emptyset$ かつ $L(K) \bigcap C_2 \neq \emptyset$ $(case[2])$

   $K \in \mathcal{F}(c_1, c_3; F_1, F_1; \alpha, \beta)$ である。これは式 (14) の解は存在しないが、式 (13) の解が存在する場合に相当する。(図 23参照)

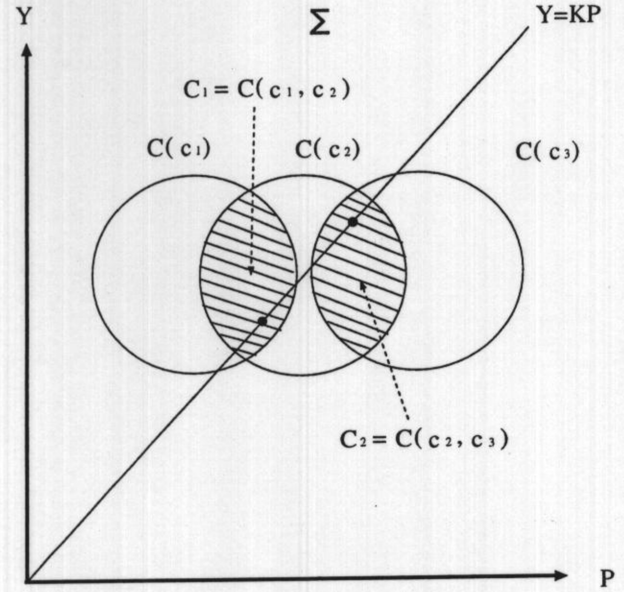

図 23 Case [2] : $\mathcal{K}(C_1)\bigcap\mathcal{K}(C_2) \neq \emptyset$

(b) $\forall K,\ L(K)\bigcap C_1 = \emptyset$ あるいは $L(K)\bigcap C_2 = \emptyset$ $(case[3])$
$K \in \mathcal{F}(c_1, c_3; F_1, F_1; \alpha, \beta)$ の存在は保証されない。(図 24参照)

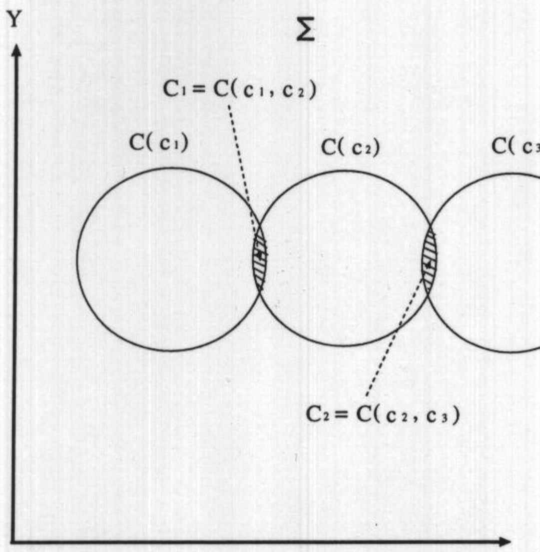

図 24 Case [3] : $\mathcal{K}(C_1) \bigcap \mathcal{K}(C_2) = \emptyset$

3. $C_1 = \emptyset$ あるいは $C_2 = \emptyset$ ($case$[4]) (図 25参照)

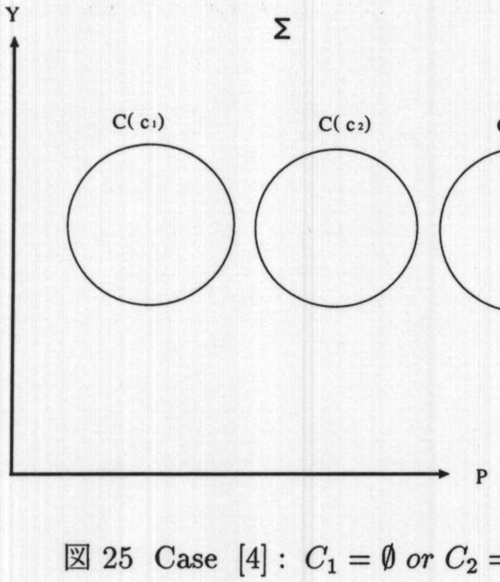

図 25 Case [4] : $C_1 = \emptyset\ or\ C_2 = \emptyset$

$\alpha = 0.5, \beta = 5.0$ のときに、次の 3 つの値 $C_3^{[1]}, C_3^{[2]}, C_3^{[3]}$ を求めた。

$$
\begin{aligned}
c_3^{[1]} &= \max c_3 \\
&\quad s.t.\ C(c_1, c_3) \neq \emptyset \\
c_3^{[3]} &= \max c_3 \\
&\quad s.t.\ C(c_2, c_3) \neq \emptyset,\ c_2 = c_3^{[1]} \\
c_3^{[2]} &= \max c_3 \\
&\quad s.t.\ \mathcal{K}(C(c_1, c_2)) \bigcap \mathcal{K}(C(c_2, c_3)) \neq \emptyset \\
&\quad c_2 = c_1 + \frac{c_3 - c_1}{2}
\end{aligned}
$$

$c_3^{[1]}$ は case [1] の場合の c_3 の最大値である。$c_3^{[3]}$ は case [3] の場合の c_3 の最大値である。$c_3^{[2]}$ は case [2] の場合であるが、c_2 を c_1 と c_3 の中間値に制限した場合の c_3 の最大値である。

実験では、c_3 の値を 0.1×10^{-3} ずつ変化させて最大値を求めた。$c_3^{[1]} = 14.0 \times 10^{-3}, c_3^{[3]} = 26.1 \times 10^{-3}$ であった。

$c_3^{[2]}$ の近似値 $\hat{c}_3^{[2]}$ を、提案したアルゴリズムで求めた。C_1 と C_2 の最近点を通る $\mathcal{L}$ の元は C_1, C_2 と共有点をもつ $\mathcal{L}$ の元に近いという予想から、初期値 $K^{(0)}$ を次のように定めた。C_1 と C_2 の C_2 側の最近点を $L(K^{(0)})$ が通るように $K^{(0)}$ を定める。

$$\hat{c}_3^{[2]} = 22.9 \times 10^{-3}$$

求まった状態フィードバックゲイン行列 K は

$$K = \begin{bmatrix} 10.5311 & 0.3255 & 0.2898 & 1.7977 \end{bmatrix}$$

4.2.3 2 つのパラメータについての実験

ここでは軸の粘性摩擦係数 c と台車駆動系の等価粘性摩擦係数 F がともに不確かさをもつとする。軸の粘性摩擦係数 c は $c \in [c_1, c_3], c_1 = 1.761 \times 10^{-3}, c_3 = 7.8 \times 10^{-3}$ とする。さらに、$c_2 = c_1 + (c_3 - c_1)/2 = 4.281 \times 10^{-3}$ とする。F のノ

ミナル値は $F_1 = 23.73$[kg/s] である。ここでは、F の実際の値はノミナル値よりも大きいものとする。

F_2, F_3 が $F_3 > F_2 > F_1$ を満たす数であるとき、$C_1, C_2, C_3, C_4 \subset \Sigma^+$ を次式で定義する（図 20参照）。

$$
\begin{aligned}
C_1 &= C(c_1, c_2; F_1, F_2),\ C_2 = C(c_2, c_3; F_1, F_2) \\
C_3 &= C(c_2, c_3; F_2, F_3),\ C_4 = C(c_1, c_2; F_2, F_3)
\end{aligned}
$$

$\alpha = 0.5, \beta = 5.0$ のときに、次の 3 つの値 $F_3^{[1]}, F_3^{[2]}, F_3^{[3]}$ を求めた。

$$
\begin{aligned}
F_3^{[1]} &= \max F_3 \\
&\quad s.t.\ C(c_1, c_3; F_1, F_3) \neq \emptyset \\
F_3^{[3]} &= \max F_3 \\
&\quad s.t.\ C(c_1, c_2; F_1, F_2) \neq \emptyset,\ C(c_2, c_3; F_1, F_2) \neq \emptyset \\
&\quad C(c_2, c_3; F_2, F_3) \neq \emptyset,\ C(c_1, c_2; F_2, F_3) \neq \emptyset \\
&\quad F_2 = F_1 + \frac{F_3 - F_1}{2} \\
F_3^{[2]} &= \max F_3 \\
&\quad s.t.\ \mathcal{K}(C(c_1, c_2; F_1, F_2)) \bigcap \mathcal{K}(C(c_2, c_3; F_1, F_2)) \\
&\quad \bigcap \mathcal{K}(C(c_2, c_3; F_2, F_3)) \bigcap \mathcal{K}(C(c_1, c_2; F_2, F_3)) \neq \emptyset \\
&\quad F_2 = F_1 + \frac{F_3 - F_1}{2}
\end{aligned}
$$

$F_3^{[1]}$ は Ω 全体に対して式 (21) が解をもつ場合の F_3 の最大値である。$F_3^{[3]}$ と $F_3^{[2]}$ では、c, F の変域をそれぞれ 2 等分して Ω の部分集合 ω_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ をつくった。$F_3^{[3]}$ は各 ω_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ に対する式 (21) の形の式が解をもつ場合の F_3 の最大値である。この場合にはすべての ω_i に対して仕様を満足する共通のフィードバックゲイン行列の存在は保証されない。$F_3^{[2]}$ はすべての ω_i に対して仕様を満足する共通のフィードバックゲイン行列の存在を保証した場合の F_3 の最大値である。

実験では F_3 の値を 0.1 ずつ変化させて最大値を求めた。$F_3^{[1]} = 33.1, F_3^{[3]} = 56.3$ であった。

$F_3^{[2]}$ の近似値 $\hat{F}_3^{[2]}$ を提案したアルゴリズムで求めた。今度の場合、Σ^+ の中に凸集合が 4 つあるので、アルゴリズムを次のように 4 つの凸集合の場合に拡張した。$C_i, C_j \subset \Sigma^+$ に対して、C_i と交わる $\mathcal{L}$ の元に最も近い C_j の点を通る $\mathcal{L}$ の元を求める操作を、$C_i \to C_j$ と書くことにすると、拡張したアルゴリズムは $C_1 \to C_2 \to C_3 \to C_4 \to C_1$ という一連の操作を繰り返す。初期値は適当に C_4 の点を 1 つ選び、$L(K^{(0)})$ がその点を通るように $K^{(0)}$ を定めた。

$$\hat{F}_3^{[2]} = 51.6$$

求まったフィードバックゲイン行列 K は

$$K = \begin{bmatrix} 27.6831 & 2.5373 & 6.0402 & 10.0408 \end{bmatrix}$$

$F_3 = F_3^{[3]}$ と $F_3 = \hat{F}_3^{[2]}$ の 2 つの場合はともに $C_i\ (i = 1,2,3,4)$ が互いに共有点をもたないことを確認した。すなわち、$C_i \bigcap C_j = \emptyset,\ i,j = 1,2,3,4,\ i \neq j$。

4.2.4 実験結果の考察とまとめ

$c_3^{[1]}, \hat{c}_3^{[2]}, c_3^{[2]}, c_3^{[3]}$ には次の大小関係がある。

$$c_3^{[1]} < \hat{c}_3^{[2]} < c_3^{[2]} < c_3^{[3]}$$

提案したアルゴリズムによって求めた $c_3^{[2]}$ の近似値 $\hat{c}_3^{[2]}$ は閉ループ系のロバスト性を保証する意味で、$c_3^{[1]}$ に較べて十分に大きいといえる。これはこの例において、提案したアルゴリズムが複数の LMI 条件を満たす共通フィードバックゲイン行列を求めるための方法として意味をもつことを示す。F と c の 2 つのパラメータに不確かさがある場合の実験についても同様のことがいえる。この実験は凸集合が 3 つ以上ある場合にも、このアルゴリズムが適用可能であることを示している。

4.3 入力と出力に制限がある場合の減衰率の最小化

システム (17)(18) に対して、次の 3 つの仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求める。

- 仕様 1：減衰率

「閉ループ系の減衰率は α 以上であること」。

ここでの減衰率とは、次式を満たす最大の α として定義される。

$$\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}||x(t)|| = 0$$

ノルムはユークリッドノルムである。これはシステムの固有値の実部の最大値の符号を反転した値に一致する。

仕様 1 を実現する定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための必要十分条件は次式を満たす $(P_1, Y_1) \in \Sigma^+$ が存在することである [1]。

$$AP_1 + P_1A^T + BY_1 + Y_1^TB^T + 2\alpha P_1 < 0 \tag{22}$$

式 (22) の解集合を $C_1 \subset \Sigma^+$ とする。

- 仕様 2：入力に対する制限

「初期値 $x(0) = x_0$ であるとき、ある正の数 μ に対して、$|u(t)| \leq \mu$ $(t \geq 0)$ であること」。

仕様 2 を実現する定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための一つの十分条件は、次式を満たす $(P_2, Y_2) \in \Sigma^+$ が存在することである [1]。

$$\left.\begin{array}{c} AP_2 + P_2A^T + BY_2 + Y_2^TB^T < 0 \\ \begin{bmatrix} P_2 & Y_2^T \\ Y_2 & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \ \begin{bmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P_2 \end{bmatrix} \geq 0 \end{array}\right\} \tag{23}$$

式 (23) の解集合を $C_2 \subset \Sigma^+$ とする。

- 仕様 3：出力に対する制限

「初期値 $x(0) = x_0$ であるとき、ある正の数 δ に対して、$|y(t)| \leq \delta$ $(t \geq 0)$ であること」。

仕様 3 を実現する定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための一つの十分条件は、次式を満たす $(P_3, Y_3) \in \Sigma^+$ が存在することである [9]。

$$
\left.\begin{array}{c}
AP_3 + P_3A^T + BY_3 + Y_3^T B^T < 0 \\
\begin{bmatrix} P_3 & P_3C^T \\ CP_3 & \delta^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P_3 \end{bmatrix} \geq 0
\end{array}\right\} \tag{24}
$$

式 (24) の解集合を $C_3 \subset \Sigma^+$ とする。

4.3.1 設計 1

設計 1 では仕様 1 と仕様 2 をともに満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めた。状態変数の初期値は台車位置 $r(t)$ 以外はすべて 0 とする。台車位置の初期値を $r(0) = 1$ として設計することによって、$|r(0)| \leq 1$ の任意の初期台車位置に対して仕様を満足することを保証できる。仕様 2 における入力の絶対値の最大値は $\mu = 1$ とした。以上の条件の下で、減衰率 α が最大になるゲイン行列を求めた。

まず、式 (14) にもとづいて、凸最適化法により設計し、最も大きな減衰率を達成するゲイン行列 $K^{[1]}$ を求めた。このときの減衰率の最大値を $\alpha_{max}^{[1]}$ とする。この設計問題は一般化固有値問題に帰着され、大域的最適解を得ることができる。結果は次のようになった。

$$
\alpha_{max}^{[1]} = 0.4620
$$
$$
K^{[1]} = \begin{bmatrix} 3.4984 & 0.1308 & 0.0489 & 1.0767 \end{bmatrix}
$$

$\alpha_{max}^{[1]}$ は大域的最適解であるから、$\alpha > \alpha_{max}^{[1]}$ では、$C_1 \bigcap C_2 = \emptyset$ である。すなわち、式 (14) は成立しない。

次に式 (13) に基づいて、提案したアルゴリズムで設計した。減衰率 α をステップ幅 0.01 で更新し、最も大きな α の値を達成するゲイン行列 $K^{[2]}$ を求めた。このときの α の最大値を $\alpha_{max}^{[2]}$ とする。初期値 $L_2^{(0)}$ は次のように選んだ。C_1 と C_2 の互いに最も近い点を求め、その C_2 側の点を通る $\mathcal{L}$ の元を $L_2^{(0)}$ とした。結果は次のようになった。

$$
\alpha_{max}^{[2]} = 0.90
$$
$$
K^{[2]} = \begin{bmatrix} 5.1611 & 0.7793 & 0.3379 & 1.4024 \end{bmatrix}
$$

図 26,27にゲイン行列 $K^{[1]}, K^{[2]}$ を用いたシミュレーション結果を示す。図 26は台車の位置 $r(t)$ の時間変化、図 27は制御入力 $u(t)$ の時間変化のグラフである。ただし、$r(0) = 1$ とした。それぞれフィードバックゲインとして、$K^{[1]}$ を用いた場合の結果を破線で、$K^{[2]}$ を用いた場合の結果を実線で示してある。$K^{[2]}$ の方が、偏差がすみやかに減衰していることがわかる。

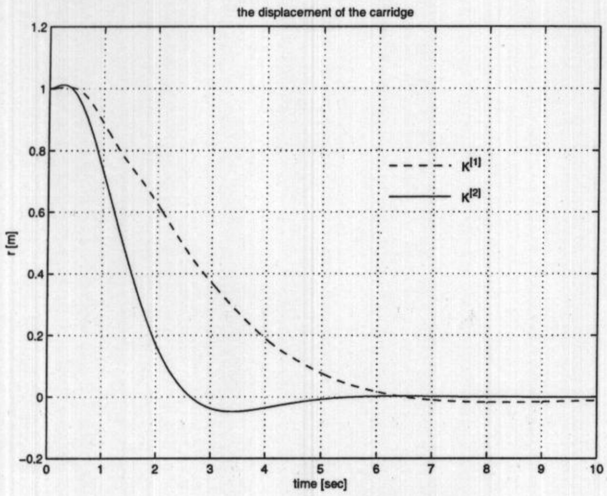

図 26　設計 1：$r(t)$ の変化

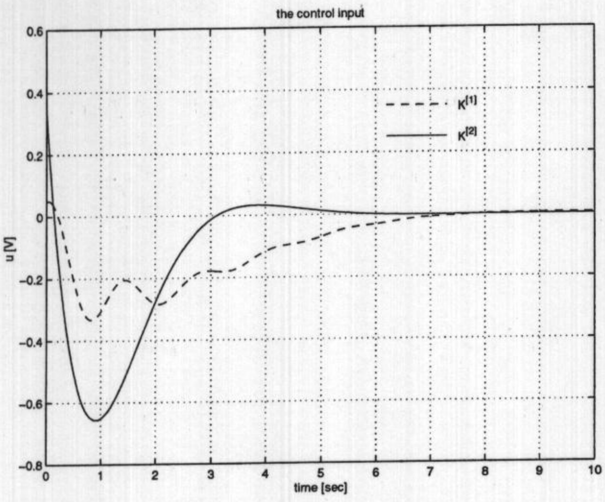

図 27　設計 1：$u(t)$ の変化

4.3.2　設計 2

設計 2 では仕様 1,2,3 をすべて満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めた。初期値は振子角度 $\theta(t)$ 以外はすべて 0 とする。振子角度の初期値を $\theta(0) = 0.5$ として設計することによって、$|\theta(0)| \le 0.5$ の任意の初期振子角度に対して仕様を満足することを保証できる。仕様 2 における入力の絶対値の最大値は $\mu = 3$ とした。また、仕様 3 における台車位置の絶対値の最大値を $\delta = 0.5[m]$ とした。以上の条件の下で、減衰率 α が最大になるゲイン行列を求めた。

まず、式 (14) にもとづいて、凸最適化法で設計を試みた。しかし、$C_2 \bigcap C_3 = \emptyset$ となり、この方法では、3 つの仕様をすべて満足するゲイン行列を求めることはできないことがわかった。

次に式 (13) に基づいて、提案したアルゴリズムで、3 つの仕様をすべて考慮して設計をおこなった。減衰率 α をステップ幅 0.01 で更新し、仕様 2 及び仕様 3 を満たし、仕様 1 に関して最も大きな α の値を達成するゲイン行列 $K^{[2]}$ を求めた。このときの α の最大値を $\alpha_{max}^{[2]}$ とする。初期値 $L_3^{(0)}$ の選び方は次の通りである。C_3 内の点を適当に選び、その点を通る $\mathcal{L}$ の元を初期値 $L_3^{(0)}$ とした。結果は

次のようになった。

$$\alpha_{max}^{[2]} = 1.37$$
$$K^{[2]} = \left[\begin{array}{cccc} 5.9865 & 0.8588 & 1.6909 & 2.2994 \end{array}\right]$$

シミュレーションの結果、台車の位置 $|r(t)|$ の最大値は 0.4700[m] であった。$\alpha = \alpha_{max}^{[2]}$ のとき、C_1, C_2 および C_3 の関係は次のようになった。

$$C_1 \bigcap C_2 = \emptyset,\ C_2 \bigcap C_3 = \emptyset,\ C_3 \bigcap C_1 \neq \emptyset \tag{25}$$

また、アルゴリズムの解への収束性をみるため、$L_1^{(k)}$ と C_2 との距離 d_2 の変化を図 28($k = 1, \cdots, 10$)、図 29($k = 11, \cdots, 78$) に示した。

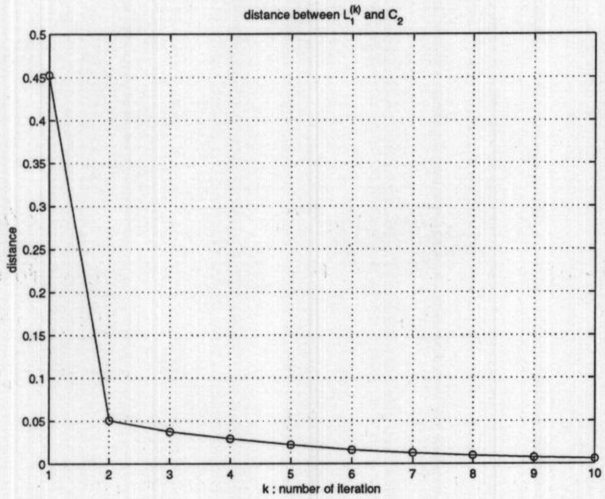

図 28 設計 2：$d_2^{(k)}$ の変化 ($k = 1, \cdots, 10$)

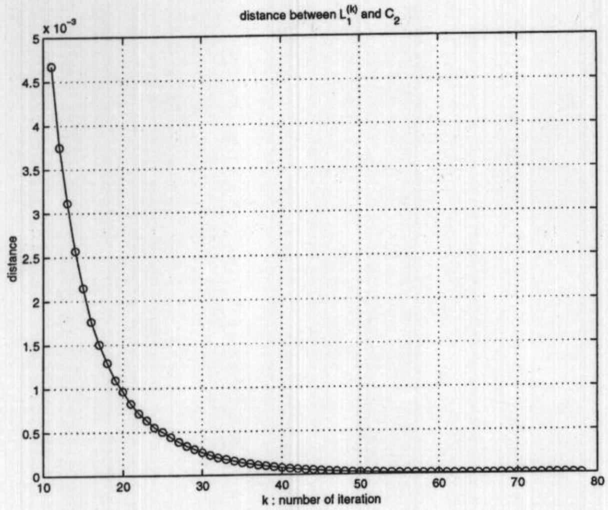

図 29　設計 2 : $d_2^{(k)}$ の変化 $(k = 11, \cdots, 78)$

4.3.3　評価

提案したアルゴリズムによって、式 (13) を満たす解を直接見つけることができることを示した。設計 1 では、式 (14) にもとづいて、凸最適化法で設計した場合に較べて、2 倍近い減衰率を達成することができた。設計 2 の結果は、凸集合が 3 つの場合にも提案したアルゴリズムが有効であることを示している。ただし、式 (25) から分かるように、C_1 と C_3 は共通点をもっている。

ここで、アルゴリズムを実装する上で問題になる計算量などの点について述べておく。

まず、アルゴリズム中で用いられる計算について説明する。必要な計算は次の 2 種類である。1 つは初期値を求めるための計算である。これは、ある LMI の解集合の中の 1 点を見い出す問題であるので、LMI の可解性問題である。もう 1 つは、$L(K)$ に最も近い凸集合 C の点を求める計算である。これは、LMI を制約として線形関数を最小化する問題となる。いずれも凸計画問題に帰着され、内点法などによって高速に解くことができる。

次に計算量について述べる。以下に述べる計算時間は、次の条件のもとでのも

のである。まず、計算に用いたのは CPU が Alpha21064(300MHz) の計算機である。また、LMI は MATLAB の LMI Toolbox で解いた。

設計 1 では、$\alpha^{[1]}_{max}$ を求めるのに要した時間は 0.79[sec] であり、提案アルゴリズムによって $\alpha^{[2]}_{max}$ を求めるのに要した時間は 4.48[sec] である。このときの反復は $k=2$ で終了している。設計 2 では、提案アルゴリズムによって $\alpha^{[2]}_{max}$ を求めるのに要した時間は 263.10[sec] である。このときの反復は $k=79$ で終了している。

5. 吸収冷凍機への応用

5.1 背景

吸収冷凍機はビルなどの冷房に使われる装置である。これに対する負荷追従のための制御方式は主に PID 制御であった。この方式では、PID 制御器を複数個組み合わせて用いることになるが、その調整は試行錯誤を伴う厄介な作業である [22]。この問題を解決するために、最適制御理論に基づいて制御系を設計することが考えられる。これは PID 制御のような試行錯誤は必要なく、最適レギュレータが評価基準に応じて一意に定まる。最適制御理論に基づいて制御系を設計するには、制御対象のモデルが必要である。ダイナミックモデルをある動作点で線形化した局所線形化モデルは、吸収冷凍機のように非線形性の強いシステムでは、動作点が変化したときに実システムとの誤差が大きくなるため問題がある。非線形システムを座標変換とフィードバックによって大域的に線形化する方法 [7] も研究されているが、現実の複雑な非線形システムに適用することは難しい。

非線形システムに対して、大域的に性能が保証された制御器を得る別の方法として、非線形システムを複数の動作点で線形化し、得られた線形化システムの集合をモデルとして制御系を設計するアプローチがある。このアプローチには次の２つの方法がある。各線形化システムに線形制御器を設計したあと、それらを補間するゲインスケジューリング制御系を構成する方法 [13][23] と、この線形化システムの集合を不確かさをもった一つの線形システムと考えて、ロバストな制御器を設計する方法である。後者はさらに、不確かさを表現する方法によって、パラメトリックな方法と非パラメトリックな方法に分けられる。

Webb らは非パラメトリックな方法を固定槽反応器におけるメタン生成反応の制御に適用した [11]。その手順は次の通りである。まず動作点を３つの領域に分け、それぞれの領域について入出力データを収集する。このデータからスペクトル解析によって各領域ごとの伝達関数を求める。これら３つの局所的な伝達関数から、領域写像法 (Regions-Mapping Technique) と呼ばれる方法によって、ノミナルモデルと不確かさの範囲を求めた。彼らはこの同定された不確かさのもとで、システムを常に安定化する IMC 制御器を設計している。一方、パラメトリック

な方法としては、線形システムのシステム行列の成分に不確かさがあると考え、その変動範囲を行列ポリトープであらわし、制御系を設計する方法が提案されている [1]。本論文では、物理モデルから導かれた非線形の状態方程式を複数の定常点で線形化し、得られた線形化システムのシステム行列がつくるポリトープを不確かさの範囲とする方法（2.3節の大域的線形化の手法）を採る。そして、この不確かさのもとでシステムを安定化し、さらに外乱の影響を最小化する制御器を設計する。この制御器の設計仕様は LMI で記述される（2.2.2節参照）。

5.2 吸収冷凍機

5.2.1 吸収冷凍器の原理

冷凍機は低温部から熱を奪い、高温部へ熱を放出する装置である。低温部で熱を奪うために冷媒の気化熱を利用するが、そのために低温部は圧力を下げ、冷媒の沸点を下げる。また、高温部で熱を放出するために、高温部の圧力を上げ、蒸気の凝縮温度を上げる。低圧の低温部から高圧の高温部へと冷媒蒸気を移すために、圧縮機を用いるのが一般的であるが、吸収冷凍器では圧縮器の代わりに、吸収剤を用いる。すなわち、低温部で生じた冷媒蒸気を吸収剤水溶液で吸収し、それをポンプで高温部へ運ぶ、本論文では、吸収剤と冷媒にそれぞれ LiBr と水を用いる吸収冷凍機を扱う。

5.2.2 吸収冷凍機の構成

本論文で扱う吸収冷凍機のプロセスフロー図を図 30に示す。この吸収冷凍機の主な要素は蒸発器、吸収器、発生器および凝縮器である。熱を奪いとる装置は蒸発器であり、熱を放出する装置は凝縮器である。熱を含んだ蒸気を移す役割をするのが吸収器と発生器である。個々の要素について以下順に説明する。

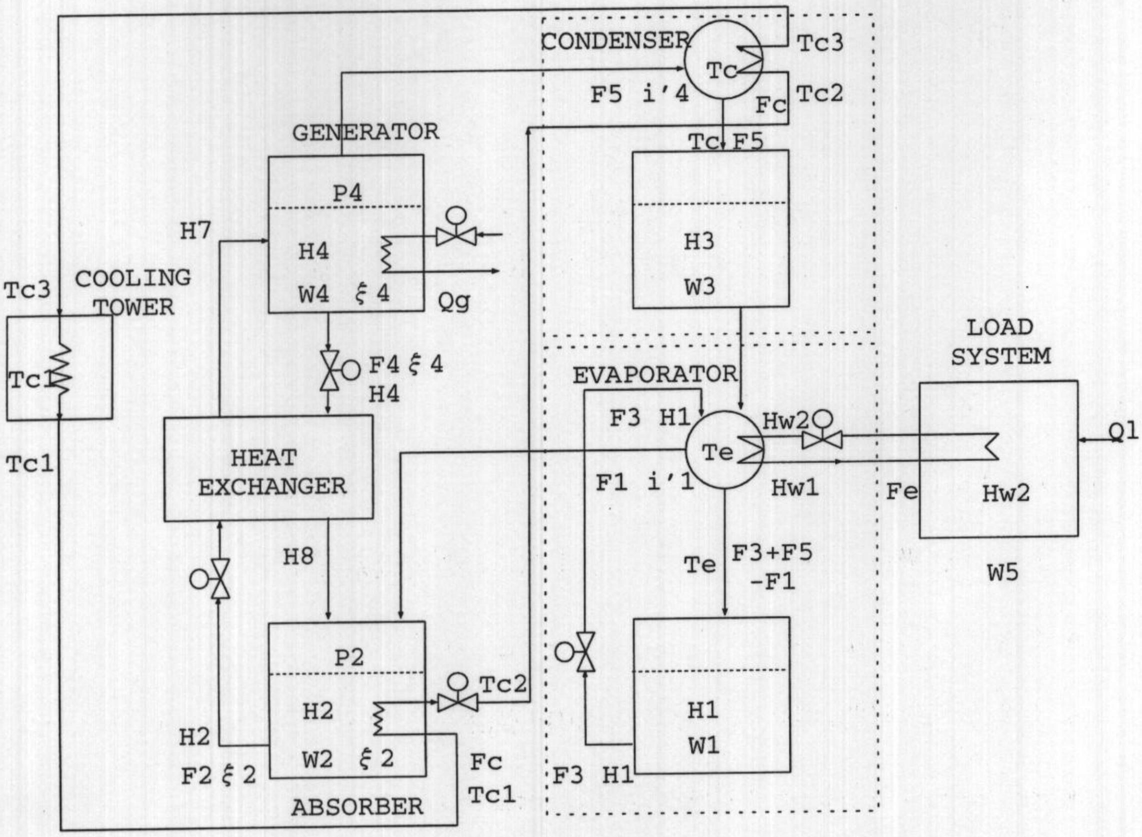

図 30 吸収冷凍機のプロセスフロー図

1. 蒸発器

負荷システムから熱を奪って温度が上昇した冷水が、ここで熱を放出して再び低温になり、負荷システムへ送られる。ここでは冷媒（水）が気化し熱を奪う。圧力はおよそ 10.0hPa であり、このときの水の蒸発温度は約 280K である。

2. 吸収器

蒸発器で発生した蒸気がここで LiBr 水溶液に吸収され、ポンプで発生器へと送られる。LiBr 水溶液は温度が低いほど、また濃度が高いほど、蒸気をよく吸収する。LiBr 溶液の温度が高くならないようにするために、冷却水で冷やす。

3. 発生器

   発生器で LiBr 水溶液はスチームで加熱され、水分を蒸発させる。こうして高濃度になった溶液は吸収器へ戻される。

4. 凝縮器

   ここで冷媒（水）が凝縮し熱を放出する。圧力はおよそ　93.3hPa であり、このときの水蒸気の凝縮温度は約 318K である。凝縮した水は蒸発器へ送られる。

5.2.3　ダイナミックモデル

吸収冷凍機のダイナミックモデルの導出にあたって、次の仮定をおく。

- 蒸発器、吸収器、発生器および凝縮器は集中定数系とする。
- 発生器と凝縮器のホールドアップは一定とする。
- 発生器と吸収器において、蒸気と LiBr 水溶液について気液平衡が成り立つ。
- 凝縮器では蒸気は露点温度で完全に凝縮する。
- 発生器において、加熱蒸気は完全に凝縮する。

以上の仮定のもとに導いた各要素のダイナミックモデルを以下に示す。各変数の説明は表 2,3にまとめた。

1. 吸収器

   - 物質収支

   $$\frac{dW_2}{dt} = F_1 + F_8 - F_2 \tag{26}$$

   - LiBr 収支

   $$\frac{dW_2\xi_2}{dt} = F_8\xi_8 - F_2\xi_2 \tag{27}$$

   - 熱収支

   $$\frac{dW_2H_2}{dt} = F_8H_8 + F_1i'_1 - F_2H_2 - Q_A \tag{28}$$

2. 発生器

- 物質収支

$$\frac{dW_4}{dt} = F_7 - F_4 - F_5 = 0 \tag{29}$$

- LiBr 収支

$$\frac{dW_4\xi_4}{dt} = F_7\xi_7 - F_4\xi_4 \tag{30}$$

- 熱収支

$$\frac{dW_4H_4}{dt} = F_7H_7 + Q_G - F_4H_4 - F_5i'_4 \tag{31}$$

3. 凝縮器

- 熱収支

$$F_5i'_4 = Q_C + F_5C_WT_C \tag{32}$$

$$\frac{dW_3H_3}{dt} = F_5H_C - F_5H_3 \tag{33}$$

4. 蒸発器

- 物質収支

$$\frac{dW_1}{dt} = F_5 - F_1 \tag{34}$$

- 熱収支

$$F_3H_1 + F_5H_3 + Q_E = F_1i'_1 + (F_3 + F_5 - F_1)H_E \tag{35}$$

$$\frac{dW_1H_1}{dt} = (F_3 + F_5 - F_1)H_E - F_3H_1 \tag{36}$$

5. 負荷システム

$$\frac{dW_5H_{W2}}{dt} = F_E(H_{W1} - H_{W2}) + Q_L \tag{37}$$

表 2 吸収冷凍機のダイナミックモデルの変数 (1)

F_1	$=$	吸収器で吸収される蒸気の流量	[kg/s]
F_2	$=$	LiBr 希水溶液流量	[kg/s]
F_3	$=$	蒸発器循環水流量	[kg/s]
F_4	$=$	LiBr 濃水溶液流量	[kg/s]
F_5	$=$	発生器発生蒸気流量	[kg/s]
F_C	$=$	冷却水流量	[kg/s]
F_E	$=$	供給冷水流量	[kg/s]
H_1	$=$	蒸発器の水のエンタルピー	[kJ/kg]
H_2	$=$	吸収器の LiBr 溶液のエンタルピー	[kJ/kg]
H_3	$=$	凝縮器の水のエンタルピー	[kJ/kg]
H_4	$=$	発生器の LiBr 溶液のエンタルピー	[kJ/kg]
H_{W1}	$=$	供給冷水のエンタルピー	[kJ/kg]
H_{W2}	$=$	戻り冷水のエンタルピー	[kJ/kg]
i'_1	$=$	蒸発器の蒸気のエンタルピー	[kJ/kg]
i'_4	$=$	発生器の蒸気のエンタルピー	[kJ/kg]

表 3 吸収冷凍機のダイナミックモデルの変数 (2)

P_2	=	吸収器の蒸気の圧力	[Pa]
P_4	=	発生器の蒸気の圧力	[Pa]
Q_L	=	冷房負荷	[kJ/s]
T_C	=	凝縮器蒸気温度	[K]
T_E	=	蒸発器蒸気温度	[K]
T_{C1}	=	吸収器へ供給される冷却水の温度	[K]
T_{C2}	=	凝縮器へ供給される冷却水の温度	[K]
T_{C3}	=	冷却塔へ供給される冷却水の温度	[K]
W_1	=	蒸発器内の水の重量	[kg]
W_2	=	吸収器内の LiBr 溶液の重量	[kg]
W_3	=	凝縮器内の水の重量	[kg]
W_4	=	発生器内の LiBr 溶液の重量	[kg]
ξ_2	=	吸収器 LiBr 溶液濃度	[kg/m³]
ξ_4	=	発生器 LiBr 溶液濃度	[kg/m³]

上記の１０個の微分方程式の中から、独立な７式を状態方程式として選んだ。状態変数は表 4の７つである。

表 4 状態変数

H_1	蒸発器の水のエンタルピー
H_2	吸収器の LiBr 水溶液のエンタルピー
H_3	凝縮器の水のエンタルピー
H_4	発生器の LiBr 水溶液のエンタルピー
W_2	吸収器のホールドアップ
ξ_2	吸収器の LiBr 水溶液の濃度
H_{W2}	負荷システムから戻される水のエンタルピー

吸収冷凍機の設計パラメータ（伝熱面積 A、総括伝熱係数 U、ホールドアップ W）の値を表 5に示す。また、シミュレーションに用いた各状態変数の初期値、および他の変数の値を表 6,7に示す。これらの値は文献 [26] より得た。シミュレーションではエンタルピーを次のように計算した。LiBr 水溶液のエンタルピーは実験データ [22] から得た次の回帰式 [26] を用いた。

$$H = (3.01\times10^{-2}+6.32\times10^{-5}T)\xi^2+(-3.05-1.48\times10^{-2}T)\xi+1.21\times10^2+1.04T$$

ただし、50 [kg/m³] $< \xi <$ 70 [kg/m³] の範囲とする。水のエンタルピーは温度 T[°C] から次式で計算する。

$$H = T + 100$$

表 5 設計パラメーター

構成要素	伝熱面積 [m²]	総括伝熱係数 $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\text{sec}^\circ\text{C}}\right]$	ホールドアップ [kg]
吸収器	105.27	0.09729	可変
発生器	31.72	0.19444	640
凝縮器	23.84	0.58816	120
蒸発器	37.45	0.46720	可変
熱交換機	6.73	0.04981	—

表 6 プロセス変数の初期値 (1)

F_1	0.1144	[kg/sec]
F_2	0.7305	[kg/sec]
F_3	2.0833	[kg/sec]
F_4	0.6161	[kg/sec]
F_5	0.1144	[kg/sec]
F_C	18.4333	[kg/sec]
F_E	16.7992	[kg/sec]
H_1	440.35	[kJ/kg]
H_2	255.79	[kJ/kg]
H_3	584.63	[kJ/kg]
H_4	358.40	[kJ/kg]
H_{W1}	447.68	[kJ/kg]
H_{W2}	463.62	[kJ/kg]
i_1	2925.9	[kJ/kg]
i_4	3101.4	[kJ/kg]

表 7 プロセス変数の初期値 (2)

P_2	885.3	[Pa]
P_4	7269.9	[Pa]
Q_L	267.78	[kJ/sec]
T_C	312.73	[K]
T_E	278.25	[K]
T_{C1}	301.63	[K]
T_{C2}	305.96	[K]
T_{C3}	309.69	[K]
W_1	143.17	[kg]
W_2	776.74	[kg]
W_3	120.00	[kg]
W_4	640.00	[kg]
W_5	640.00	[kg]
ξ_2	56.955	[kg/m^3]
ξ_4	67.527	[kg/m^3]

5.2.4 冷凍容量と容量制御

冷凍容量とは単位時間に奪うことのできる熱量のことであり、冷凍装置の能力をあらわす指標の一つである。吸収冷凍機の冷凍容量 Q_L は次式で決定される[22]。

$$Q_L = \frac{q_0 F_2(\xi_4 - \xi_2)}{\xi_4} \tag{38}$$

ここで、q_0, F_2, ξ_2 および ξ_4 はそれぞれ、冷媒蒸気 1kg あたりの冷凍能力、吸収器から発生器へと送られる LiBr 水溶液の流量、吸収器内の LiBr 水溶液の濃度および発生器内の LiBr 水溶液の濃度をあらわす。式 (38) より、LiBr 水溶液循環

量 F2 を変化させると冷凍容量 Q_L も変化することがわかる。しかし、このとき $(\xi_4 - \xi_2)/\xi_4$ も変化する。

図 31は供給冷水温度 T_{W1} を 280K としたときの定常状態における F_2 と Q_L の関係を図示したものである。F_2 と Q_L の関係は非線形であることがわかる。F_2 を制御入力として用いるために、F_2 と Q_L の関係を線形化する方法が研究されてきた [22]。一つの方法は、LiBr 水溶液循環量 F_2 が増えると有効伝熱面積が増えるような特別な構造を発生器に導入することである。また、加熱蒸気圧力を F_2 と連動して操作する方法もある。しかし、本論文では、発生器に特別な構造を用いたり、他の操作入力を用いることなく、溶液循環量 F_2 を操作入力として用いる制御方法を検討する。

図 31中に丸印で示した 3 点を、このシステムの代表的な動作点として選んだ。これらを動作点 H, 動作点 M および動作点 L として参照する。動作点 M は平均的な負荷に対する動作点である。また、動作点 H および L はそれぞれ、想定している最も高い負荷と最も低い負荷に対する動作点である。これらの動作点における F_2 と Q_L の値を表 8にまとめた。対象プロセスでは、溶液循環量 F_2 を入力、供給冷却水温度 T_{W1} を出力、負荷 Q_L の変動を外乱とみなすことができる。動作点 H,M および L において、F_2 をステップ状に 0.025[kg/sec] だけ増加および減少させたときの、供給冷却水温度 T_{W1} の開ループ応答のシミュレーション結果を図 32から図 37に示す。対象プロセスの定常ゲインが動作点によって大きく変わることがわかる。

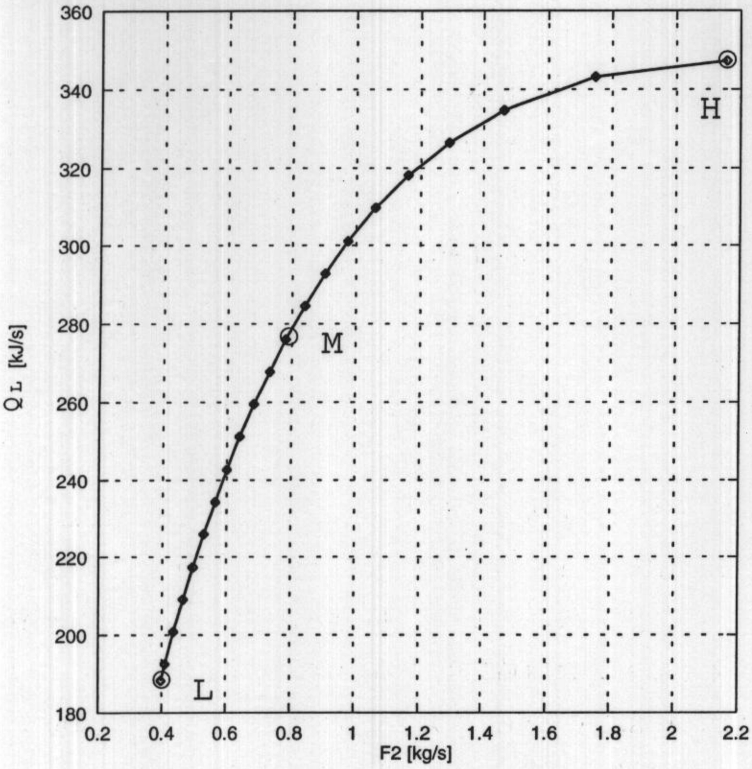

図 31　定常状態における Q_L と F_2 の関係

表 8　動作点 H,M,L における F_2 と Q_L の値

記号	F_2[kg/s]	Q_L[kJ/s]	
H	2.158	347	高冷房負荷
M	0.7304	268	中冷房負荷
L	0.3966	188	低冷房負荷

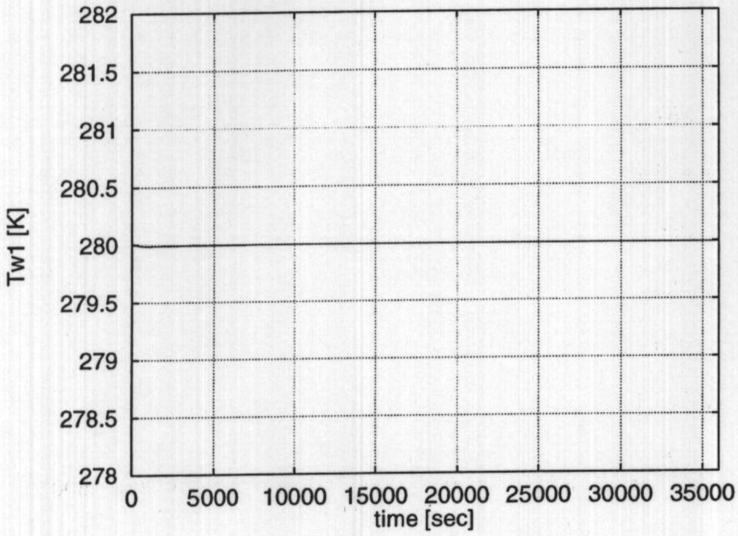

図 32 動作点 H で F_2 がステップ状に +0.025[kg/sec] 変化したときの開ループ応答

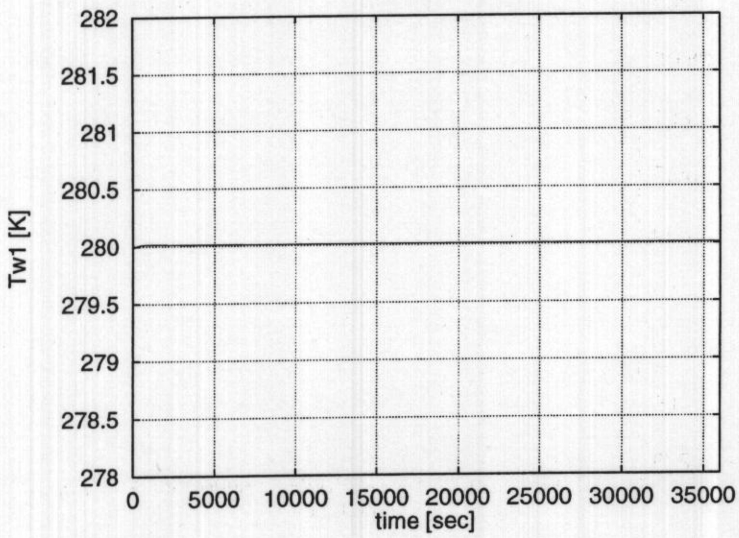

図 33 動作点 H で F_2 がステップ状に-0.025[kg/sec] 変化したときの開ループ応答

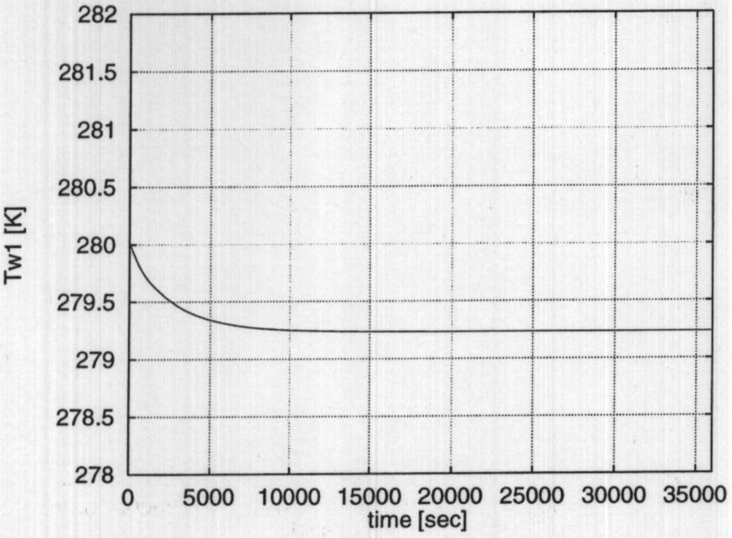

図 34 動作点 M で F_2 がステップ状に +0.025[kg/sec] 変化したときの開ループ応答

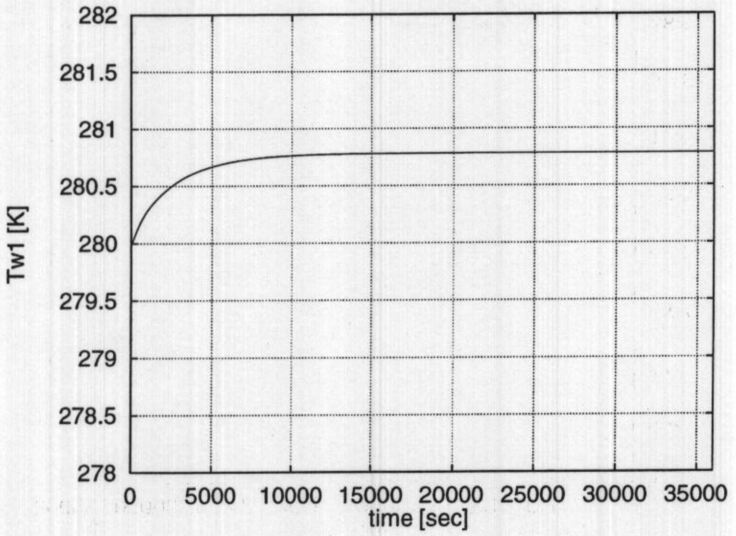

図 35 動作点 M で F_2 がステップ状に -0.025[kg/sec] 変化したときの開ループ応答

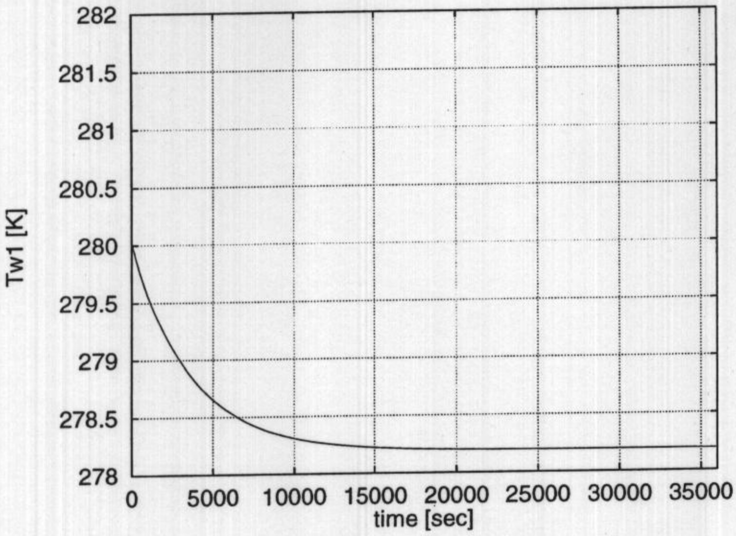

図 36 動作点 L で F_2 がステップ状に +0.025[kg/sec] 変化したときの開ループ応答

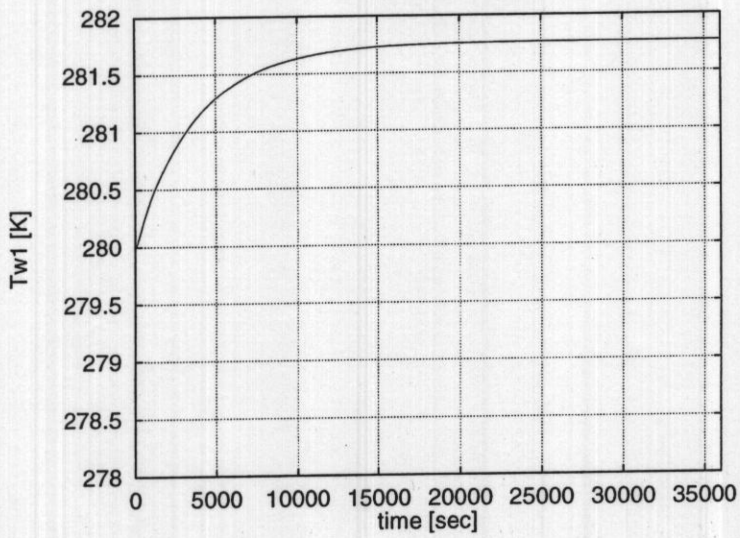

図 37 動作点 L で F_2 がステップ状に -0.025[kg/sec] 変化したときの開ループ応答

5.2.5 吸収冷凍機の微分包含によるモデル化

ステップ状の外乱に対して、定常偏差を零にするために、制御系は積分器を含む必要がある。そこで、吸収冷凍機に積分器を付加した拡大システムを考え、これをあらたに制御対象とみなすことにする (図 38参照)。

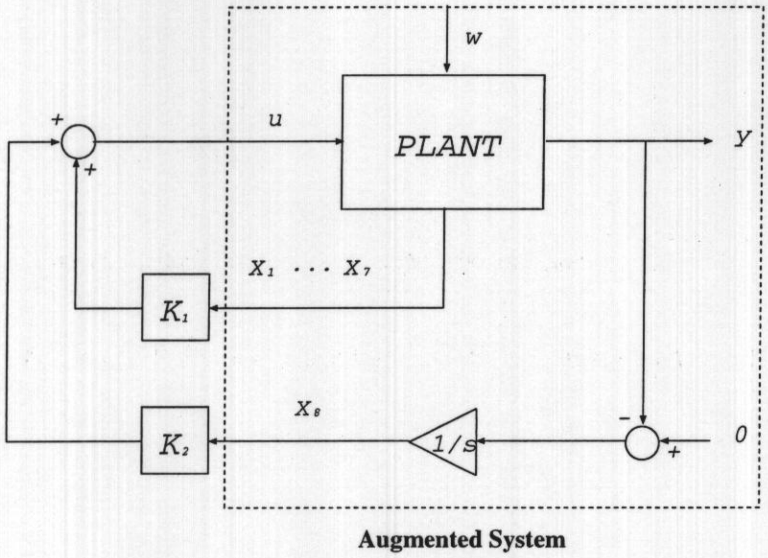

図 38 拡大システム

拡大システムは、積分器のダイナミクスと、物理的なモデリングによって導かれた吸収冷凍機のダイナミックモデル (26)-(37) をまとめて、次のようにあらわすことができる。

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, u, w) \\
y &= g(x, u, w)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

各変数の意味は次のとおりである。x は状態ベクトルであり、$x_1, \cdots, x_7$ はそれぞれ、$H_1, H_2, H_3, H_4, W_2, \xi_2, H_{W2}$ の動作点 M における値からの偏差をあらわす。x_8 は積分器の状態である。$w \in \Re$ は外乱であり、負荷 Q_L の動作点 M における値からの偏差をあらわしている。また、$u \in \Re$ は入力であり、LiBr 水溶液循環量 F_2 の動作点 M における値からの偏差をあらわしている。さらに、$y \in \Re$ は

出力であり、供給冷水温度 T_{W1} の動作点 M における値からの偏差をあらわしている。

動作点 M はシステム (39) の原点である。動作点 M は定常状態であるので、次式が成立する。

$$
\begin{aligned}
f(0,0,0) &= 0 \\
g(0,0,0) &= 0
\end{aligned}
$$

拡大システムに対する状態フィードバック則を設計するために式 (39) から、2.3 節の大域的線形化の手法で、線形時変システムを用いて制御系設計用のモデルをつくる。式 (39) を動作点 H,M,L でそれぞれ線形化をおこない、3 つの線形化システムの係数行列から、次の線形時変システムを得る。

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A(t)x + B_w(t)w + B_u(t)u, \\
y &= C(t)x + D_w(t)w + D_u(t)u,
\end{aligned} \tag{40}
$$

ここで、

$$
\begin{bmatrix} A(t) & B_w(t) & B_u(t) \\ C(t) & D_w(t) & D_u(t) \end{bmatrix} \in \Omega, for\ all\ t \geq 0. \tag{41}
$$

$$
\Omega = Co\left\{ \begin{bmatrix} A_H & B_{wH} & B_{uH} \\ C_H & D_{wH} & D_{uH} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_M & B_{wM} & B_{uM} \\ C_M & D_{wM} & D_{uM} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_L & B_{wL} & B_{uL} \\ C_L & D_{wL} & D_{uL} \end{bmatrix} \right\} \tag{42}
$$

ただし、Co は集合の凸包をあらわし、係数行列の添字 H,M,L はそれぞれ動作点 H,M,L における線形化システムの係数行列であることを示す。線形時変システム (40)(41)(42) は微分包含と呼ばれるものの一種である。

5.3 外乱から出力への L_2 ゲインを最小化する制御系設計

吸収冷凍機の制御目的は、負荷変動に対して供給冷水温度を一定に保つことである。本論文では負荷変動を外乱、供給冷水温度を出力とみなし、外乱から出

力への L_2 ゲインを最小化する状態フィードバックゲインを求めることにする。まず、L_2 ゲインに関する仕様のみで設計する。仕様は次のようにまとめられる。

- 仕様 0
  線形時変システム (40)(41)(42) を安定化し、動作点 M における外乱 w から出力 y への L_2 ゲインをある与えられた正数 γ より小さくすること。また, 外乱 w のステップ状の変化に対して出力 y に定常偏差があらわれないこと。

ここでは、外乱 w から出力 y への L_2 ゲインは、動作点 M における線形化システムで評価することにした。定常偏差に関する仕様は、拡大システムが積分器を含むので、既に満たされている。　仕様は次の LMI であらわされる（2.2参照）。

- 仕様 0 に対する十分条件をあらわした LMI

$$\begin{bmatrix} A_M P + P A_M^T + B_{uM} Y + Y^T B_{uM}^T + B_{wM} B_{wM}^T & (C_M P + D_{uM} Y)^T \\ C_M P + D_{uM} Y & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{43}$$

$$A_L P + P A_L^T + B_{uL} Y + Y^T B_{uL}^T \ < \ 0 \tag{44}$$

$$A_H P + P A_H^T + B_{uH} Y + Y^T B_{uH}^T \ < \ 0 \tag{45}$$

ここで、P は 8 次正定対称行列、Y は 8 次元行ベクトルである。式 (43)(44)(45) を制約条件として γ を最小化する問題は、固有値問題と呼ばれる 1 つの凸計画問題に帰着され、大域的な最適解を求めることができる（2.1参照）。数値計算によって得られた、γ の最小値 γ_o、ゲイン行列 K_o、また動作点 M における閉ループ系の減衰率、すなわち固有値の実部の最大値の絶対値 α_o は次の通りである。

$$\begin{aligned} \gamma_o &= 0.0337 \\ K_o &= \begin{bmatrix} 1835.3 & 7241.2 & 249.3 & 275.0 & 562.3 & -29661.7 & 1212.7 & 0.0 \end{bmatrix} \\ \alpha_o &= 1.876 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

得られた K_o は過大な操作入力を要求するものであり、実装上好ましくない。また、減衰率は 0 に近く応答が遅い。これらの問題を解決するために仕様をみなおす。

5.4 入力と減衰率に関する仕様を付加した設計

5.4.1 仕様の再検討

ゲイン行列がハイゲインになり、過大な操作入力が必要になることを避けるために、入力に関する制約を仕様として追加する。また、減衰率が小さくなりすぎることを防ぐために、減衰率に関する制約も仕様として追加する。仕様を動作点 M に対する仕様 1 と、線形時変システム (40)(41)(42) 全体に対する仕様 2 に分けて整理すると、次のようになる。

- 仕様 1

  動作点 M において次の条件が満たされること。i) 外乱 w から出力 y への L_2 ゲインがある与えられた正数 γ より小さくなる。ii) 減衰率がある与えられた正数 α より小さくなる。

- 仕様 2

  線形時変システム (40)(41)(42) に対して次の条件が満たされること。i) 閉ループ系が安定であること。ii) 初期状態 $x(0) = x_0$ のとき, ある与えられた正数 μ に対して $|u(t)| \leq \mu$ を満たすこと。iii) 外乱 w のステップ状の変化に対して出力 y に定常偏差が現れないこと。

定常偏差に関する仕様が、拡大システムが積分器を含むことから、既に満たされていることは、前述の通りである。

それぞれの仕様に対応する LMI を以下に示す（2.2参照）。

- 仕様 1 に対する十分条件をあらわした LMI

$$\begin{bmatrix} A_M P_1 + P_1 A_M^T + B_{uM} Y_1 + Y_1^T B_{uM}^T + B_{wM} B_{wM}^T & (C_M P_1 + D_{uM} Y_1)^T \\ C_M P_1 + D_{uM} Y_1 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{46}$$

$$A_M P_1 + P_1 A_M^T + B_{uM} Y_1 + Y_1^T B_{uM}^T < -2\alpha P_1 \tag{47}$$

- 仕様 2 に対する十分条件をあらわした LMI

$$\begin{aligned} A_L P_2 + P_2 A_L^T + B_{uL} Y_2 + Y_2^T B_{uL}^T &< 0 & (48) \\ A_M P_2 + P_2 A_M^T + B_{uM} Y_2 + Y_2^T B_{uM}^T &< 0 & (49) \\ A_H P_2 + P_2 A_H^T + B_{uH} Y_2 + Y_2^T B_{uH}^T &< 0 & (50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_2 & Y_2^T \\ Y_2 & \mu^2 I \end{bmatrix} &\geq 0 & (51) \\ \begin{bmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P_2 \end{bmatrix} &\geq 0 & (52) \end{aligned}$$

ここで、P_1,P_2 は 8 次正定対称行列、Y_1,Y_2 は 8 次元行ベクトルである。仕様 1 に対応した LMI:(46)(47) の解集合を C_1、仕様 2 に対応した LMI:(48)-(52) の解集合を C_2 とする。

5.4.2 設計結果と考察

吸収冷凍機システムに対して、仕様 1 および仕様 2 を満たす定数フィードバックゲイン行列を求める。ここでは、α と μ の値は固定し、外乱除去特性の指標である γ の値の最小値でフィードバックゲインの性能を評価する。始めに、2 つの仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための十分条件が成立する場合、すなわち C_1 と C_2 が共通点をもつ場合にゲイン行列を求める。γ の値がある値より小さくなると、C_1 と C_2 は共通点をもたなくなり、十分条件を満たす解は存在しなくなる。その場合に、2 つの仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための必要十分条件から、3.3.1節のアルゴリズムで

解を求めることによって、さらに小さなγの値をとるゲイン行列が得られることを示す。

実験ではα, μおよびx_0の値はそれぞれ次のように設定した。

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 0.00001 \\
\mu &= 5 \\
x_0 &= \begin{bmatrix} -0.0173 & 0.0774 & 0.1417 & -0.1174 & 0.6584 & 0.0658 & 0.0377 & 0.0000 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

C_1とC_2の共通点に基づく解法　C_1とC_2が共通点をもつとき、γを最小にする定数フィードバックゲイン行列を求める問題は固有値問題と呼ばれる1つの凸計画問題に帰着され、大域的な最適解を求めることができる。このときのγの最小値γ_s、求まったゲイン行列K_sおよび減衰率α_sは次の通りである。

$$
\begin{aligned}
\gamma_s &= 0.0371 \\
K_s &= \begin{bmatrix} 0.7240 & 2.9550 & 0.1428 & -0.1510 & 0.4183 & -12.4331 & 4.7444 & -0.0015 \end{bmatrix} \\
\alpha_s &= 0.000115
\end{aligned}
$$

C_1とC_2の共通解に基づかない解法　前節で得たγ_sは大域的最適解であるから、γの値がγ_sより小さくなると、C_1とC_2は共通点をもたなくなる。この場合に3.3.1節のアルゴリズムでゲイン行列を求める。設計は仕様を強めながら段階的におこなう。すなわち、初めに比較的大きなγの値で解を求め、その解を初期値としてより小さなγの値で解を求める、という操作を繰り返す。このように段階的な方法をとるのは、初めから強い仕様で解を求めようとすると、初期値の選び方が難しいからである。実際の設計は次のようにした。

- 第1段階
  C_1に最も近いC_2の点を初期値とし、$\gamma = 0.037$としてアルゴリズムを実行した。$k = 8$で解に収束し、求まったゲイン行列による閉ループ系のγの値（L_2ゲイン）は0.0320であった。

- 第 2 段階

  第 1 段階の解を初期値とし、$\gamma = 0.031$ としてアルゴリズムを実行した。$k = 33$ で解に収束し、求まったゲイン行列による閉ループ系の γ の値（L_2 ゲイン）は 0.0297 であった。

- 第 3 段階

  第 2 段階の解を初期値とし、$\gamma = 0.0296$ としてアルゴリズムを実行した。$k = 1000$ でも解に収束せず、このアルゴリズムでは解が求まらないものと判断し設計を終了した。

最終的に得られた γ の最小値 γ_n、求まったゲイン行列 K_n および減衰率 α_n は次の通りである。

$$
\begin{aligned}
\gamma_n &= 0.0297 \\
K_n &= \begin{bmatrix} 0.3490 & 3.1667 & 0.0332 & 0.0261 & 0.0409 & -7.7706 & 2.7256 & -0.0002 \end{bmatrix} \\
\alpha_n &= 0.0000370
\end{aligned}
$$

γ_n の値は γ_s の値の 80% になっている。

ゲイン行列の評価　前節で得られたゲイン行列を、シミュレーションで評価した。負荷を周期的に変動させ、出力の変化を調べた。負荷変動は周期 1200[sec]、振幅 18.8[kJ] の正弦波振動とした。動作点 M を中心とする負荷変動を図 39に示す。この負荷変動に対する出力 $y = T_{W1}$ の変化を図 40に示す。Q_L=228.0[kJ/sec] を中心とし、下限値が動作点 L となる負荷変動、Q_L=307.5[kJ/sec] を中心とし、上限値が動作点 H となる負荷変動に対する、出力 $y = T_{W1}$ の変化をそれぞれ図 41,42に示す。それぞれ、十分条件に基づき、C_1 と C_2 の共通点から設計したゲイン K_s を用いたときの結果を破線で、十分条件が成立せず、C_1 と C_2 が共通点をもたないとき、必要十分条件から 3.3.1節のアルゴリズムで求めたゲイン K_n を用いたときの結果を実線で示した。シミュレーションの結果を表 9にまとめた。この表は、負荷が変動し始めてから、1 時間の間の出力の最大値、最小値および変化幅を示している。表の最下段は K_s を用いた場合と K_n を用いた場合との出力

の変化幅の比である。動作点 M で、76.5%と最も大きな差があらわれているが、動作点 L,H でもこの値に近い差を得ている。これによって、十分条件が成立せず、C_1 と C_2 が共通点をもたない場合に、必要十分条件から、3.3.1節のアルゴリズムでゲイン行列を求めることによって、負荷変動に対して出力の変化がより小さいゲイン行列が得られることが分かる。図 43は動作点 M における負荷変動 (図 39) に対する入力 F2 の時間変化のグラフである。入力に対する制約を仕様に含めた結果、K_n を用いた場合も、K_s を用いた場合も共に許容可能な入力にすることができたことが分かる。

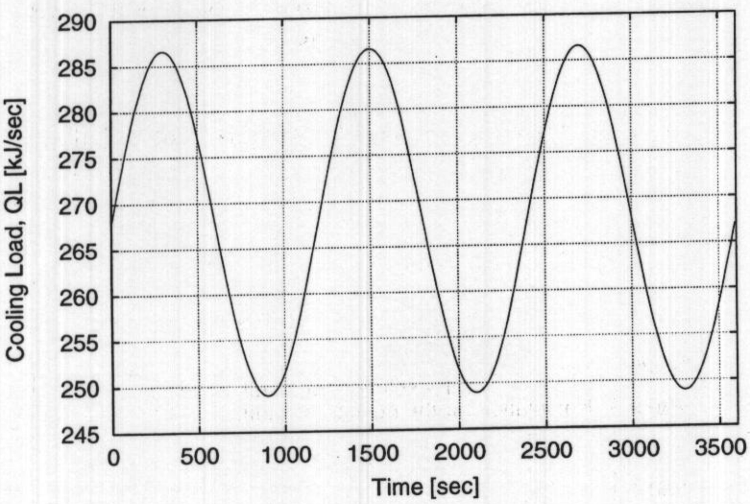

図 39 冷房負荷 Q_L の変動

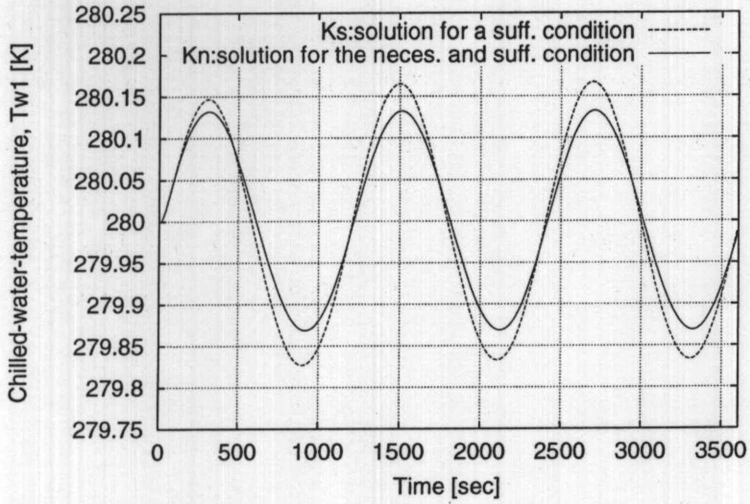

図 40 動作点 M を中心とした冷房負荷の正弦波状変動に対する供給冷水温度 T_{W1} の変化

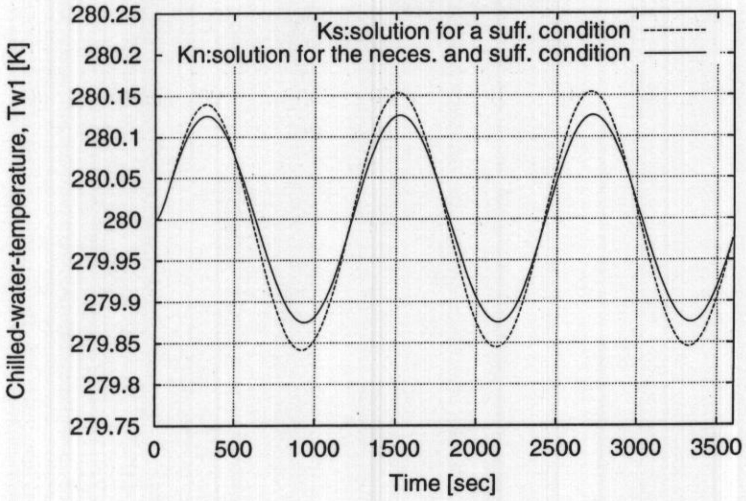

図 41 $Q_L = 228.0$[kJ/sec] を中心とした冷房負荷の正弦波状変動に対する供給冷水温度 T_{W1} の変化

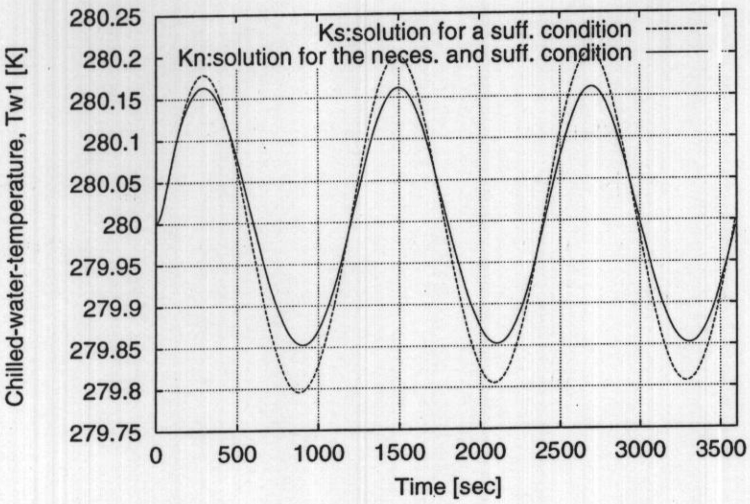

図 42 $Q_L = 307.5$[kJ/sec] を中心とした冷房負荷の正弦波状変動に対する供給冷水温度 T_{W1} の変化

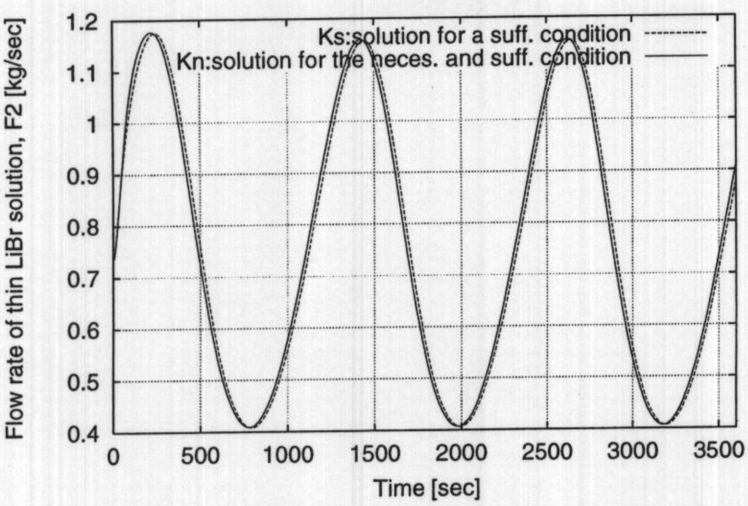

図 43 動作点 M を中心とした冷房負荷の正弦波状変動に対する操作入力 F_2 の変化

表 9 正弦波状の負荷変動に対する出力の変化幅の比較

	$\bar{Q}_L$：冷房負荷の平均値								
	$\bar{Q}_L = 228.0$			$\bar{Q}_L = 268.0$			$\bar{Q}_L = 307.5$		
	最大	最小	変化幅	最大	最小	変化幅	最大	最小	変化幅
Ks	280.15	279.84	0.31	280.17	279.83	0.34	280.20	279.80	0.40
Kn	280.13	279.88	0.25	280.13	279.87	0.26	280.16	279.85	0.31
変動幅の比率			80.7[%]			76.5[%]			77.5[%]

6. 結論

ある制御仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための条件がLMIであらわされれば、そのようなゲイン行列を求める問題は、LMIの実行可能解の一つを求める問題となり、凸計画問題の一つとして、大域的な最適解を高速に求めることができる。複数の制御仕様を満たすゲイン行列は、各仕様に対応したLMIの共通解を求めることにより、やはり凸計画問題の解として得ることができる。しかし、各仕様に対応したLMIが共通解をもつことは、複数の制御仕様を満たすゲイン行列が存在するための十分条件に過ぎない。

複数の制御仕様を満たすゲイン行列が存在するための必要十分条件は、LMIの変数の空間において、ゲイン行列に対応した線形部分空間（一つのゲイン行列を与える変数の集合）が、各仕様に対応したLMIの解集合と、それぞれ交わることである。この必要十分条件からゲイン行列を求める問題は、各仕様に対応したLMIの解集合が共通点をもたないとき、一般に非凸な問題であり、直接解くことは困難である。本論文では、解集合が共通点をもたないときに、必要十分条件からゲイン行列を求める一つのアルゴリズムを提案した。

制御対象の状態数と入力数がともに1である場合について、このアルゴリズムの理論的な解析をおこない、アルゴリズムが収束すること、および、初期値を解の十分近くに選べば、必ず解に収束することを示した。

このアルゴリズムが、制御系の設計法として有効であることを示すために、2つの制御対象について数値実験をおこなった。第1の制御対象は、制御系のベンチマーク問題として知られる倒立振子である。このシステムの状態数は4、入力数は1である。まず、振子軸の粘性摩擦係数と台車駆動系の等価粘性摩擦係数が不確かである場合に、閉ループ系の固有値の範囲を保証するロバスト制御系を設計した。不確かなパラメータの範囲を分割し、各区画で固有値の範囲を保証するLMIをつくり、その解集合をもとにゲイン行列を求める。解集合の共通点から求めたゲイン行列に較べて、提案したアルゴリズムで求めた、解集合が共通点をもたないときのゲイン行列は、許容可能な不確かさの範囲を約3倍にすることができた。またこの設計例から、仕様が3つ以上の場合にもこのアルゴリズムが適用可能であることが確認できた。

次に、倒立振子に対する制御仕様として、減衰率と入力に関する制限をそれぞれ与え、この2つの仕様を満たすゲイン行列を求めた。入力の上限値を固定したとき、各仕様に対応するLMIの解集合の共通点から求めたゲイン行列に較べて、提案したアルゴリズムで求めた、解集合が共通点をもたないときのゲイン行列は、減衰率を約2倍にすることができた。

第2の制御対象は吸収冷凍機である。このシステムの状態数は8、入力数は1である。物理モデルから得られた非線形システムを微分包含で近似して制御系設計用モデルをつくり、制御仕様として、すべての動作点で安定性と入力に対する制限が満たされること、1つの動作点（平均的な動作点）で減衰率に対する制限が満たされ、かつ負荷変動から出力変化へのL_2ゲインが最小であることという2つの仕様を与え、これら2つの仕様を満たすゲイン行列を求めた。入力の上限値と減衰率の下限値を固定したとき、各仕様に対応するLMIの解集合の共通点から求めたゲイン行列に較べて、提案したアルゴリズムで求めた、解集合が共通点をもたないときのゲイン行列はL_2ゲインを2割小さくできた。

これらの数値実験の結果から、次のことがいえる。提案したアルゴリズムは、制御対象の状態数が1ではない一般の場合にも、十分条件が解をもたないときに、必要十分条件を満たす解を見い出すことが期待できる。この場合、十分条件からゲイン行列を求めていた従来法に較べて、よりよい制御性能をもつ制御系を設計することができる。

制御対象の状態数と入力数がともに1であるという場合以外の一般の場合について、提案したアルゴリズムの収束性を理論的に考察することは今後の課題である。

謝辞

本研究を進めるにあたり, 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科西谷 紘一教授 には指導教官として, 御指導いただけたことに深く心から感謝いたします.

また, 本論文全般にわたり多大なる御指導と適切な助言を頂いた奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科 山下裕 助教授に深く心から感謝いたします.

私には不慣れな化学プロセスに対して適切な助言と御指導をして下さった奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科黒岡　武俊助手に心から厚くお礼を申し上げます.

最後に, 本論文をまとめるためにリサーチ・ミーティング等で有益な御意見を頂いた奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科システム制御・管理講座の学生の方々に心から深い感謝とお礼を申し上げます.

参考文献

[1] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM (1994)

[2] J. David and B. D. Moor: Designing Reduced Order Output Feedback Controllers using a Potential Reduction Method, Proc. ACC94, pp. 845-849 (1994)

[3] K. C. Goh, L. Turan and M. G. Safonov: Biaffine Matrix Inequality Properties and Computational Methods, Proc. ACC94, pp. 850-855 (1994)

[4] L. E. Ghaoui, F. Oustry and M. AitRami: A Cone Complementarity Linearization Algorithm for Static Output-Feedback and Related Problems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 42, No. 8, pp. 1171-1176 (1997)

[5] K. M. Grigoriadis and R. E. Skelton: Low-order Control Design for LMI Problems Using Alternating Projection Methods; Automatica, Vol. 32, No. 8, pp. 1117-1125 (1996)

[6] R. A. Horn and C. R.Johnson: MATRIX ANALYSIS; Cambridge University Press (1985)

[7] A. Isidori: Nonlinear Control Systems: An Introduction; Springer-Verlag, NewYork, USA (1985)

[8] T. Iwasaki and R. E. Skelton: The XY-centering Algorithm for The Dual LMI problem: A New Approach to Fixed-order Control Design; Int. J. Control, Vol. 62, No. 6, pp. 1257-1272 (1995)

[9] M. V. Kothare, V. Balakrishnan and M. Morari: Robust Constrained Model Predictive Control using Linear Matrix Inequalities; Automatica, Vol. 32, No. 10, pp. 1361-1379 (1996)

[10] Akihiro Ohgata, Yuh Yamashita and Hirokazu Nishitani: Robust Control of An Absorption Heat Pump System; Computers & Chemical Engineering, Vol. 21, Supplement, pp. S131-S136 (1997)

[11] C. Webb and M. Morari: Identification of Uncertainty Bounds for Robust Control with Applications to a Fixed Bed Reactor; Ind. and Eng. Chem. Res. , Vol. 34, 1743-1754 (1995)

[12] 岩崎徹也: LMI と制御; 昭晃堂, 東京 (1997)

[13] 内田健康: ゲインスケジューリング; 計測と制御, Vol.34, No.3, pp. 182-187 (1995).

[14] 大形明弘, 山下裕, 西谷紘一: LMI を用いた吸収冷凍器の制御系設計; 化学工学論文集, Vol. 24, No. 2, pp. 291-297 (1998)

[15] 大形明弘, 山下裕, 西谷紘一: 複数の LMI 条件を満たす状態フィードバックゲイン行列の設計法; 電気学会平成 10 年度電子・情報・システム部門大会講演論文集, pp. 465-468 (1998)

[16] 小原敦美, 杉江俊治: 凸最適化を用いた制御系設計; システム／制御／情報, Vol.38, No.3, pp. 139-146(1994)

[17] 小原敦美: 数値的最適化を用いた制御系設計法; システム制御情報チュートリアル講座’９４ テキスト (1994)

[18] 小原敦美, 増淵泉: 行列不等式と制御系設計法の展開; システム／制御／情報, Vol.41, No.1, pp. 28-34 (1997)

[19] 金田聡, 小原敦美, 須田信英: LMI の解集合の性質を考慮した状態フィードバックゲインの設計; 第 39 回システム制御情報学会研究発表講演会資料, pp. 291-292 (1995).

[20] 木村英紀, 藤井隆雄, 森武宏: ロバスト制御; コロナ社, 東京 (1994).

[21] 佐伯正美: 制御系設計 第 8 章; システム制御情報ライブラリー 10 朝倉書店, 東京 (1994).

[22] 高田秋一: 吸収冷凍機; 吸収冷凍協会, 東京 (1982)

[23] 中村秀雄, 内田主幹: 統計モデルによる火力発電プラントの解析と制御; 計測と制御, Vol.34, No.1, pp. 9-15 (1990).

[24] 藤岡久也, 岩崎徹也: BMI:非凸行列不等式に基づく制御系設計への挑戦; 計測と制御, Vol.36, No.11, pp. 762-767 (1997).

[25] 増淵泉, 久米彩登, 示村悦二郎: スプライン型リャプノフ関数を用いたパラメータ依存 LMI の求解; 第 42 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, pp. 231-232 (1998).

[26] 三渕裕之: 吸収冷凍機システムのプラントワイド制御系設計; 平成 3 年大阪大学基礎工学研究科修士論文 (1991).

[27] 山上誠, 杉江俊治: パラメータ依存 LMI 問題の解法とそのゲインスケジューリングへの応用; 第 42 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, pp. 229-230 (1998).

[28] 吉瀬章子: 凸計画問題に対する最適化手法-内点法と解析的中心; システム・制御・情報, Vol. 38, No. 3, pp. 155-160 (1994).

付録

A. 複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求める他の方法

この節では、これまでに提案されているアルゴリズムの中で、複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めるために用いることのできるものを挙げ、本研究で提案する方法との比較をおこなう。

A.1 幾何的なアルゴリズム

複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めるための幾何学的なアルゴリズムが提案されている [19]。収束性については何も示されていないが、多くの数値例で解が得られている、と報告されている。

制御対象が式 (10) で与えられているとする。

A.1.1 アルゴリズム

基本的な考え方 このアルゴリズムも空間 Σ で、ゲイン行列に対応した集合を、仕様に対応した LMI の解集合との距離に基づいて更新しながら、すべての仕様を満たすゲイン行列を求めようとするものである。

このアルゴリズムでは、LMI の解集合はすべて凸錐であらわされ、実際のゲイン行列の探索は、Σ の中の超平面 χ 上でおこなわれる。超平面 χ は次式で定義される。

$$\chi = \{(P, Y) \in \Sigma : \mathrm{Tr}(-\begin{bmatrix} \frac{A+A^T}{2} \\ B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}) + c = 0\}$$

ここで、c は適当な正の数である。c が 0 のとき、χ の法ベクトル方向の半空間は、安定化フィードバックゲイン行列の存在領域になっている。それゆえ、ゲイン行列の探索を χ 上に制限したとしても、一般性は失われない。ただし、$L(K)$

の存在範囲も、この安定化フィードバックゲイン行列の存在領域に制限される。$L(K)$ をそのように再定義する。

$$L(K) := \{(P, Y) \in \Sigma^+ : AP + PA^T + BY + Y^T B^T < 0\}$$

仕様に対応したLMIの解集合の等価変換　まず、仕様に対応したLMIの解集合をすべて凸錐であらわす。ある仕様に対応したLMIが次式で与えられたとする。

$$F(P, Y) < 0$$

このLMIの解集合を C とする。C が凸錐ではないとき、次のようにして得られる集合 $\tilde{C}$ は C を含む最小の凸錐である。

パラメータ $s \in \Re,\ s > 0$ を新たに導入したLMI:

$$\tilde{F}(\tilde{P}, \tilde{Y}, s) := sF(P, Y) < 0,\ \tilde{P} := sP, \tilde{Y} := sY$$

$\tilde{C}$ を次式で定義する。

$$\tilde{C} := \{\tilde{F}(\tilde{P}, \tilde{Y}, s) < 0, \exists s > 0\}$$

アルゴリズム　説明を簡略にするために、仕様の数は2であるとする。ゲインの初期値 $K^{(0)}$ は仕様 $\mathcal{S}_1$ を満たすと仮定し、$L^\chi(K^{(0)}) \bigcap \tilde{C}_1^\chi$ に属する1点 $Q^{(0)}$ は既知であるとする。$i \leftarrow 0$ とする。図44参照。ただし、記号の意味は次の通り、

$$\tilde{C}_i^\chi := \tilde{C}_i \bigcap \chi \ (i = 1, 2)$$

$$L^\chi(K^{(i)}) := L(K^{(i)}) \bigcap \chi,\ L^\chi(K^{(i+1)}) := L(K^{(i+1)}) \bigcap \chi$$

- step 1
  仕様 $\mathcal{S}_2$ が満たされているなら終了。そうでなければ、$d(\tilde{C}_2^\chi, L^\chi(K^{(i)}) \cap B(Q^{(i)}, r))$ を求め、その解を与える C_2 の点を $Q^{(i+1)}$ とする。$Q^{(i+1)}$ に対応するゲイン行列を $K^{(i+1)}$ とする。$i \leftarrow i + 1$。

- step 2
  仕様$\mathcal{S}_1$が満たされているなら終了。そうでなければ、$d(\tilde{C}_1^{\chi}, L^{\chi}(K^{(i)}) \bigcap B(Q^{(i)}, r))$を求め、その解を与える$C_1$の点を$Q^{(i+1)}$とする。$Q^{(i+1)}$に対応するゲイン行列を$K^{(i+1)}$とする。$i \leftarrow i+1$として step 1へ。

ただし、$B(x,r)$はΣの点xを中心とした、半径rの球の球面と内部をあらわす。

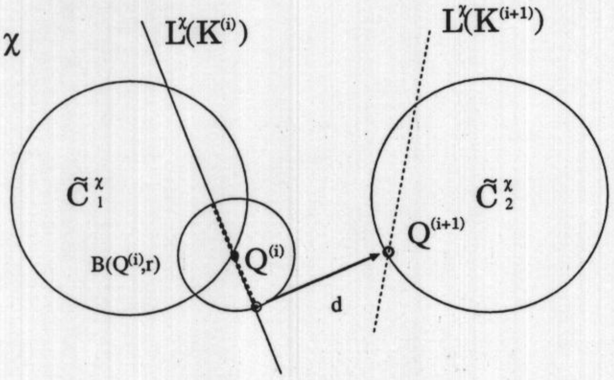

図 44 金田らのアルゴリズム

A.1.2 アルゴリズムの比較

ここでは、本研究で提案したアルゴリズムとこの章で紹介した文献[19]のアルゴリズムとの関係について述べておく。2つのアルゴリズムの相違は、ある仕様に対応したLMIの解集合が凸錐であるときに、$L(K)$と解集合、あるいは解集合と解集合の間の距離をどのように定義するか、という問題に対する対応の違いから生まれている。この問題が生じるのは、凸錐と凸錐（線形部分空間も凸錐の一種である）の間には、普通の意味の距離が定義できないからである（図45参照)。

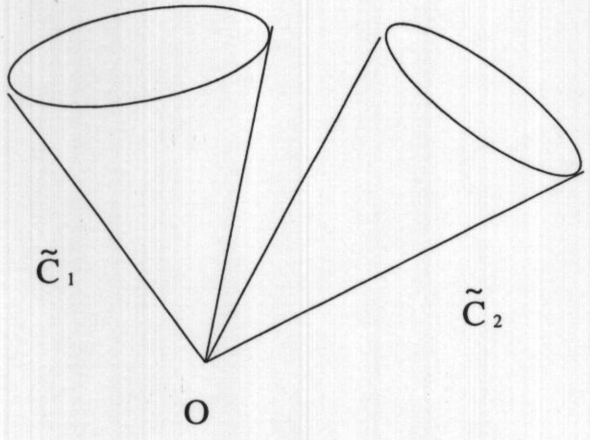

図 45 凸錐の間には距離が定義できない

本論文で提案した方法では、LMI の解集合が凸錐であるときに、$L(K)$ との距離を定義するために、その解集合を錐ではない閉凸集合に変換した（図 46,47参照)。文献 [19] では逆に、錐ではない凸集合 C をそれを含む最小の凸錐 $\tilde{C}$ に変換する（図 48,49参照)。以後、任意の凸集合 S に対して、S を含む最小の凸錐を $\tilde{S}$ とあらわすことにする。

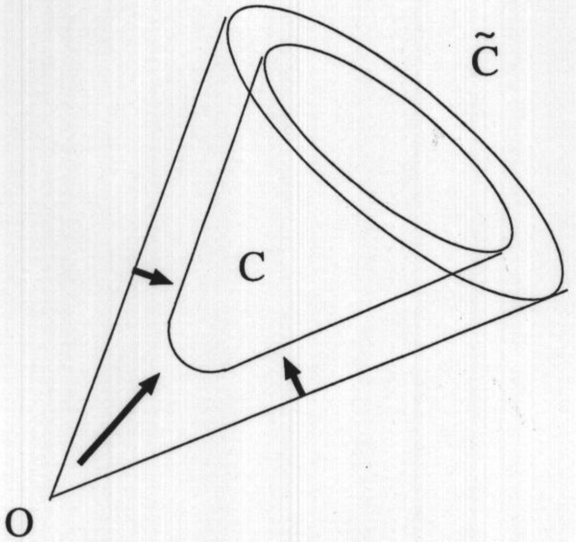

図 46 本研究の方法：凸錐を錐ではない凸集合へ変換

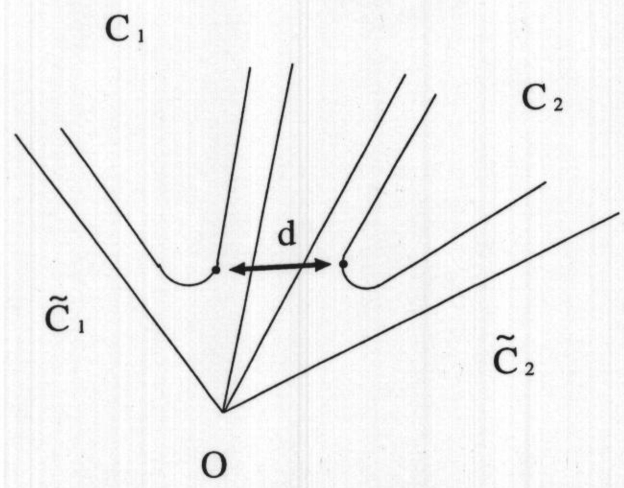

図 47 本研究の方法：錐ではない凸集合の間の距離

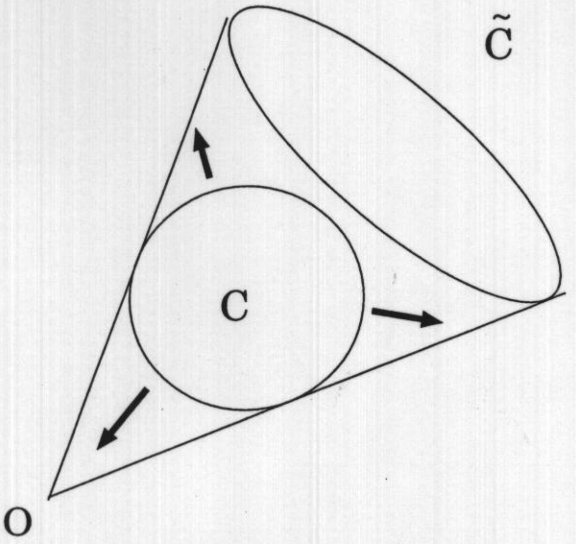

図 48　金田らの方法：錐ではない凸集合を凸錐へ変換

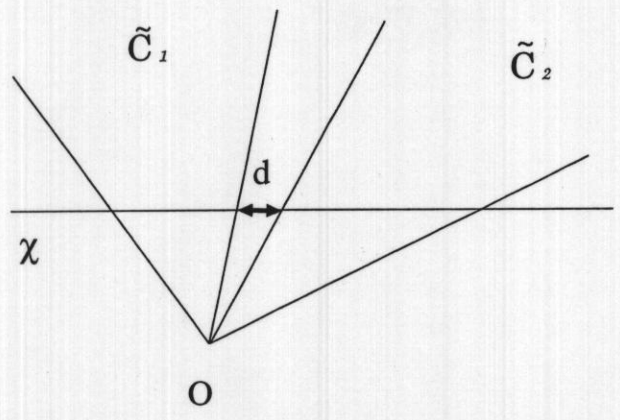

図 49　金田らの方法：超平面 $\mathcal{L}$ 上での凸錐の間の距離

一般に、超平面 χ 上で $L(K) \cap \chi$ に最も近い $\tilde{C} \cap \chi$ の点 $\tilde{Z}$ が、Σ^+ 内で $L(K)$ に最も近い C の点 Z の χ 上への射影（原点と Z を結ぶ直線と χ の交点）とは一致しないので、両者は異なる結果を与えることになる。

文献 [19] のアルゴリズムは $r=0$ のとき、3つの凸集合 $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \mathcal{L}$ の共有点を求めるという凸計画問題を解くことになる（考慮すべき仕様が2つの場合。2つの仕様に対応した LMI の解集合をそれぞれ C_1, C_2 とする）。この問題を χ 上の凸集合 $\tilde{C}_1 \cap \chi, \tilde{C}_2 \cap \chi$ に対する反復射影法によって解くことになる。したがって $r=0$ のとき、アルゴリズムの収束性は保証され、凸集合 C_1, C_2 が共有点をもたない場合でも、$\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ が共有点をもつならば必ず解を得ることができるという長所がある（図 50参照）。

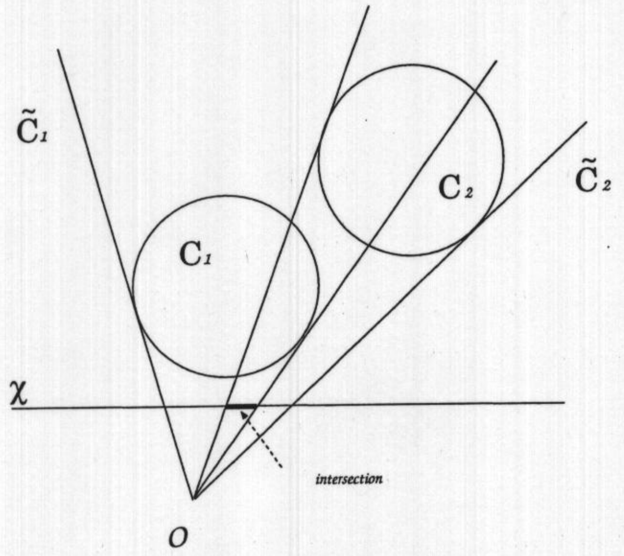

図 50　金田らの方法：χ 上に射影したとき交わる解集合

しかし $r>0$ とすると、アルゴリズムの収束性は保証されず、$\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ が共有点をもつ場合にも、解を得る保証もなくなってしまう。また文献 [19] では、$\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ が χ 上で共有点をもたないとき、$\tilde{C}_1 \cap \chi, \tilde{C}_2 \cap \chi$ と $L(K) \cap \chi$ が交わるような K を求める問題に対して、解への収束性は示されていない。一方、本論文で提案した方法では、$n=m=1$ という特殊な場合についてではあるが、C_1 と C_2 が Σ^+ 上で共有点をもたないときに、C_1 と C_2 が $L(K)$ と交わるような K を求める問題に関して、局所的な解への収束性を示すことができる。これは、本論文で提案した方法が、文献 [19] の方法に較べて単純であり、理論的な解析が比較的容易で

あることが原因であると思われる。

A.2 反復射影法の拡張による方法

本節では、複数の仕様を満たす状態フィードバックゲイン行列を求める問題を、ランク条件つきの LMI 問題に帰着させて、反復射影法でゲイン行列を求める方法を紹介する。

A.2.1 ランク条件つき LMI 問題

BMI を解く問題ははランク条件つきの LMI 問題に帰着されることがある。ランク条件つき LMI 問題は、一般に次のように書ける。

$$\text{Find } x \ \text{ s.t. } \mathrm{rank} R(x) = p,\ L(x) > 0$$

ここで、p は与えられた整数であり、$R(x), L(x) = L^T(x)$ は変数 x に関してアファインな行列である。例えば、安定化や H^∞ 制御のために、ある次数の出力フィードバックコントローラを求める問題は、

$$\mathrm{rank} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} = p$$

という条件と、ある LMI を満たす正定対称行列 X, Y を求める問題に定式化される。

A.2.2 複数の仕様を満たす状態フィードバックゲインを求める問題

LMI で与えられた 2 つの仕様を満たす、定数状態フィードバックゲイン行列を求める問題は、次式を満たす n 次正定対称行列 P_1, P_2 と $m \times n$ 型行列 Y_1, Y_2 を求める問題に帰着される。ただし、制御対象の状態変数の数を n、入力数を m とする。

$$F_1(P1, Y1) < 0,\ F_2(P2, Y2) < 0 \tag{53}$$

$$Y_1 P_1^{-1} = Y_2 P_2^{-1} \tag{54}$$

非凸な制約式 (54) は $m=1$ のとき次式と等価である。

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} P_1 & Y_1^T \\ P_2 & Y_2^T \end{bmatrix} = n \tag{55}$$

以下で、このことを示す。式 (55) は次式と等価である。

$$\begin{bmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \end{bmatrix} \in \mathrm{Image}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

なぜなら、$P_1, P_2 > 0$ より、

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = n$$

だからである。したがって、式 (55) が成立することと、次式を満たす $1\times n$ 型行列 K が存在することとは等価である。

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} K^T = \begin{bmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \end{bmatrix}$$

これは次式が成り立つことを意味する。

$$Y_1 = KP_1,\ Y_2 = KP_2$$

K が求めるべき状態フィードバックゲイン行列である。

$m>1$ の場合には、式 (54) は次式と等価である [18]。

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_m \otimes P_1 & cs(Y_1^T) \\ I_m \otimes P_2 & cs(Y_2^T) \end{bmatrix} = mn$$

A.2.3 ランク条件つき LMI 問題の解法

ランク条件つき LMI 問題の解法として、線形化法、反復射影法などが知られているが、ここでは反復射影法について述べる。式 (53)(54) を $m=1$ のときに解く場合について説明する。

次の 2 つの集合を考える。

$$\mathcal{C}=\left\{\left[\begin{array}{cc} P_1 & Y_1^T \\ P_2 & Y_2^T \end{array}\right] : F_1(P_1,Y_1)<0,\ F_2(P_2,Y_2)<0\right\}$$

$$\mathcal{R}=\left\{Q\in\Re^{2n\times(n+1)} : \mathrm{rank}(Q)=n\right\}$$

問題は次式を満たす $Q_{feas}\in\Re^{2n\times(n+1)}$ を見い出すことである。

$$Q_{feas}\in\mathcal{C}\cap\mathcal{R}$$

反復射影法は次のようなアルゴリズムである [12]。

1. 初期化 : $k=0$ とする.$Q_0\in\mathcal{C}$ を適当に定める.
2. $\hat{Q}_{k+1}=\mathcal{P}_{\mathcal{R}}Q_k$.
3. $Q_{k+1}=\mathcal{P}_{\mathcal{C}}\hat{Q}_{k+1}$. step 2 へ.

ここで $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ は集合 $\mathcal{S}=\mathcal{C}$ または $\mathcal{R}$ への直交射影をあらわす。すなわち、任意の行列 Q^0 に対して、$\mathcal{P}_{\mathcal{S}}Q^0$ は集合 $\mathcal{S}$ に属する行列のうち最も Q^0 に近いものである。これを式であらわすと

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}}Q^0=\arg\min\left\{||Q-Q^0||_F : Q\in\mathcal{S}\right\}$$

$\mathcal{C}$ と $\mathcal{R}$ がともに凸集合であるとき、このアルゴリズムは大域的な解への収束性が保証される。すなわち、もし共有点があれば、任意の初期値に対して共有点の1つに収束する。共有点がなければ、$\mathcal{C}$ と $\mathcal{R}$ の間を往復する平衡状態に達する。

複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲインを求める問題では、$\mathcal{C}$ は凸集合であるが、$\mathcal{R}$ は凸集合ではない。この場合、このアルゴリズムは局所的な解への収束性のみが保証される。

$\mathcal{C}$ への直交射影 $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}\hat{Q}_{k+1}$ は、LMI を解くことにより求めることができる。$\mathcal{R}$ への直交射影 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}Q_k$ は唯一には定まらないが、その一つは次式で求めることができる [12][5]（証明は B.1）。

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}Q = V\Sigma_1 W^T \tag{56}$$

ただし、行列 V, W は、Q の特異値分解

$$Q = V\Sigma W^T$$

によって定める。また、Σ_1 は Σ の $(n+1, n+1)$ 要素をゼロで置き換えた行列である。

A.2.4 実験結果

倒立振子システムに対して、4.3.1節と同じ仕様を設定する。ランク条件つきのLMI 問題に帰着させ、反復射影法で解いた。

図 51は $\alpha = 0$ のときの、反復射影法の実行結果である。横軸は反復回数を、縦軸は $\mathcal{C}$ と $\mathcal{R}$ の間の距離をあらわす。初期値は $\mathcal{C}$ の内部の点を適当に選んだ。200回の反復射影（アルゴリズムの step2 と step3 を別々に数えた）では $\mathcal{C}$ と $\mathcal{R}$ の共有点に達していない。

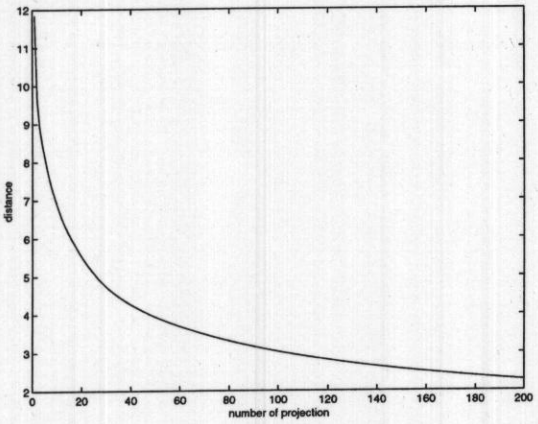

図 51 反復射影アルゴリズムのふるまい

図 52は同じ条件で、20000 回反復したときの結果を 100 点おきにプロットしたグラフである。やはり、$\mathcal{C}$ と $\mathcal{R}$ の共有点に達していない。

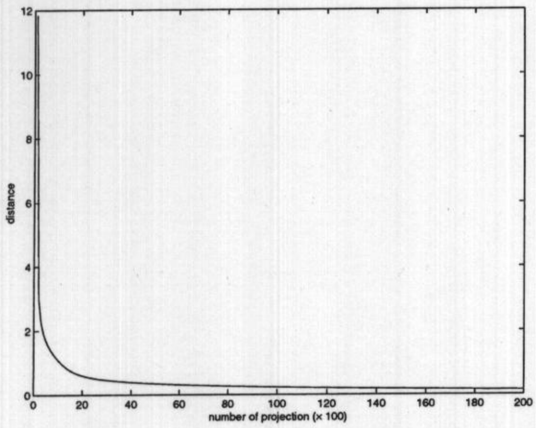

図 52 射影アルゴリズムのふるまい（1万回実行）

異なる初期値で同様な実験を繰り返したが、解に収束しなかった。

A.2.5 評価

倒立振子システムに対して、4.3.1では次の結果を得ている。C_1 と C_2 の共有点を用いる方法では $\alpha = 0.46$ まで、提案した方法では $\alpha = 0.91$ まで保証できる状態フィードバックゲインが求まった。今回の実験では $\alpha = 0$ で実験をしたが解に収束させることができなかった。これが平衡状態にあることを意味するかどうかも、判定することができない。

結果は示していないが、提案したアルゴリズムで求めた解の近傍を初期値に選んだ実験もおこなった。本節で取り上げた反復射影法も、局所的な収束性は保証できるのであるから、初期値を解の十分近くに選べば、収束するようにできるはずである。しかしこの実験では、$\mathcal{C}$ への直交射影を求める問題で最適値を求めることができず、$\mathcal{C}$ と $\mathcal{R}$ の間の距離が単調に減少しないという現象が起こった（このアルゴリズムでは、理論的には距離は必ず単調に減少する）。$\mathcal{C}$ への直交射影を求める問題は LMI 問題であるから、必ず大域的な最適解が求まるはずであるが、なんらかの理由で数値的な不安定が生じた結果であると思われる。この正確な理由もいまのところ不明である。

B. その他

B.1 ランク条件によって定まる集合への直交射影

$M_{n,m}$ を $n \times m$ 型の複素行列の集合とする。$A \in M_{n,m}$ のランクが $k > 0$ であるとき、次の条件を満たす行列 $A_1 \in M_{n,m}$ を求める問題を考える。

$$||A_1 - A||_F \leq ||B - A||_F,\ \forall B \in \{M \in M_{n,m} | \mathrm{rank} M = k_1\} \tag{57}$$

ただし、k_1 は $k_1 < k$ を満たす数である。

A の特異値分解が次式であらわされるとする。

$$A = V \Sigma W^*$$

また、Σ の非ゼロの対角要素を $\sigma_1 > \cdots > \sigma_k$ とする。次式の A_1 は条件 (57) を満たす。

$$A_1 = V \Sigma_1 W^*$$

ただし、Σ_1 は Σ の対角要素の初めの k_1 個 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{k_1}$ だけを残し、残りの $\sigma_{k_1+1}, \cdots, \sigma_k$ をゼロで置き換えた行列である。

以下ではこのことを証明する。証明には次の事実 [6] を用いる。$A, B \in M_{n,m}, q = min\{n, m\}$ とする。また、U_n で n 次ユニタリ行列をあらわす。

$$\min\{||A - UBW^*||_F\ :\ U \in U_n,\ W \in U_m\} = \left[\sum_{i=1}^{q} [\sigma_i(A) - \sigma_i(B)]^2\right]^{1/2} \tag{58}$$

ここで、行列 M に対して $\sigma_i(M)$ は M の i 番目の特異値をあらわす。ただし、特異値は降順に順序付けられているものとする。

$$\begin{aligned}
&\min\{||A - B||_F^2\ :\ B \in M_{n,m},\ \mathrm{rank} B = k_1\} \\
&= \ \min\{||A - V\hat{\Sigma}W^*||_F^2 : V \in U_n,\ W \in U_m,\ \hat{\Sigma} \in M_{n,m} \text{は対角行列},\ \mathrm{rank}\hat{\Sigma} = k_1\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k_1}[\sigma_i(A) - \sigma_i(\hat{\Sigma})]^2 + \sum_{i=k_1+1}^{k}\sigma_i(A)^2 \\
&\geq \sum_{i=k_1+1}^{k}\sigma_i(A)^2
\end{aligned}
$$

等号は次の場合に成立する。

$$
\sigma_i(\hat{\Sigma}) = \begin{cases} \sigma_i(A) & (1 \leq i \leq k_1) \\ 0 & (k_1 < i \leq q) \end{cases}
$$

B.2 Σにおける2点間の距離の計算

2つの凸集合 $C_1, C_2 \subset \Sigma$ の距離は次式で定義された。

$$
d(C_1, C_2) \triangleq \min_{Z_1 \in C_1, Z_2 \in C_2} d(Z_1, Z_2)
$$

これは、次のようにLMIをもちいた固有値問題（2.1節参照）の1つとして解くことができる。

$$
\begin{aligned}
&\min\nolimits_{(P_1,Y_1)\in C_1,\,(P_2,Y_2)\in C_2,\,X} \mathrm{Tr}X \\
&\text{s.t.} \begin{bmatrix} X & (Z_2 - Z_1)^T \\ (Z_2 - Z_1) & I \end{bmatrix} > 0 \\
&\text{where } Z_1 = \begin{bmatrix} P_1 \\ Y_1 \end{bmatrix},\ Z_2 = \begin{bmatrix} P_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$