

NAIST-IS-DT9961201

博士論文

非線形非最小位相系の出力レギュレーション

大西 規雄

2002年2月5日

奈良先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科 情報システム学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に  
博士(工学) 授与の要件として提出した博士論文である。

大西 規雄

審査委員： 西谷 紘一 教授  
杉本 謙二 教授  
山下 裕 助教授

# 非線形非最小位相系の出力レギュレーション\*

大西 規雄

## 内容梗概

出力レギュレーションとは，外部システムと呼ばれる自律システムによって生成される信号に対して，プラントの出力を漸近的に追従させる追従制御，あるいは，プラントの出力への影響を漸近的に除去する外乱除去制御を達成するものであり，このような制御を達成する制御則を求める問題は制御理論の中心的な課題となっている．本論文では，非線形非最小位相系の出力レギュレーション問題について考える．この問題に対して，プラントを特異摂動系に変換する手法と拡張バックステッピング法を用いる手法の二つの手法を提案する．これらの手法は，ある多様体上に制約されたダイナミクスを考えることによって出力レギュレーションを実現するものである．

システムの出力を恒等的に零に保つように入力および初期状態を選んだ場合のシステムの挙動を零ダイナミクスという．零ダイナミクスの平衡点が局所漸近安定のとき，システムは非線形最小位相系であるといい，それ以外のシステムを非線形非最小位相系という．プラントが非線形最小位相系であれば，非線形制御の代表的手法である入出力線形化法を適用することによって，出力レギュレーションを実現することができる．しかし，プラントが非線形非最小位相系であれば，システムの内部状態を支配する零ダイナミクスによってシステム全体の安定性が保証できないため，入出力線形化法を適用することができない．また，相対次数が定義できない点が存在するシステムに対しても，そのような点において入出力線形化法による制御入力が無限大となるため，入出力線形化法を適用することがで

---

\*奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報システム学専攻 博士論文, NAIST-IS-DT9961201, 2002年2月5日.

きない．本論文では，相対次数が定義できない点が存在するシステムも非線形非最小位相系としてあつかい，このような非線形非最小位相系に対して出力レギュレーションを実現する手法を提案する．

まず，相対次数が定義できない点が存在する多入力多出力非線形システムに対する出力レギュレーション問題について考える．この問題を解くために，時間軸変換および座標変換を用いてプラントを形式的に特異摂動系の形に変換する．そして，特異摂動系の速い動特性を安定化する制御則と，速い動特性が安定になったときにできる不変多様体上でプラントの出力が外部システムによって生成される目標軌道に漸近するような制御則を構成する．この手法が近似入出力線形化法などの従来法と比べて優れていることを平衡点において相対次数が定義できない ball and plate system を用いて示す．つぎに，非線形最小位相系とは限らない一入力一出力非線形システムの大域出力レギュレーション問題について考える．まず，プラントの状態を追従誤差が零となる零誤差多様体に収束させる不変多様体を構成するためにバックステッピング法の拡張となる手法を提案する．この手法によって得られる複数の不変多様体を用いた座標変換によってプラントを変換し，最終的に得られるシステムに対して，linear growth conditionのもとで可変ゲイン状態フィードバック則を適用することによって，大域出力レギュレーションが実現できることを示す．また，提案手法が非線形非最小位相系の出力レギュレーションに対して有効であることを数値例を用いて示す．

## キーワード

非線形制御，出力レギュレーション，入出力線形化，非最小位相系，特異摂動系，バックステッピング

# Output Regulation of Nonminimum Phase Nonlinear Systems\*

Norio Onishi

## Abstract

The purpose of output regulation is to control a system in order to attain asymptotic tracking and/or disturbance rejection for the signal generated by an exosystem. Finding such a controller is a central problem in control theory. In this thesis, we consider the problem of output regulation of nonminimum phase nonlinear systems. For this problem, we propose two methods; one using a transformation of the plant into a singularly perturbed system and the other using an extended backstepping method. Both methods accomplish output regulation by using dynamics restricted on a certain manifold.

When both the input and the initial state are chosen in such a way as to constrain the output of the system to remain identically zero, the internal state behavior of the system is called the zero dynamics of the system. A system is said to be minimum phase if the zero dynamics have an asymptotically stable equilibrium point in the domain of interest. Otherwise, the system is said to be nonminimum phase. If the plant is a minimum phase system, output regulation is achieved by applying the input-output linearization method known as a typical nonlinear control method. However, for a plant that is nonminimum phase, we cannot apply the input-output linearization method, because the stability of the whole system cannot be guaranteed due to the zero dynamics. We also cannot

---

\*Doctor's Thesis, Department of Information Systems, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, NAIST-IS-DT9961201, February 5, 2002.

apply the input-output linearization method to a plant where the relative degree is not well-defined, because the control input by the input-output linearization method tends to infinity at a point where there is no relative degree. We deal with the system that fails to have a relative degree as a nonminimum phase nonlinear system.

In this thesis, first, we consider the problem of output regulation of a multi-input multi-output nonlinear system for which relative degree is not well-defined. This problem is solved by transforming formally the plant into a singularly perturbed system and constructing a composite control law. The first part of the control law stabilizes the fast dynamics of the singularly perturbed system, and the second part makes the plant output track the reference trajectory generated by an exosystem on the invariant manifold created by the first part. This method is applied to the ball and plate system where the relative degree is not defined at the equilibrium, and compared to usual methods based on approximation. Next, for a single-input single-output nonlinear system that may not be minimum phase, we solve the problem of global output regulation. A method that is a kind of extended backstepping is proposed to construct a series of invariant manifolds that make the plant state tend to the zero error manifold. Under the linear growth condition, global output regulation is achieved by means of a variable-gain state feedback law to the system that is obtained by transformations using the set of invariant manifolds. We demonstrate the effectiveness of this method through a numerical simulation for a nonminimum phase nonlinear system.

**Keywords:**

nonlinear control, output regulation, input-output linearization, nonminimum phase system, singularly perturbed system, backstepping

## 目次

1. 序論	1
2. 制御対象の特性	3
3. 出力レギュレーション問題	9
4. 特異摂動系に変換する方法	13
4.1 背景	13
4.2 問題設定	14
4.3 特異摂動系への変換	16
4.4 特異摂動系の漸近追従制御	22
4.5 $\epsilon$ -修正法に基づく近似解法	29
4.6 数値例: ball and plate system	31
4.7 まとめ	43
5. 拡張バックステッピングを用いる方法	45
5.1 背景	45
5.2 問題設定	46
5.3 システムの変換	48
5.4 大域漸近追従制御の実現	61
5.5 数値例	70
5.6 まとめ	75
6. 結論	77
謝辞	79
参考文献	81
研究業績	87

目次

付録 89

A. 中心多様体定理 89



图 目 次

1	Block diagram of transformed system . . . . .	5
2	Block diagram of output regulation . . . . .	10
3	Relationship of output regulation . . . . .	12
4	Control of nonregular system . . . . .	14
5	Manifold of singularly perturbed system . . . . .	23
6	Ball and plate system . . . . .	31
7	Reference trajectory of the ball . . . . .	42
8	Tracking error of $y_1$ . . . . .	42
9	Tracking error of $y_2$ . . . . .	43
10	Sketch of manifolds . . . . .	50
11	Tracking error . . . . .	74
12	State trajectories . . . . .	74
13	Control input . . . . .	75

表 目 次

1	Values of model parameters and control condition . . . . .	41
2	Simulation parameter . . . . .	73



## 1. 序論

出力レギュレーション問題とは、外部システムと呼ばれる自律システムによって生成される信号に対して、プラントの出力を漸近的に追従させる追従制御、あるいは、プラントの出力への影響を漸近的に除去する外乱除去制御を達成する制御則を求める問題であり、制御理論の中心的な課題となっている。システムの出力を恒等的に零に保つように入力および初期状態を選んだ場合のシステムの挙動を零ダイナミクスという。零ダイナミクスの平衡点が局所漸近安定のとき、システムは非線形最小位相系であるといい、それ以外のシステムを非線形非最小位相系という。一方、非線形システムを高精度に制御する手法に、座標変換および状態フィードバックを用いることによってシステムを入出力関係において線形化する入出力線形化法がある [22, 23]。プラントが非線形最小位相系であるならば、入出力線形化法を適用することによって、出力レギュレーションを実現することができる。しかし、プラントが非線形非最小位相系であるならば、システムの内部状態を支配する零ダイナミクスによってシステム全体の安定性が保証できないため、入出力線形化法を適用することができない。また、相対次数が定義できない点が存在するシステム [14, 16, 17, 43, 45, 46] に対しても、そのような点において入出力線形化法による制御入力が無限大となるため、入出力線形化法を適用することができない。

一方、Isidori and Byrnes [26] は、出力レギュレーション問題の可解性がレギュレータ方程式と呼ばれる偏微分代数方程式の可解性と関連することを示した。そこで示された手法においては、相対次数の存在を仮定する必要がないため、非線形非最小位相系や相対次数が定義できない点が存在するシステムに対しても適用することができるが、制御則の一部に線形近似を用いているため、得られる制御則は局所的にしか用いることができない。近年、Isidori and Byrnes [26] の手法を拡張し、大域的あるいは準大域的な出力レギュレーション問題が、Khalil [29], Isidori [24], Serrani and Isidori [37], Serrani, Isidori and Marconi [38] などによって解かれている。これらの方法においては、非線形システムの幾何学的構造の解析のために入出力線形化法で用いられる座標系を利用しており、再び、零ダイナミクスの安定性が問題となっている。また、相対次数が定義できない点をもつシ

## 1. 序論

システムの追従制御に対しては，Hauser, Sastry and Kokotović [14] が近似入出力線形化法に基づく手法を提案しており，Tomlin and Sastry [43] は入出力線形化法による制御則と近似入出力線形化法による制御則を特異点近傍において切り替える手法を提案している．本論文では，相対次数が定義できない点が存在するシステムも非線形非最小位相系としてあつかい，非線形非最小位相系に対して出力レギュレーションを実現する手法を提案する．

本論文では，まず，2章において本論文であつかう制御対象の特性について述べる．つぎに，3章では，出力レギュレーションに関するこれまでの研究について述べたあと，本論文で考察する二つの課題を4, 5章で示す．まず，4章では，相対次数が定義できない点が存在する多入力多出力非線形システムに対する出力レギュレーション問題について考える．この問題を解くために，時間軸変換および座標変換を用いてプラントを形式的に特異摂動系の形に変換する．そして，特異摂動系の速い動特性を安定化する制御則と，速い動特性が安定になったときにできる不変多様体上でプラントの出力が外部システムによって生成される目標軌道に漸近するような制御則を構成する．この手法においても，Isidori and Byrnes [26] の手法におけるレギュレータ方程式と似た偏微分代数方程式を解く必要があるが，レギュレータ方程式を解くよりも比較的容易に解くことができる．この手法が近似入出力線形化法などの従来法と比べて優れていることを平衡点において相対次数が定義できない ball and plate system を用いて示す．つぎに，5章において，非線形最小位相系とは限らない一入力一出力非線形システムの大域出力レギュレーション問題について考える．この問題を解くために，まず，プラントの状態を追従誤差が零となる零誤差多様体に収束させる不変多様体を構成するために，バックステッピング法の拡張となる手法を提案する．この手法によって得られる複数の入れ子状の構造をもつ不変多様体を用いることによって，プラントを表現する座標を変換する．座標変換によって得られるシステムに対して，linear growth condition のもとで可変ゲイン状態フィードバック則を適用することによって，大域出力レギュレーションが実現できることを示す．また，提案手法が非線形非最小位相系の出力レギュレーションに対して有効であることを数値例を用いて示す．

## 2. 制御対象の特性

本章では、非線形制御系の設計手法の一つである入出力線形化法について説明した上で、本論文で対象とする非線形システムについて説明する。

入出力線形化法とは、座標変換とフィードバック則を用いることによって、元の非線形システムを少なくとも一部のダイナミクスが線形となるシステムに変換し、線形制御則の適用を可能にするものである。ここでは、簡単化のために一入力一出力非線形システムを用いて、入出力線形化法の説明を行う。また、この手法については、[22, 23] に詳しく述べられている。

つぎの式で表される非線形システムを考える。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

ここで、 $x \in \mathbb{R}^n$  は状態、 $u \in \mathbb{R}$  は入力、 $y \in \mathbb{R}$  は出力である。(2.1)における各写像は、 $\mathbb{R}^n$  上で定義される滑らかな関数であり、このシステムは原点  $x = 0$  に平衡点をもつとする。

出力  $y = h(x)$  を時間微分することによって以下の式が得られる。

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}(x)f(x) + \frac{\partial h}{\partial x}(x)g(x)u = L_f h(x) + L_g h(x)u\tag{2.2}$$

ここで、 $L_f h(x)$  は  $h(x)$  の  $f(x)$  による Lie 微分を表す。もし、ある点  $x_0$  において  $L_g h(x_0) \neq 0$  であるならば、システム (2.1) は  $x_0$  において相対次数 1 をもつという。このとき、(2.1)における各写像が滑らかであることより、 $L_g h(x) \neq 0$  であるような  $x_0$  の近傍が存在する。逆に、 $x_0$  において  $L_g h(x_0) = 0$  となる場合には、 $L_g h(x) \neq 0$  となるような  $x_0$  の任意の近傍の点  $x$  が存在する場合と、 $L_g h(x) = 0$  となるような  $x_0$  の近傍が存在する場合の二つの場合がある。前者の場合、システム (2.1) は  $x_0$  において相対次数を定義することができないが、後者の場合には、(2.2) に対して時間微分をすることによって、以下の式が得られる。

$$\ddot{y} = \frac{\partial L_f h}{\partial x}(x)f(x) + \frac{\partial L_f h}{\partial x}(x)g(x)u = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u\tag{2.3}$$

もし、 $x_0$  において  $L_g L_f h(x_0) \neq 0$  であるならば、システム (2.1) は  $x_0$  において相対次数 2 をもつという。逆に、 $x_0$  の近傍において  $L_g h(x) = 0$  となる場合には、

## 2. 制御対象の特性

さらに時間微分を続ける．以上より，システムの弱相対次数ならびに相対次数をつぎのように定義する．

定義 2.1 (相対次数) システム (2.1) に対して，

$$L_g L_f^k h(x) = 0, \quad (k = 0, \dots, \rho - 2; \forall x \in \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n) \quad (2.4)$$

$$L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0, \quad (\exists x \in \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n) \quad (2.5)$$

を満たす自然数  $\rho$  が存在するとき，システム (2.1) は  $x_0$  において弱相対次数  $\rho$  をもつという．ただし， $\mathcal{U}_0$  は  $x_0$  の開近傍を表す．さらに， $L_g L_f^{\rho-1} h(x_0) \neq 0$  が成り立つとき，システム (2.1) は  $x_0$  において相対次数  $\rho$  をもつという．  $\square$

ここで，システム (2.1) が原点近傍において相対次数  $\rho < n$  をもつとすると，原点近傍で定義される座標変換

$$\Phi : x \rightarrow (z, \eta) \quad (2.6)$$

$$z = (z_1, \dots, z_\rho) \quad (2.7)$$

$$\eta = (\eta_{\rho+1}, \dots, \eta_n) \quad (2.8)$$

$$z_i = \phi_i(x) = L_f^{i-1} h(x), \quad (i = 1, \dots, \rho) \quad (2.9)$$

$$\eta_i = \phi_i(x), \quad (i = \rho + 1, \dots, n) \quad (2.10)$$

によって，以下の標準形に変換することができる．

$$\begin{aligned} y &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\dots \\ \dot{z}_{\rho-1} &= z_\rho \\ \dot{z}_\rho &= b(z, \eta) + a(z, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta) + p(z, \eta)u \end{aligned} \quad (2.11)$$

ただし， $b(0, 0) = 0$ ,  $q(0, 0) = 0$  である．システム (2.11) の構造をブロック線図で表したものを図 1 に示す．

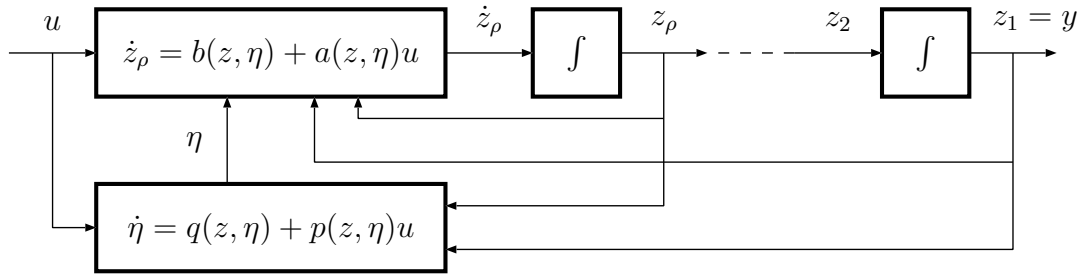


図 1 Block diagram of transformed system

ここで，相対次数の定義より，ある原点近傍において  $a(z, \eta) \neq 0$  となり，新しい入力変数を  $v$  として，フィードバック則

$$u = \frac{-b(z, \eta) + v}{a(z, \eta)} \quad (2.12)$$

によって，システム (2.11) は以下のように表される．

$$\begin{aligned} y &= z_1 \\ \dot{z} &= Az + Bv \\ \dot{\eta} &= q'(z, \eta) + p'(z, \eta)v \end{aligned} \quad (2.13)$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$B = (0, \dots, 0, 1)^T \quad (2.15)$$

$$q'(z, \eta) = q(z, \eta) - p(z, \eta) \frac{b(z, \eta)}{a(z, \eta)} \quad (2.16)$$

$$p'(z, \eta) = \frac{p(z, \eta)}{a(z, \eta)} \quad (2.17)$$

である．システム (2.13) は入出力のふるまいに関する  $\rho$  次元の線形システムと出力に影響を及ぼさない  $n - \rho$  次元の非線形システムに分解されている．こ

## 2. 制御対象の特性

のように非線形システムを線形化する手法を入出力線形化法という．ここで，行列  $(A + BK)$  の固有値の実部がすべて負になるように，新しいフィードバック則  $v = Kz$  を選ぶことによって，全状態のうちの  $z$  に関しては漸近安定にすることが可能である．

つぎに，システムの入力  $y(t)$  が恒等的に零となる場合について考える．標準形 (2.11) においては，

$$y(t) = z_1(t) \quad (2.18)$$

と表されることより，恒等的に  $y(t) = 0$  となる制約は，すべての  $t$  に対して

$$\dot{z}_1(t) = \cdots = \dot{z}_\rho(t) = 0 \quad (2.19)$$

となることを意味する．すなわち， $z(t) = 0$  となる．このとき，入力  $u(t)$  は以下の方程式を満たす必要がある．

$$0 = b(0, \eta(t)) + a(0, \eta(t))u(t) \quad (2.20)$$

一方，変数  $\eta(t)$  に関しては，その挙動は以下の微分方程式によって支配される．

$$\dot{\eta}(t) = q'(0, \eta(t)) \quad (2.21)$$

(2.21) で表されるダイナミクスは，システムの入力が恒等的に零になるように入力および初期状態を選んだときのシステムの内部状態を表すダイナミクスに対応し，システムの零ダイナミクスと呼ばれる．このとき，元のシステム (2.1) に対して，零ダイナミクスは，部分集合

$$\mathcal{Z} = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = L_f h(x) = \cdots = L_f^{\rho-1} h(x) = 0\} \quad (2.22)$$

上におけるダイナミクスとして表される．集合  $\mathcal{Z}$  は  $n - \rho$  次元の滑らかな多様体である．入力  $u(t)$  に対する制約は (2.20) と同様に以下の式で与えられる．

$$0 = y^{(\rho)}(t) = L_f^\rho h(x(t)) + L_g L_f^{\rho-1} h(x(t))u(t) \quad (2.23)$$

この制約によるフィードバック則

$$u^*(x) = \frac{-L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \quad (2.24)$$



に対して,  $\mathcal{Z}$  上の点から出発する閉ループ系の軌道は  $\mathcal{Z}$  上に存在し続ける. すなわち,  $\mathcal{Z}$  はこのシステムの不変集合となっており, この集合は零ダイナミクス部分多様体と呼ばれる. また, 零ダイナミクスの平衡点が漸近安定ならば, システム (2.1) は非線形最小位相系であるといい, そうでない場合, 非線形非最小位相系であるという.

システム (2.1) が非線形非最小位相系であるならば, システムの内部状態を支配する零ダイナミクスによって, システム全体の安定性が保証できない. そのため, 入出力線形化法を適用することができない. また, 考慮している領域において, (2.1) 中の係数  $a(z, \eta)$  が零となる点が存在する場合, すなわち, 相対次数が定義できない点が存在する場合には,  $a(z, \eta) = 0$  となる点においてフィードバック (2.12) が無限大となってしまう. よって, このようなシステムに対しても入出力線形化法を適用することができない. 本論文では, 相対次数が定義できない点が存在するシステムも非線形非最小位相系としてあつかい, このような非線形非最小位相系に対する出力レギュレーション法を提案する.



### 3. 出力レギュレーション問題

出力レギュレーション問題とは，外部システムと呼ばれる自律システムによって生成される信号に対して，プラントの出力を漸近的に追従させる，あるいは，プラントの出力への影響を漸近的に除去するような制御則を求める問題である．外部信号を目標軌道に限定すれば，漸近追従制御問題とみなすことができ，外部信号を外乱に限定すれば，外乱のダイナミクスが既知である場合の外乱除去制御問題とみなすことができる．また，外部システムが何らかの制御系であるとすれば，漸近モデルマッチング制御問題とみなすこともできる [47]．出力レギュレーション問題の全般的な話題に関しては，[3, 23] に詳しくまとめられている．ここでは，一般的な出力レギュレーション問題として，Isidori [23] によって示された結果を示す．

プラントとして以下の式で表される非線形システムを考える．

$$\dot{x} = f(x, w, u) \quad (3.1)$$

$$\dot{w} = s(w) \quad (3.2)$$

$$e = h(x, w) \quad (3.3)$$

ここで，(3.1) はプラントのダイナミクスを表しており，その状態  $x$  は  $\mathbb{R}^n$  の原点のある近傍  $\mathcal{X}$  で定義される． $u \in \mathbb{R}^m$  は制御入力であり， $w \in \mathbb{R}^r$  は外乱および目標軌道を含む外部入力変数である．(3.2) は，外乱および目標軌道を生成する外部システムを表しており， $\mathbb{R}^r$  の原点のある近傍  $\mathcal{W}$  で定義される．(3.3) は追従誤差  $e \in \mathbb{R}^m$  を定義する．ここでは，追従誤差  $e$  を一般化した形として，プラントの状態  $x$  と外部システムの状態  $w$  の関数として表現しているが，通常はプラントの出力と，外部システムによって生成される目標軌道との偏差として与えられる．(3.1), (3.2), (3.3) における各写像は滑らかであり，このシステムは原点  $(x, w) = (0, 0)$  に平衡点をもつとする．また，以下の行列を定義する．

$$\begin{aligned} A &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{(0,0,0)} & B &= \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{(0,0,0)} & C &= \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{(0,0)} \\ P &= \left[ \frac{\partial f}{\partial w} \right]_{(0,0,0)} & Q &= \left[ \frac{\partial h}{\partial w} \right]_{(0,0)} & S &= \left[ \frac{\partial s}{\partial w} \right]_{(0)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3. 出力レギュレーション問題

このとき, 状態フィードバックによる出力レギュレーションの目的は, 状態フィードバック則

$$u = \alpha(x, w), \quad (\alpha(0, 0) = 0) \quad (3.5)$$

によって, 原点のある近傍の点から出発するシステム (3.1), (3.2), (3.3) のすべての解に対して閉ループ系を安定に保ち, なおかつ追従誤差を零に収束させることである. 出力レギュレーションのブロック線図を図 2 に示す.

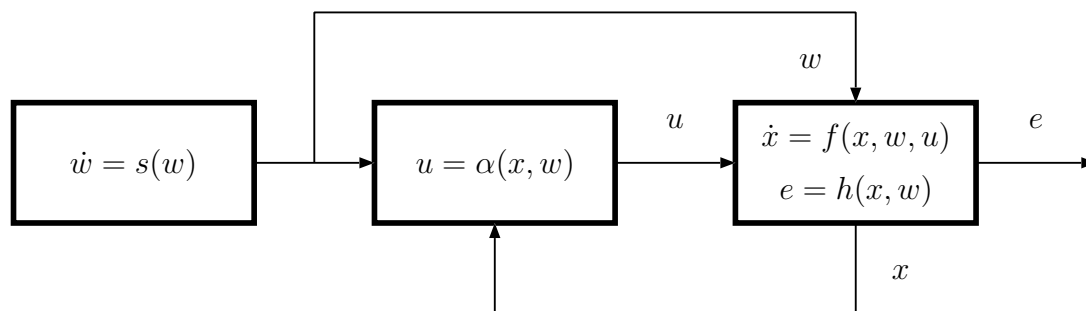


図 2 Block diagram of output regulation

Isidori [23] は, 状態フィードバックによる出力レギュレーション問題を以下のように定式化した.

定義 3.1 (状態フィードバック出力レギュレーション問題) プラント (3.1) および外部システム (3.2) に対して, 条件

- 閉ループ系

$$\dot{x} = f(x, 0, \alpha(x, 0)) \quad (3.6)$$

の線形近似系の平衡点  $x = 0$  が漸近安定である.

- 原点  $(x, w) = (0, 0)$  の近傍  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{W}$  が存在し, すべての初期状態  $(x(0), w(0)) \in \mathcal{V}$  に対して, 閉ループ系

$$\dot{x} = f(x, w, \alpha(x, w)) \quad (3.7)$$

$$\dot{w} = s(w) \quad (3.8)$$

の解が

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t), w(t)) = 0 \quad (3.9)$$

となる．

を満たす状態フィードバック則 (3.5) を求めよ．  $\square$

ここで，システム (3.1), (3.2), (3.3) に対して以下の仮定をおく．

仮定 3.1 外部システム (3.2) は，原点  $w = 0$  が Lyapunov 安定であり，原点のある近傍  $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$  のすべての点  $w$  が Poisson 安定である．  $\blacksquare$

仮定 3.2 プラント (3.1) の原点における線形近似系は安定化可能である．すなわち， $(A, B)$  は安定化可能である．  $\blacksquare$

ただし，ベクトル場  $s(w)$  に対して，点  $w_0$  が Poisson 安定であるとは， $s(w)$  の流れ  $\Phi_t^s(w_0)$  がすべての  $t \in \mathbb{R}$  に対して定義され， $w_0$  の近傍  $\mathcal{U}_0$  および  $T > 0$  に対して， $\Phi_{t_1}^s(w_0) \in \mathcal{U}_0$  となる  $t_1 > T$  が存在し，かつ， $\Phi_{t_2}^s(w_0) \in \mathcal{U}_0$  となる  $t_2 < -T$  が存在することである．これは，点  $w_0$  が Poisson 安定であれば， $w_0$  から出発する軌道  $w(t)$  は，任意の時刻に任意の近さで  $w_0$  の近くを通ることを意味する．また，平衡点近傍におけるすべての点が Poisson 安定であるには，平衡点における線形近似系の係数行列が固有値をすべて虚軸上にもつことが必要である．

Isidori [23] は，仮定 3.1, 3.2 のもとで，中心多様体定理を利用することによって，状態フィードバック出力レギュレーション問題が可解であるための必要十分条件を示した．

定理 3.1 仮定 3.1, 3.2 のもとで，状態フィードバック出力レギュレーション問題が可解であるための必要十分条件は，原点の近傍  $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$  で定義される写像  $x = \pi(w)$  および  $u = c(w)$  ( $\pi(0) = 0, c(0) = 0$ ) で，すべての  $w \in \mathcal{W}_0$  に対して，条件

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), w, c(w)) \quad (3.10)$$

$$0 = h(\pi(w), w) \quad (3.11)$$

を満足するものが存在することである．  $\triangle$

### 3. 出力レギュレーション問題

ここで, (3.10) は, 入力  $u = c(w)$  のもとで写像  $x = \pi(w)$  がシステム (3.1), (3.2), (3.3) に対する不変多様体であることを意味する. 一方, (3.11) は, この多様体上において追従誤差  $e = h(x, w)$  が零となることを意味する. 偏微分代数方程式 (3.10), (3.11) はレギュレータ方程式と呼ばれ, レギュレータ方程式の解  $\pi(w)$  のグラフは零誤差多様体と呼ばれる. 偏微分代数方程式 (3.10), (3.11) の解  $\pi(w)$ ,  $c(w)$  が求まれば, 例えば, 以下の制御則によって, 出力レギュレーション問題を解くことができる.

$$\alpha(x, w) = c(w) + K \cdot (x - \pi(w)) \quad (3.12)$$

ここで,  $K$  は行列  $(A + BK)$  の固有値を複素平面の左半平面に配置する行列である. また, (3.12) では, 零誤差多様体を指数安定にするために右辺第 2 項のような線形フィードバックを用いているが, 非線形フィードバックを用いることによって制御可能領域を拡大することが期待できる.

出力レギュレーション問題においては, プラントの状態  $x$  と, 偏微分代数方程式 (3.10), (3.11) から得られる不変多様体  $\pi(w)$  との偏差からなる誤差システムを考えると, 誤差システムの状態を漸近的に零にする漸近安定化問題と考えることができる. 一般的な追従制御問題に対して, 外部システムを導入し出力レギュレーション問題に置き換えることによって, 安定化問題に帰着することができる (図 3).

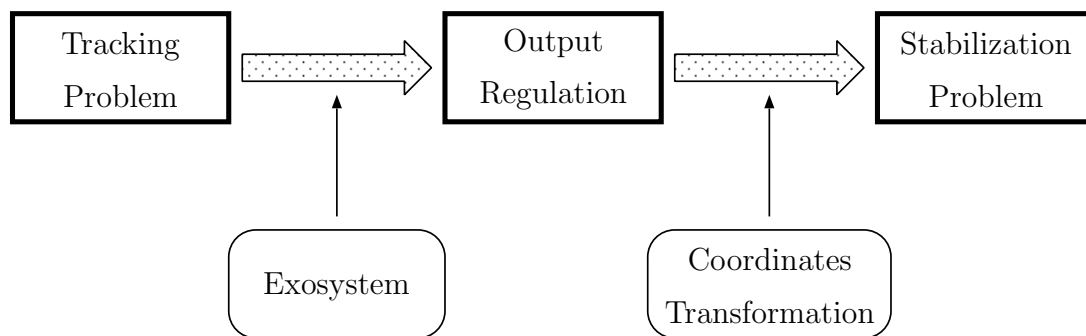


図 3 Relationship of output regulation

## 4. 特異摂動系に変換する方法

### 4.1 背景

本章では、相対次数に関して特異性をもつ非線形システムの追従制御について考える。相対次数に関して特異性をもつシステムとは、相対次数が定義できない点が存在するシステムのことである。相対次数が定義できない点においては、入出力線形化法による制御入力が無限大となる。特に、追従制御の場合において、システムの軌道が相対次数の定義できない点の集合を避けることができない場合が問題となる。このようなシステムの例としては、傾けたビーム上をボールが転がる ball and beam system [14] や、還流槽の組成を出力とした場合の共沸蒸留塔 [28] などがある。

相対次数が定義できない点が存在するシステムの追従制御を行う方法として代表的なものには、システムの出力やその時間微分を近似することで相対次数を得ることによって入出力線形化を行う手法 [14, 16]、厳密な入出力線形化と [14] の近似入出力線形化を相対次数が定義できなくなる特異点近傍において切り替える手法 [43]、出力レギュレーション法 [26, 46] などが存在する。

本論文においては、出力レギュレーションと同様に、プラントの出力が追従する目標軌道は自律的な外部システムが生成するものとする。この問題を解くために、時間軸変換および座標変換を用いてプラントを形式的に特異摂動系の形に変換する。そして、特異摂動系の速い動特性を安定化する制御則と、速い動特性が安定になったときにできる不変多様体上でプラントの出力が外部システムによって生成される目標軌道に漸近するような制御則を構成する (図 4)。このとき、Isidori and Byrnes [26] の手法と同様に不変多様体を求める必要があるが、本論文における不変多様体は状態変数の一部に自由度をもたせたものとなっている。また、制御則を求めるために不変多様体に関する偏微分代数方程式を解く必要があるが、特異摂動系の理論でよく知られる  $\epsilon$ -修正法を用いて近似解を求める方法を提案する。この方法による近似解は外部システムの状態を必要とせず、出力の目標値の有限回の微分値で外部システムの状態を置き換えることが可能であるため、外部システムをあらかじめ決めておく必要がない。また、この手法が近似入出力線形

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

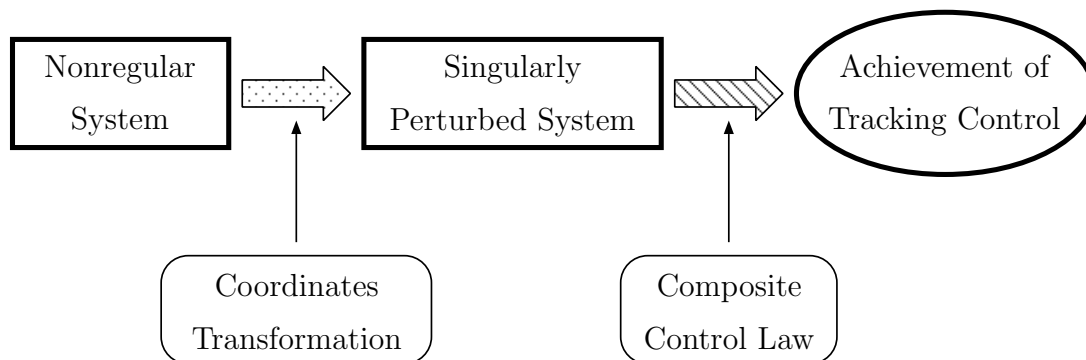


図 4 Control of nonregular system

化法などの従来法と比べて優れていることを平衡点において相対次数が定義できない ball and plate system を用いたシミュレーションによって示す。

#### 4.2 問題設定

プラントとして以下の式で表される  $m$  入力  $m$  出力非線形システムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j = f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  はプラントの状態,  $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$  は入力,  $y = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$  は出力である。  $f(x), g(x), h(x)$  は  $\mathbb{R}^n$  上で定義される十分滑らかな関数であり, このプラントは原点  $x = 0$  に平衡点をもつとする。

$m$  入力  $m$  出力非線形システムに対する弱相対次数ならびに相対次数を以下のように定義する。

定義 4.1 (相対次数) システム (4.1) に対して,

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0, \quad (i, j = 1, \dots, m; k = 0, \dots, \rho_i - 2; \forall x \in \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n) \quad (4.2)$$

$$L_{g_j} L_f^{\rho_i - 1} h_i(x) \neq 0, \quad (i = 1, \dots, m; \exists j = 1, \dots, m; \exists x \in \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n) \quad (4.3)$$



## 4.2. 問題設定

を満たす自然数の組  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  が存在するとき, システム (4.1) は  $x_0$  で弱相対次数  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  をもつという. ただし,  $\mathcal{U}_0$  は  $x_0$  の開近傍である. さらに, 無干渉化行列

$$D(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

が  $x_0$  において正則ならば, システム (4.1) は  $x_0$  において相対次数  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  をもつという.  $\square$

無干渉化行列  $D(x)$  が原点において正則であるならば, 原点のある近傍において入出力線形化制御則が存在する. また,  $D(x)$  が正則でないときも, 動的拡張アルゴリズムによって, 拡大系の無干渉化行列を正則にできる場合もある. 本論文では,  $D(x)$  が原点において正則でなく, 動的拡張アルゴリズムも適用できないシステムを対象とする. また, 原点における線形近似系は無干渉化可能であると仮定する. すなわち, 以下の仮定をおく.

仮定 4.1 (ロバスト相対次数 [14, 16]) プラント (4.1) に対して,

$$L_{g_j} L_f^k h_i(0) = 0, \quad (i, j = 1, \dots, m; k = 0, \dots, R_i - 2) \quad (4.5)$$

$$\text{rank } D'(0) = m \quad (4.6)$$

を満たす自然数の組  $\{R_1, \dots, R_m\}$  が存在する. ただし,

$$D'(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{R_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{R_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{R_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{R_m-1} h_m(x) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

である.  $\blacksquare$

このとき, プラント (4.1) はロバスト相対次数  $\{R_1, \dots, R_m\}$  をもつという. ロバスト相対次数は原点における線形近似系の相対次数と一致する.  $R_i \geq \rho_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) であることより, 弱相対次数も必ず存在する.

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

出力レギュレーションの場合と同様に，プラントの出力  $y$  が追従する目標軌道  $y_d = (y_{d1}, \dots, y_{dm})^T$  はつぎの外部システムによって生成されるものとする．

$$\begin{aligned}\dot{w} &= s(w) \\ y_d &= \delta(w)\end{aligned}\tag{4.8}$$

ここで， $w \in \mathbb{R}^r$  は外部システムの状態である． $s(w)$ ,  $\delta(w)$  は十分滑らかな関数であるとする．外部システム (4.8) は原点  $w = 0$  に平衡点をもち，なおかつ Poisson 安定であると仮定する．

追従誤差を以下のように表す．

$$e(t) = y(t) - y_d(t)\tag{4.9}$$

以下の問題を考える．

定義 4.2 (漸近追従制御問題) 追従誤差  $e(t)$  を漸近的に零に収束させ，なおかつプラントの状態を有界に保つような制御則

$$u = d(x, w), \quad (d(0, 0) = 0)\tag{4.10}$$

を求めよ．

□

#### 4.3 特異摂動系への変換

ここでは，まずプラントを特異摂動系に変換することを考える．以下では，時間軸変換および座標変換を用いることによって，プラントを特異摂動系に変換できることを示す．

$R_i \geq \rho_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) であることより，以下の条件を満たすように出力の添字を入れ替える．

$$\rho_i \begin{cases} < R_i, & (i = 1, \dots, \bar{m}) \\ = R_i, & (i = \bar{m} + 1, \dots, m) \end{cases}\tag{4.11}$$

ただし， $1 \leq \bar{m} \leq m$  である．また， $R = R_1 + \dots + R_m$  とおく．

### 4.3. 特異摂動系への変換

適当な関数  $c_{i0}(x)$ ,  $c_{ijk}(x)$  のもとで, 以下の条件を満たすように  $\zeta_i(x)$  ( $i = 1, \dots, \bar{m}$ ) を選ぶ.

$$L_f^{\rho_i} h_i(x) = c_{i0}(x)\zeta_i(x) + \sum_{(j,k) \in \mathcal{C}_i} c_{ijk}(x)L_f^{j-1} h_k(x), \quad (i = 1, \dots, \bar{m}) \quad (4.12)$$

$$c_{i0}(0) \neq 0, \quad (i = 1, \dots, \bar{m}) \quad (4.13)$$

$$\mathcal{C}_i = \{(j, k) : R_k > R_i - \rho_i; 1 \leq j \leq R_k - (R_i - \rho_i)\}, \quad (i = 1, \dots, \bar{m}) \quad (4.14)$$

ここで, 添字の組の集合  $\mathcal{C}_i$  は

$$\{L_g L_f^l (L_f^{j-1} h_k)\}(0) = 0, \quad (l = 0, \dots, R_i - \rho_i - 1; (j, k) \in \mathcal{C}_i) \quad (4.15)$$

となる集合を意味する.  $c_{i0}(x) = 1$ ,  $c_{ijk}(x) = 0$  とおくことで,  $\zeta_i(x) = L_f^{\rho_i} h_i(x)$  と選ぶことができるので, 関数  $\zeta_i(x)$  は必ず存在するといえる. (4.12), (4.13), (4.14) の条件は,  $\zeta_i(x) = L_f^{\rho_i} h_i(x)$  以外の  $\zeta_i(x)$  の選択を可能とし, 制御則の設計に自由度を与える.

まず, 以下の座標変換を考える.

$$\Phi_1 : x \rightarrow (\xi, \eta) \quad (4.16)$$

$$\xi = \text{col}(\xi^1, \dots, \xi^m) \quad (4.17)$$

$$\xi^i = (\xi_1^i, \dots, \xi_{R_i}^i)^T, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.18)$$

$$\xi_k^i = L_f^{k-1} h_i(x), \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, \rho_i) \quad (4.19)$$

$$\xi_k^i = L_f^{k-\rho_i-1} \zeta_i(x), \quad (i = 1, \dots, \bar{m}; k = \rho_i + 1, \dots, R_i) \quad (4.20)$$

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{m-R})^T \quad (4.21)$$

ここで,  $\eta$  の座標は  $\eta(0) = 0$  となるようにとる. また, ロバスト相対次数  $\{R_1, \dots, R_m\}$  が存在すれば, 行ベクトル

$$(dL_f^k h_i)(0), \quad (i = 1, \dots, m; k = 0, \dots, R_i - 1) \quad (4.22)$$

は線形独立となるので, (4.15) を考慮すると,  $\eta \in \mathbb{R}^{n-R}$  を適当に選ぶことによって, 座標変換  $\Phi_1$  のヤコビ行列を原点近傍において正則とすることができる. こ

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

ここでは、プラントの軌道が通るすべての領域において座標変換  $\Phi_1$  のヤコビ行列が正則であるとする。

座標変換  $\Phi_1$  によって、プラント (4.1) は以下のように書き直される。

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = \xi_1^i \\ \dot{\xi}_1^i = \xi_2^i \\ \dots \\ \dot{\xi}_{\rho_i-1}^i = \xi_{\rho_i}^i \\ \dot{\xi}_{\rho_i}^i = \kappa_{\rho_i}^i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m \lambda_{\rho_i}^{ij}(\xi, \eta) u_j \\ \dot{\xi}_{\rho_i+1}^i = \xi_{\rho_i+2}^i + \sum_{j=1}^m \lambda_{\rho_i+1}^{ij}(\xi, \eta) u_j \\ \dots \\ \dot{\xi}_{R_i-1}^i = \xi_{R_i}^i + \sum_{j=1}^m \lambda_{R_i-1}^{ij}(\xi, \eta) u_j \\ \dot{\xi}_{R_i}^i = \kappa_{R_i}^i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m \lambda_{R_i}^{ij}(\xi, \eta) u_j \end{array} \right. \quad (i = 1, \dots, \bar{m}) \quad (4.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = \xi_1^i \\ \dot{\xi}_1^i = \xi_2^i \\ \dots \\ \dot{\xi}_{\rho_i-1}^i = \xi_{\rho_i}^i \\ \dot{\xi}_{\rho_i}^i = \kappa_{\rho_i}^i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m \lambda_{\rho_i}^{ij}(\xi, \eta) u_j \end{array} \right. \quad (i = \bar{m} + 1, \dots, m) \quad (4.24)$$

$$\dot{\eta} = \kappa_{\eta}(\xi, \eta) + \lambda_{\eta}(\xi, \eta) u \quad (4.25)$$

仮定 4.1 および (4.12) より、 $\lambda_{R_i}^{ij}(\xi, \eta)$  以外の  $\lambda_k^{ij}(\xi, \eta)$  は原点において零となる。また、行列

$$D_2(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \lambda_{R_1}^{11}(\xi, \eta) & \dots & \lambda_{R_1}^{1m}(\xi, \eta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{R_m}^{m1}(\xi, \eta) & \dots & \lambda_{R_m}^{mm}(\xi, \eta) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

### 4.3. 特異摂動系への変換

は原点において正則である．座標変換  $\Phi_1$  において，新しい関数  $\zeta_i(x)$  の選択に自由度を与える目的は，変換後のシステム (4.23), (4.24), (4.25) を簡略化できる可能性があるためである．後述する近似計算においては数式処理が必要となるが，その処理のために式の表現はできるだけ簡略なほうが望ましい．

ここで，簡単化のためにつぎの仮定をおく．

仮定 4.2  $i = 1, \dots, \bar{m}, j = 1, \dots, m, k = \rho_i + 1, \dots, R_i - 1$  に対して，

$$\lambda_k^{ij}(\xi, \eta) = 0 \quad (4.27)$$

が成り立つ． ■

後述する例題では，関数  $\zeta_i(x)$  の選択の自由度を用いてこの仮定を満たしている．関数  $\zeta_i(x)$  の自由度を用いて仮定 4.2 を満たすようにできる場合は少なくないと思われるが，そのための明示的な条件はまだ得られていない．本章においては，大域的な安定性を考慮しているわけではないので，この仮定は必ずしも必要ではない．しかしながら，この仮定が成り立つものとするとき，後述する近似計算において解くべき連立代数方程式の一部の変数が逆行列計算によって消去できるので，都合がよい．

つぎに，システム (4.23), (4.24), (4.25) を特異摂動系に変換する．まず，弱相対次数  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  およびロバスト相対次数  $\{R_1, \dots, R_m\}$  に関して以下の仮定をおく．

仮定 4.3  $i = 1, \dots, \bar{m}, j = 1, \dots, m$  に対して，

$$\rho_j(R_i - \rho_i - 1) < R_i - 1 \quad (4.28)$$

が成り立つ． ■

ロバスト相対次数  $R_i$  と弱相対次数  $\rho_i$  の差がたかだか1の場合，仮定 4.2, 4.3 は自動的に満たされることは明らかである．また，仮定 4.3 に関しては， $R_i - \rho_i \leq 2$  かつ  $\rho_1 = \dots = \rho_m$  の場合にも成り立つ．

以下の時間軸変換を考える．

$$t' = \gamma t \quad (4.29)$$

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

ここで,  $\gamma$  は十分小さい正の定数である. よって, この時間軸変換は時間軸を拡大することになる. また, 以下の座標変換を考える.

$$\Phi_2 : (\xi, \eta) \rightarrow (X, Z) \quad (4.30)$$

$$X = \text{col}(X^1, \dots, X^m, \eta) \quad (4.31)$$

$$X^i = (X_1^i, \dots, X_{\rho_i}^i)^T, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.32)$$

$$X_k^i = \frac{\xi_k^i}{\gamma^{k-1}}, \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, \rho_i) \quad (4.33)$$

$$Z = \text{col}(Z^1, \dots, Z^{\bar{m}}) \quad (4.34)$$

$$Z^i = (Z_1^i, \dots, Z_{R_i - \rho_i}^i)^T, \quad (i = 1, \dots, \bar{m}) \quad (4.35)$$

$$Z_{k - \rho_i}^i = \frac{\xi_k^i}{\gamma^{k-1-q(k-\rho_i-1)}}, \quad (i = 1, \dots, \bar{m}; k = \rho_i + 1, \dots, R_i) \quad (4.36)$$

ここで,  $q$  は

$$q > \rho_i, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.37)$$

$$q(R_i - \rho_i - 1) \leq R_i - 1, \quad (i = 1, \dots, \bar{m}) \quad (4.38)$$

を満たす実数である. 仮定 4.3 より, このような  $q$  は必ず存在することがいえる. (4.37) より, (4.33) の分母の  $\gamma$  の次数は  $q$  次未満である. また, (4.37), (4.38) より, (4.36) の分母の  $\gamma$  の次数は正または零であり,  $q$  次未満である. (4.29), (4.30) によって, システム (4.23), (4.24), (4.25) は形式的に以下のような特異摂動系に

### 4.3. 特異摂動系への変換

書くことができる .

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = X_1^i \\ \frac{dX_1^i}{dt'} = X_2^i \\ \dots \\ \frac{dX_{\rho_i-1}^i}{dt'} = X_{\rho_i}^i \\ \frac{dX_{\rho_i}^i}{dt'} = \bar{\kappa}_{\rho_i}^i(X, Z, \epsilon) + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_{\rho_i}^{ij}(X, Z, \epsilon)u_j \end{array} \right. \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon \frac{dZ_1^i}{dt'} = Z_2^i \\ \dots \\ \epsilon \frac{dZ_{R_i-\rho_i-1}^i}{dt'} = Z_{R_i-\rho_i}^i \\ \epsilon \frac{dZ_{R_i-\rho_i}^i}{dt'} = \bar{\kappa}_{R_i}^i(X, Z, \epsilon) + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_{R_i}^{ij}(X, Z, \epsilon)u_j \end{array} \right. \quad (i = 1, \dots, \bar{m}) \quad (4.40)$$

$$\frac{d\eta}{dt'} = \bar{\kappa}_\eta(X, Z, \epsilon) + \bar{\lambda}_\eta(X, Z, \epsilon)u \quad (4.41)$$

ただし ,

$$\bar{\kappa}_{\rho_i}^i(X, Z, \epsilon) = \frac{1}{\gamma^{\rho_i}} \kappa_{\rho_i}^i(\xi, \eta) \Big|_{\text{col}(\xi, \eta) = \Phi_2^{-1}(X, Z)}, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.42)$$

$$\bar{\lambda}_{\rho_i}^{ij}(X, Z, \epsilon) = \frac{1}{\gamma^{\rho_i}} \lambda_{\rho_i}^{ij}(\xi, \eta) \Big|_{\text{col}(\xi, \eta) = \Phi_2^{-1}(X, Z)}, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.43)$$

$$\bar{\kappa}_{R_i}^i(X, Z, \epsilon) = \gamma^{q(R_i-\rho_i)-R_i} \kappa_{R_i}^i(\xi, \eta) \Big|_{\text{col}(\xi, \eta) = \Phi_2^{-1}(X, Z)}, \quad (i = 1, \dots, \bar{m}) \quad (4.44)$$

$$\bar{\lambda}_{R_i}^{ij}(X, Z, \epsilon) = \gamma^{q(R_i-\rho_i)-R_i} \lambda_{R_i}^{ij}(\xi, \eta) \Big|_{\text{col}(\xi, \eta) = \Phi_2^{-1}(X, Z)}, \quad (i = 1, \dots, \bar{m}) \quad (4.45)$$

$$\bar{\kappa}_\eta(X, Z, \epsilon) = \frac{1}{\gamma} \kappa_\eta(\xi, \eta) \Big|_{\text{col}(\xi, \eta) = \Phi_2^{-1}(X, Z)} \quad (4.46)$$

$$\bar{\lambda}_\eta(X, Z, \epsilon) = \frac{1}{\gamma} \lambda_\eta(\xi, \eta) \Big|_{\text{col}(\xi, \eta) = \Phi_2^{-1}(X, Z)} \quad (4.47)$$

とおく . ここで ,  $\epsilon$  は十分小さい正の定数であり ,  $\gamma$  と  $\epsilon$  の間にはつぎの関係があるものとする .

$$\epsilon = \gamma^q \quad (4.48)$$

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

(4.42), (4.43), (4.44), (4.45), (4.46), (4.47) に対して,  $\gamma$  の  $q$  次を超える部分式に関しては, (4.48) の関係を用いて適宜  $\epsilon$  に置き換える操作をしても構わないものとする. (4.42), (4.43) の分母に含まれる  $\gamma$  の次数は  $q$  次以下であることは明らかであるので,  $\epsilon$  が分母に現れることはない. 特異摂動系 (4.39), (4.40), (4.41) において, 状態変数  $X$  は遅い状態変数を表し, 状態変数  $Z$  は速い状態変数を表現している. また, 外部システム (4.8) も時間軸変換 (4.29) によって, 以下のよう  
に書き直すことができる.

$$\frac{dw}{dt'} = \frac{s(w)}{\gamma} := s'(w) \quad (4.49)$$

$\gamma$  が十分小さい正の定数であること, また, (4.48) の関係より,  $\epsilon$  は  $\gamma$  より小さな値をとる. よって,  $\epsilon$  が十分小さいものとして  $\epsilon \rightarrow 0$  としたときにも,  $\gamma$  は零にならないものとする. これ以降, 形式的に  $\gamma$  と  $\epsilon$  は別のものとして考え,  $\gamma$  を定数,  $\epsilon$  を変数としてあつかうが, 制御則を設計した後に (4.48) を代入する.

#### 4.4 特異摂動系の漸近追従制御

ここでは, 4.3 節で導出された特異摂動系に対する漸近追従制御則の設計法について述べる. 本手法においては, 混合制御則の考え方を導入し, まず  $Z$  を安定化する制御則を設計し,  $Z$  が安定化することによってできる不変多様体上で追従誤差が零になるように  $X$  に関する制御則を設計する. このような多様体の概念図を図 5 に示す.

特異摂動系 (4.39), (4.40), (4.41) を以下のように簡単に書き直す.

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt'} &= f_X(X, Z, \epsilon) + g_X(X, Z, \epsilon)u \\ \epsilon \frac{dZ}{dt'} &= f_Z(X, Z, \epsilon) + g_Z(X, Z, \epsilon)u \end{aligned} \quad (4.50)$$

このシステムは元のプラントを形式的に特異摂動系の形に変換しただけであり, 実際に  $Z$  が  $X$  に比べて速い挙動を示すわけではない. そこで, フィードバック則

$$u = u_{f0}(X, Z, \epsilon) + u_{f1}(X, Z, \epsilon)u_s \quad (4.51)$$



#### 4.4. 特異摂動系の漸近追従制御

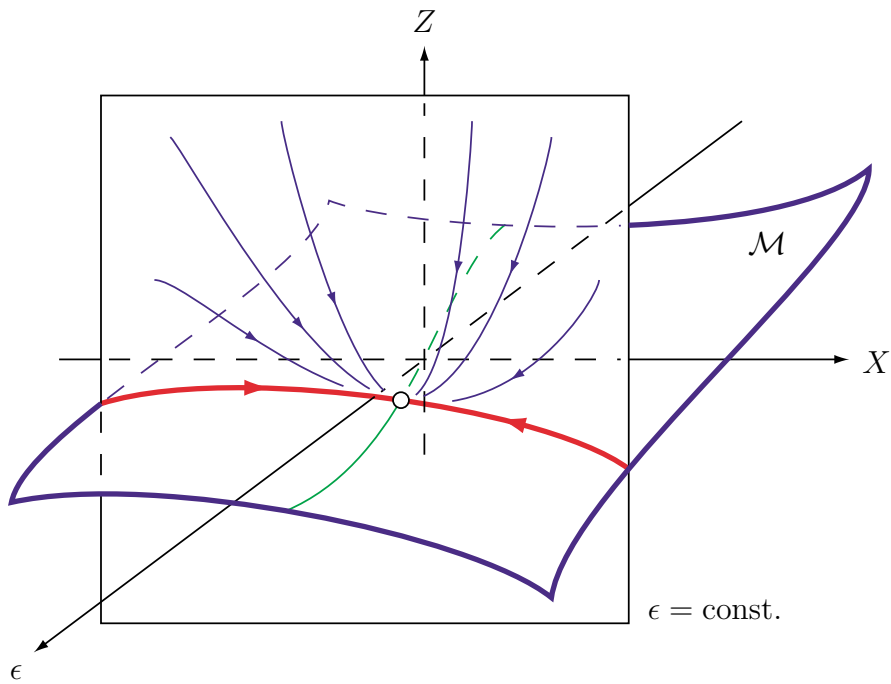


図 5 Manifold of singularly perturbed system

を用いて,  $Z$  を安定化し, なおかつ  $Z$  に速い動特性をもたせる. ここで,  $u_s = (u_{s1}, \dots, u_{sm})^T \in \mathbb{R}^m$  は新しい入力変数であり,  $u_{f0}(X, Z, \epsilon)$ ,  $u_{f1}(X, Z, \epsilon)$  は以下のように選ぶ.

$$u_{f0}(X, Z, \epsilon) = D_3^{-1}(X, Z, \epsilon)F(X, Z, \epsilon) \quad (4.52)$$

$$u_{f1}(X, Z, \epsilon) = D_3^{-1}(X, Z, \epsilon) \quad (4.53)$$

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

ただし,

$$D_3(X, Z, \epsilon) = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_{R_1}^{11}(X, Z, \epsilon) & \cdots & \bar{\lambda}_{R_1}^{1m}(X, Z, \epsilon) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\lambda}_{R_m}^{m1}(X, Z, \epsilon) & \cdots & \bar{\lambda}_{R_m}^{mm}(X, Z, \epsilon) \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

$$F(X, Z, \epsilon) = (F_1(X, Z, \epsilon), \dots, F_m(X, Z, \epsilon))^T \quad (4.55)$$

$$F_i(X, Z, \epsilon) = -\bar{\kappa}_{R_i}^i(X, Z, \epsilon) - \alpha_0^i Z_1^i - \cdots - \alpha_{R_i - \rho_i - 1}^i Z_{R_i - \rho_i}^i, \quad (i = 1, \dots, \bar{m}) \quad (4.56)$$

$$F_i(X, Z, \epsilon) = 0, \quad (i = \bar{m} + 1, \dots, m) \quad (4.57)$$

である．係数  $\alpha_j^i$  ( $j = 0, \dots, R_i - \rho_i - 1$ ) は, 以下の多項式が Hurwitz 多項式となるように選ぶ．

$$s^{R_i - \rho_i} + \alpha_{R_i - \rho_i - 1}^i s^{R_i - \rho_i - 1} + \cdots + \alpha_0^i \quad (4.58)$$

(4.45) の分母に含まれる  $\gamma$  の次数は  $q$  次以下であるので, 行列

$$D_3(0, 0, \epsilon) = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_{R_1}^{11}(0, 0, \epsilon) & \cdots & \bar{\lambda}_{R_1}^{1m}(0, 0, \epsilon) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\lambda}_{R_m}^{m1}(0, 0, \epsilon) & \cdots & \bar{\lambda}_{R_m}^{mm}(0, 0, \epsilon) \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

は  $\epsilon$  には関係なく正則な定数行列である．したがって,  $D_3(X, Z, \epsilon)$  は原点近傍で正則となる．また, フィードバック則 (4.51) は  $\gamma$  の影響によって, ハイゲインフィードバックとなる．

フィードバック則 (4.51) によって, 特異摂動系 (4.50) は以下のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt'} &= \bar{f}_X(X, Z, \epsilon) + \bar{g}_X(X, Z, \epsilon)u_s \\ \epsilon \frac{dZ}{dt'} &= A_Z Z + B_Z u_s \end{aligned} \quad (4.60)$$

ただし,

$$\bar{f}_X(X, Z, \epsilon) = f_X(X, Z, \epsilon) + g_X(X, Z, \epsilon)u_{f0}(X, Z, \epsilon) \quad (4.61)$$

$$\bar{g}_X(X, Z, \epsilon) = g_X(X, Z, \epsilon)u_{f1}(X, Z, \epsilon) \quad (4.62)$$

$$A_Z = \text{diag}\{A_Z^1, \dots, A_Z^{\bar{m}}\} \quad (4.63)$$

$$A_Z^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0^i & -\alpha_1^i & -\alpha_2^i & \cdots & -\alpha_{R_i-\rho_i-1}^i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, \dots, \bar{m}) \quad (4.64)$$

$$B_Z = \left( \begin{array}{ccc|ccc} b_Z^1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_Z^{\bar{m}} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \quad (4.65)$$

$$b_Z^i = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^{R_i-\rho_i}, \quad (i = 1, \dots, \bar{m}) \quad (4.66)$$

である．特異摂動系 (4.60) は,  $u_s = 0$  のときに  $(X, Z) = (0, 0)$  を平衡点としてもつ．

このとき, 入力  $u_s$  を

$$u_s = u_s(X, w, \epsilon) \quad (4.67)$$

というように遅い状態変数  $X$  と  $w$  の関数とすると,  $u_s$  が  $Z$  の挙動より十分ゆっくり動けば,  $Z$  は安定となり, ある不変多様体

$$\mathcal{M} = \{(X, Z, w, \epsilon) : Z = \pi(X, w, \epsilon)\} \quad (4.68)$$

上に収束する．ここで,

$$\pi(X, w, \epsilon) = \text{col}(\pi^1(X, w, \epsilon), \dots, \pi^{\bar{m}}(X, w, \epsilon)) \quad (4.69)$$

$$\pi^i(X, w, \epsilon) = (\pi_1^i(X, w, \epsilon), \dots, \pi_{R_i-\rho_i}^i(X, w, \epsilon))^T, \quad (i = 1, \dots, \bar{m}) \quad (4.70)$$

である．関数  $u_s(X, w, \epsilon)$  を固定しても, この不変多様体は一意的ではないことが知られているが,  $\epsilon$  に関して解析的な不変多様体が存在するならば, それは一意

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

である．以下では， $\mathcal{M}$  が満たすべき条件，および  $u_s(X, w, \epsilon)$  の与え方について考える．

まず， $\mathcal{M}$  は以下の不変多様体条件を満たす必要がある．

$$A_Z \pi(X, w, \epsilon) + B_Z u_s(X, w, \epsilon) = \epsilon \left[ \frac{\partial \pi}{\partial X} \{ \bar{f}_X(X, \pi(X, w, \epsilon), \epsilon) + \bar{g}_X(X, \pi(X, w, \epsilon), \epsilon) u_s(X, w, \epsilon) \} + \frac{\partial \pi}{\partial w} s'(w) \right] \quad (4.71)$$

特に，上式において， $\epsilon = 0$  とおくことによって，以下の式が得られる．

$$\pi(X, w, 0) = -A_Z^{-1} B_Z u_s(X, w, 0) \quad (4.72)$$

行列  $A_Z$  は安定行列であるので正則であり，必ず逆行列が存在する．つぎに，多様体  $\mathcal{M}$  上における動特性を指定することによって， $X$  の動特性を安定化するように  $u_s(X, w, \epsilon)$  を決める．すなわち， $Z$  の動特性を無視した低次元システムの誤差システムを  $u_s(X, w, \epsilon)$  で設計し，多様体  $\mathcal{M}$  上で

$$\frac{dE^i}{dt} = H_i E^i, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.73)$$

$$E^i = (E_1^i, \dots, E_{\rho_i}^i)^T, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.74)$$

$$E_k^i = X_k^i - L_{s'}^{k-1} \delta_i(w), \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, \rho_i) \quad (4.75)$$

$$H_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\beta_0^i & -\beta_1^i & -\beta_2^i & \cdots & -\beta_{\rho_i-1}^i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.76)$$

というように  $E_1^i$  が零に収束する，すなわち， $y$  が  $y_d$  に漸近する線形の動特性をもつようにする．ただし，多項式

$$s^{\rho_i} + \beta_{\rho_i-1}^i s^{\rho_i-1} + \cdots + \beta_0^i \quad (4.77)$$

は Hurwitz 多項式である．そのためには，以下の式が成り立つ必要がある．

$$\bar{\kappa}_{\rho_i}^i(X, \pi(X, w, \epsilon), \epsilon) + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_{\rho_i}^{ij}(X, \pi(X, w, \epsilon), \epsilon) u_{sj}(X, w, \epsilon) - L_{s'}^{\rho_i} \delta_i(w) + \beta_{\rho_i-1}^i (X_{\rho_i}^i - L_{s'}^{\rho_i-1} \delta_i(w)) + \cdots + \beta_0^i (X_1^i - \delta_i(w)) = 0, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.78)$$

#### 4.4. 特異摂動系の漸近追従制御

仮定 4.4 偏微分方程式 (4.71), (4.78) に対して,  $\epsilon$  に関して解析的な解  $\pi(X, w, \epsilon)$ ,  $u_s(X, w, \epsilon)$  が存在する. ■

多様体  $\mathcal{M}$  に制限されたシステムの零ダイナミクスを評価するために,  $\mathcal{M}$  に含まれる別の多様体  $\mathcal{M}'$  を考える.

仮定 4.5 (レギュレータ方程式の解の存在性) 以下の条件を満たす多様体  $\mathcal{M}' = \{(X, Z, w, \epsilon) : X = \tilde{\pi}(w, \epsilon); Z = \pi(X, w, \epsilon)\}$  が存在する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial w} s'(w) &= \bar{f}_X(\tilde{\pi}(w, \epsilon), \pi(\tilde{\pi}(w, \epsilon), w, \epsilon), \epsilon) \\ &\quad + \bar{g}_X(\tilde{\pi}(w, \epsilon), \pi(\tilde{\pi}(w, \epsilon), w, \epsilon), \epsilon) u_s(\tilde{\pi}(w, \epsilon), w, \epsilon) \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$0 = \tilde{\pi}_1^i(w, \epsilon) - \delta_i(w) \quad (4.80)$$

ここで,

$$\tilde{\pi}(w, \epsilon) = \text{col}(\tilde{\pi}^1(w, \epsilon), \dots, \tilde{\pi}^m(w, \epsilon), \tilde{\pi}_\eta(w, \epsilon)) \quad (4.81)$$

$$\tilde{\pi}^i(w, \epsilon) = (\tilde{\pi}_1^i(w, \epsilon), \dots, \tilde{\pi}_{\rho_i}^i(w, \epsilon))^T, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.82)$$

である. ■

この仮定は通常の出カレギュレーション問題における零誤差多様体, すなわち, その上で追従誤差が零となる多様体の存在を意味する. 明らかに,  $\tilde{\pi}_j^i(w, \epsilon) = L_{s'}^{j-1} \delta_i(w)$  ( $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, \rho_i$ ) である.

多様体  $\mathcal{M}$  上における動特性は以下のように表すことができる.

$$\frac{dE^i}{dt'} = H_i E^i, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.83)$$

$$\frac{dE_\eta}{dt'} = p(E, w, \epsilon) \quad (4.84)$$

$$\frac{dw}{dt'} = s'(w) \quad (4.85)$$

ただし,

$$E = \text{col}(E^1, \dots, E^m, E_\eta) \quad (4.86)$$

$$E_\eta = \eta - \tilde{\pi}_\eta(w, \epsilon) \quad (4.87)$$

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

である．多様体  $\mathcal{M}$  上では  $E^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) は大域指数安定であり， $w$  は仮定より Poisson 安定である．ここで， $E^i = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ )， $w = 0$  に制限したときのダイナミクスは以下ようになる．

$$\frac{dE_\eta}{dt'} = p(0, \dots, 0, E_\eta, 0, \epsilon) := p'(E_\eta, \epsilon) \quad (4.88)$$

仮定 4.6 ( $\mathcal{M}$  上の零ダイナミクスの安定性)  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_1$  ( $\epsilon_1 > \gamma^q$ ) に対して，(4.88) の  $E_\eta$  は局所指数安定である． ■

ゆえに，中心多様体定理によって， $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_1$  において，十分小さな  $w$  および  $E^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) に対して， $E_\eta$  は局所指数安定となる．

つぎに，システム全体の安定性について考える． $E_Z = Z - \pi(X, w, \epsilon)$  とすると，その動特性は以下の式で表される．

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{dE_Z}{dt'} = & A_Z Z + B_Z u_s(X, w, \epsilon) - \epsilon \left[ \frac{\partial \pi}{\partial X} \{ \bar{f}_X(X, Z, \epsilon) \right. \\ & \left. + \bar{g}_X(X, Z, \epsilon) u_s(X, w, \epsilon) \} + \frac{\partial \pi}{\partial w} s'(w) \right] \end{aligned} \quad (4.89)$$

$E_Z = 0$  に関する Taylor 展開は以下ようになる．

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{dE_Z}{dt'} = & A_Z E_Z - \epsilon \frac{\partial \pi}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Z} \{ \bar{f}_X(X, Z, \epsilon) \\ & + \bar{g}_X(X, Z, \epsilon) u_s(X, w, \epsilon) \} |_{Z=\pi(X, w, \epsilon)} E_Z + O(E_Z^2) \end{aligned} \quad (4.90)$$

よって，十分小さな  $\epsilon$ ， $X$ ， $w$  に対して， $E_Z$  は局所指数安定となる． $E_Z$  に関して以下の仮定をおく．

仮定 4.7  $\epsilon = \gamma^q$  および十分小さな  $X$ ， $w$  に対して， $E_Z$  は局所指数安定である． ■

もし， $\epsilon$  が  $\gamma$  と無関係に決定できるのであれば，仮定 4.7 は必要ないのであるが，実際には， $\epsilon$  は  $\gamma^q$  というある小さな値をもつが，どこまでも小さくとれるわけではない．そのため，仮定 4.7 の条件を確認することが必要となる．

定理 4.1 仮定 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 のもとで，十分小さな初期状態  $w(0)$ ， $E(0)$ ， $E_Z(0)$  に対して，フィードバック則 (4.51) を用いることによって，漸近追従制御問題を達成することができる．

#### 4.5. $\epsilon$ -修正法に基づく近似解法

証明 仮定より,  $E, E_Z$  の動特性は局所指数安定となり, その原点における線形近似系の係数行列はすべての固有値を複素平面の左半平面にもつ. ゆえに, 中心多様体定理より, 十分小さな初期状態  $w(0), E(0), E_Z(0)$  に対して,  $E, E_Z$  は零に収束する. これは, 漸近追従制御問題が達成されることを意味する. ◁

#### 4.5 $\epsilon$ -修正法に基づく近似解法

以上で提案した漸近追従制御則を得るためには, 偏微分方程式 (4.71), (4.78) の解  $\pi(X, w, \epsilon), u_s(X, w, \epsilon)$  を求める必要がある. しかしながら, 一般的にその解析的な解を得ることは困難である. ここでは,  $\epsilon$  が微小な数であることに着目し,  $\epsilon$  に関する Taylor 級数展開を用いて近似解を求める.

Taylor 級数展開において,  $\Xi_\epsilon^k$  を  $\epsilon$  の  $k$  次までの項を取り出す演算子とし,

$$\pi^k(X, w, \epsilon) = \Xi_\epsilon^k[\pi(X, w, \epsilon)] \quad (4.91)$$

$$u_s^k(X, w, \epsilon) = \Xi_\epsilon^k[u_s(X, w, \epsilon)] \quad (4.92)$$

とおく. ただし,  $\pi^{-1} = 0, u_s^{-1} = 0$  とする. これらを (4.71), (4.78) に代入すると,  $k = 0, 1, \dots$  に対して, 以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} A_Z \pi^k(X, w, \epsilon) + B_Z u_s^k(X, w, \epsilon) &= \epsilon \cdot \Xi_\epsilon^{k-1} \left[ \frac{\partial \pi^{k-1}}{\partial X} \{ \bar{f}_X(X, \pi^{k-1}(X, w, \epsilon), \epsilon) \right. \\ &\quad \left. + \bar{g}_X(X, \pi^{k-1}(X, w, \epsilon), \epsilon) u_s^{k-1}(X, w, \epsilon) \} + \frac{\partial \pi^{k-1}}{\partial w} s'(w) \right] \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \Xi_\epsilon^k [\bar{\kappa}_{\rho_i}^i(X, \pi^k(X, w, \epsilon), \epsilon)] + \sum_{j=1}^m \Xi_\epsilon^k [\bar{\lambda}_{\rho_i}^{ij}(X, \pi^k(X, w, \epsilon), \epsilon) u_{s_j}^k(X, w, \epsilon)] - L_{s'}^{\rho_i} \delta_i(w) \\ + \beta_{\rho_i-1}^i (X_{\rho_i}^i - L_{s'}^{\rho_i-1} \delta_i(w)) + \dots + \beta_0^i (X_1^i - \delta_i(w)) = 0, \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (4.94)$$

$k = 0$  のとき, (4.93), (4.94) は代数方程式となり,  $\pi^0, u_s^0$  を求めることができる. つぎに,  $\pi^{k-1}, u_s^{k-1}$  が得られていると仮定する. そのとき, (4.93) を  $\pi^k$  について解くことができ, その解を (4.94) に代入することによって, 代数的に  $\pi^k, u_s^k$  を得ることができる. このように  $\epsilon$  の低次の項から順に求める方法は, 特異摂動系の理論では  $\epsilon$ -修正法として知られている [31, 39].  $\epsilon$  は微小な数であるので,  $\epsilon$  に関して 2, 3 次程度の近似解でも十分に真の解に近いことが期待できる.

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

つぎに，外部システムを含むシステムに  $\epsilon$ -修正法を適用した場合，外部システムの状態  $w$  が出力の目標値  $y_d$  の複数回の微係数で置き換えられることを示します，

$$Y_{d,i}(w) = \text{col}(\delta(w), L_s \delta(w), \dots, L_s^i \delta(w)) \quad (4.95)$$

とおく． $k = 0$  のとき，0 次の近似解は

$$\pi^0(X, Y_{d,\rho_M}(w), \epsilon), \quad u_s^0(X, Y_{d,\rho_M}(w), \epsilon) \quad (4.96)$$

というふうに表すことができる．ただし，

$$\rho_M = \max_{i=1,\dots,m} \rho_i \quad (4.97)$$

である．つぎに， $k - 1$  次の近似解が

$$\pi^{k-1}(X, Y_{d,\rho_{M+k-1}}(w), \epsilon), \quad u_s^{k-1}(X, Y_{d,\rho_{M+k-1}}(w), \epsilon) \quad (4.98)$$

のように表すことができると仮定する．このとき，(4.93) に含まれる  $w$  に関する微分演算子  $L_s$  が問題となるが，

$$L_s \pi^{k-1} = \frac{\partial \pi^{k-1}}{\partial Y_{d,\rho_{M+k-1}}} \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} Y_{d,\rho_{M+k}} \quad (4.99)$$

となり， $k$  次の近似解は

$$\pi^k(X, Y_{d,\rho_{M+k}}(w), \epsilon), \quad u_s^k(X, Y_{d,\rho_{M+k}}(w), \epsilon) \quad (4.100)$$

のように表すことができる．また，

$$Y_{d,i} = \text{col}(y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(i)}) \quad (4.101)$$

であるので，外部システムの状態  $w$  の代わりに  $y_d$  および  $y_d$  の適当な回数の時間微分によって， $u_s$  の近似解を表現することが可能である．



## 4.6 数値例: ball and plate system

ここでは, 原点において相対次数が定義できない ball and plate system に本章で提案する手法を適用することを考える. 図 6 に ball and plate system の概略図を示す.

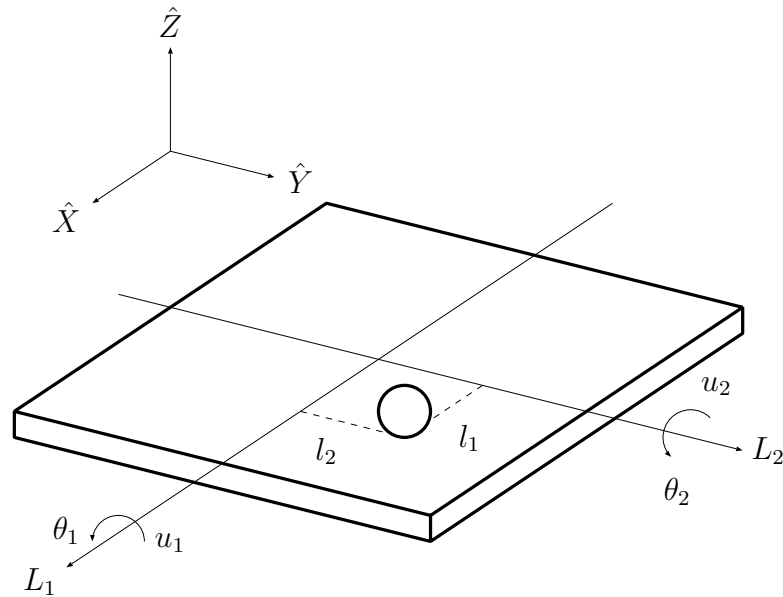


図 6 Ball and plate system

ball and plate system について以下のように設定する.

- $\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$  座標系に対して  $L_1L_2L_3$  座標系を  $L_1$  軸と  $L_2$  軸が平板と平行になるようにとる.
- $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  を  $\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$  座標系におけるボールの重心位置とし,  $(l_1, l_2, 0)$  を  $L_1L_2L_3$  座標系におけるボールの重心位置とする.
- $L_1$  軸に関して角度  $\theta_1$ ,  $L_2$  軸に関して角度  $\theta_2$  という回転を与えることによってボールを動かす.
- ボールは平板上を滑らずに回転すると仮定する.
- $\theta_1, \theta_2$  がともに零のとき,  $L_1, L_2, L_3$  軸はそれぞれ  $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$  軸に一致するものとする.

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

このシステムに対して，外部システムによって与えられる目標軌道にボールの平板上の位置を追従させることを目的とする．

ball and plate system の状態方程式はつぎのように表される．

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.102)$$

ここで，

$$x = (x_1, \dots, x_8)^T = (l_1, l_2, \dot{l}_1, \dot{l}_2, \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)^T \quad (4.103)$$

$$u = (u_1, u_2)^T = (\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2)^T \quad (4.104)$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ K(2x_4x_7 \sin x_6 + x_1x_7^2 \sin^2 x_6 + x_1x_8^2 + G \cos x_5 \sin x_6) \\ K(-2x_1x_7x_8 \cos x_6 - 2x_3x_7 \sin x_6 + x_2x_7^2 - G \sin x_5) \\ x_7 \\ x_8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Kx_2 \sin x_6 & 0 \\ -Kx_1 \sin x_6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.106)$$

#### 4.6. 数値例: ball and plate system

である．ただし，

$$I_p = \text{diag}(J, J, 2J) : \text{平板の慣性モーメント} \quad (4.107)$$

$$I_b = \text{diag}(J_b, J_b, J_b) : \text{ボールの慣性モーメント} \quad (4.108)$$

$$M : \text{ボールの質量} \quad (4.109)$$

$$R : \text{ボールの半径} \quad (4.110)$$

$$G : \text{重力加速度} \quad (4.111)$$

$$K = \frac{M}{M + J_b/R^2} \quad (4.112)$$

である．また，与えられる目標軌道にボールの平板上の位置を追従させることを目的とすることより，出力を

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 \quad (4.113)$$

とする．この出力  $y = (y_1, y_2)^T$  を目標軌道  $y_d = (y_{d1}, y_{d2})^T$  に追従させる．目標軌道  $y_d$  は以下の外部システムによって生成されるものとする．

$$\dot{w} = Sw \quad (4.114)$$

$$y_d = Qw$$

ただし，

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.115)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

まず，ball and plate system の相対次数について調べる．出力  $y_1, y_2$  に対して

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

時間微分を繰り返すことによって以下の式が得られる .

$$\begin{aligned}
 y_1 &= x_1 \\
 y_1^{(1)} &= x_3 \\
 y_1^{(2)} &= K(2x_4x_7 \sin x_6 + x_1x_7^2 \sin^2 x_6 + x_1x_8^2 + G \cos x_5 \sin x_6) \\
 &\quad + Kx_2 \sin x_6 u_1
 \end{aligned} \tag{4.116}$$

$$\begin{aligned}
 y_2 &= x_2 \\
 y_2^{(1)} &= x_4 \\
 y_2^{(2)} &= K(-2x_1x_7x_8 \cos x_6 - 2x_3x_7 \sin x_6 + x_2x_7^2 - G \sin x_5) \\
 &\quad - Kx_1 \sin x_6 u_1
 \end{aligned}$$

このとき , 以下の無干渉化行列  $D(x)$  が得られる .

$$D(x) = \begin{pmatrix} Kx_2 \sin x_6 & 0 \\ -Kx_1 \sin x_6 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.117}$$

行列  $D(x)$  が正則でないことより , ball and plate system は弱相対次数  $\{\rho_1, \rho_2\} = \{2, 2\}$  をもつが , 相対次数をもたないことがわかる . つぎに , ball and plate system のロバスト相対次数について調べる . システム (4.102), (4.113) の  $x = 0$  における線形近似系は以下ようになる .

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + Bu \\
 y &= Cx
 \end{aligned} \tag{4.118}$$

4.6. 数値例: ball and plate system

ただし,

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & KG & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -KG & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.119}$$

である．出力  $y_1, y_2$  に対して時間微分を繰り返すことによって以下の式が得られる．

$$\begin{aligned}
 y_1 &= x_1 & y_2 &= x_2 \\
 y_1^{(1)} &= x_3 & y_2^{(1)} &= x_4 \\
 y_1^{(2)} &= KGx_6 & y_2^{(2)} &= -KGx_5 \\
 y_1^{(3)} &= KGx_8 & y_2^{(3)} &= -KGx_7 \\
 y_1^{(4)} &= KGu_2 & y_2^{(4)} &= -KGu_1
 \end{aligned} \tag{4.120}$$

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

このとき，無干渉化行列  $D'(x)$  はつぎのようになる．

$$D'(x) = \begin{pmatrix} 0 & KG \\ -KG & 0 \end{pmatrix} \quad (4.121)$$

行列  $D'(x)$  が正則であることより，ball and plate system はロバスト相対次数  $\{R_1, R_2\} = \{4, 4\}$  をもつ．このシステムにおいては， $\rho_1 = 2, \rho_2 = 2, R_1 = 4, R_2 = 4$  であり， $\eta$  に相当する動特性は存在しない．よって，仮定 4.1, 4.3, 4.5, 4.6 が満たされることがわかる．

座標変換

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1, \xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2, \xi_4^2)^T \\ &= (x_1, x_3, \sin x_6, x_8 \cos x_6, x_2, x_4, \sin x_5, x_7 \cos x_5)^T \end{aligned} \quad (4.122)$$

を用いることによって，以下のシステムを得ることができる．

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^1 &= \xi_2^1 \\ \dot{\xi}_2^1 &= K \left( \frac{2\xi_2^2 \xi_4^2 \xi_3^1}{\sqrt{1 - (\xi_3^2)^2}} + \frac{\xi_1^1 (\xi_4^2)^2 (\xi_3^1)^2}{1 - (\xi_3^2)^2} + \frac{\xi_1^1 (\xi_4^1)^2}{1 - (\xi_3^1)^2} \right. \\ &\quad \left. + G \sqrt{1 - (\xi_3^2)^2} \xi_3^1 + \xi_1^2 \xi_3^1 u_1 \right) \\ \dot{\xi}_3^1 &= \xi_4^1 \\ \dot{\xi}_4^1 &= -\frac{(\xi_4^1)^2 \xi_3^1}{1 - (\xi_3^1)^2} + \sqrt{1 - (\xi_3^1)^2} u_2 \\ \dot{\xi}_1^2 &= \xi_2^2 \\ \dot{\xi}_2^2 &= K \left( -\frac{2\xi_1^1 \xi_4^2 \xi_3^1}{\sqrt{1 - (\xi_3^2)^2}} - \frac{2\xi_2^1 \xi_4^2 \xi_3^1}{\sqrt{1 - (\xi_3^2)^2}} + \frac{\xi_1^2 (\xi_4^2)^2}{1 - (\xi_3^2)^2} - G \xi_3^2 - \xi_1^1 \xi_3^1 u_1 \right) \\ \dot{\xi}_3^2 &= \xi_4^2 \\ \dot{\xi}_4^2 &= -\frac{(\xi_4^2)^2 \xi_3^2}{1 - (\xi_3^2)^2} + \sqrt{1 - (\xi_3^2)^2} u_1 \end{aligned} \quad (4.123)$$

このシステムは仮定 4.2 を満たしている．さらに，(4.37), (4.38) を満たすように  $q = 3$  とし，時間軸変換

$$t' = \gamma t \quad (4.124)$$

4.6. 数値例: ball and plate system

および座標変換

$$X = (X_1^1, X_2^1, X_1^2, X_2^2)^T = (\xi_1^1, \xi_2^1/\gamma, \xi_1^2, \xi_2^2/\gamma)^T \quad (4.125)$$

$$Z = (Z_1^1, Z_2^1, Z_1^2, Z_2^2)^T = (\xi_3^1/\gamma^2, \xi_4^1, \xi_3^2/\gamma^2, \xi_4^2)^T \quad (4.126)$$

を用いることによって，以下の特異摂動系を得ることができる．

$$\begin{aligned} \frac{dX_1^1}{dt'} &= X_2^1 \\ \frac{dX_2^1}{dt'} &= K \left( \frac{2\gamma X_2^2 Z_2^2 Z_1^1}{\sqrt{1 - \gamma\epsilon(Z_1^2)^2}} + \frac{X_1^1 \gamma^2 (Z_2^2)^2 (Z_1^1)^2}{1 - \gamma\epsilon(Z_1^2)^2} + \frac{X_1^1 (Z_2^1)^2}{\gamma^2 (1 - \gamma\epsilon(Z_1^1)^2)} \right. \\ &\quad \left. + G \sqrt{1 - \gamma\epsilon(Z_1^2)^2} Z_1^1 + X_1^2 Z_1^1 u_1 \right) \\ \epsilon \frac{dZ_1^1}{dt'} &= Z_2^1 \\ \epsilon \frac{dZ_2^1}{dt'} &= -\frac{\gamma\epsilon(Z_2^1)^2 Z_1^1}{1 - \gamma\epsilon(Z_1^1)^2} + \gamma^2 \sqrt{1 - \gamma\epsilon(Z_1^1)^2} u_2 \\ \frac{dX_1^2}{dt'} &= X_2^2 \\ \frac{dX_2^2}{dt'} &= K \left( -\frac{2X_1^1 Z_2^2 Z_2^1}{\gamma^2 \sqrt{1 - \gamma\epsilon(Z_1^1)^2}} - \frac{2\gamma X_2^1 Z_2^2 Z_1^1}{\sqrt{1 - \gamma\epsilon(Z_1^1)^2}} + \frac{X_1^2 (Z_2^2)^2}{\gamma^2 (1 - \gamma\epsilon(Z_1^1)^2)} \right. \\ &\quad \left. - G Z_1^2 - X_1^1 Z_1^1 u_1 \right) \\ \epsilon \frac{dZ_1^2}{dt'} &= Z_2^2 \\ \epsilon \frac{dZ_2^2}{dt'} &= -\frac{\gamma\epsilon(Z_2^2)^2 Z_1^2}{1 - \gamma\epsilon(Z_1^2)^2} + \gamma^2 \sqrt{1 - \gamma\epsilon(Z_1^2)^2} u_1 \end{aligned} \quad (4.127)$$

つぎに，この特異摂動系に対する追従制御則の設計を行う．まず，以下のフィードバック則を用いる．

$$u = -D_3^{-1}(X, Z, \epsilon)F(X, Z, \epsilon) + D_3^{-1}(X, Z, \epsilon)u_s \quad (4.128)$$

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

ここで,

$$D_3(X, Z, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^2 \sqrt{1 - \gamma\epsilon(Z_1^1)^2} \\ \gamma^2 \sqrt{1 - \gamma\epsilon(Z_1^2)^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.129)$$

$$F(X, Z, \epsilon) = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma\epsilon(Z_2^1)^2 Z_1^1}{1 - \gamma\epsilon(Z_1^1)^2} + \alpha_0^1 Z_1^1 + \alpha_1^1 Z_2^1 \\ -\frac{\gamma\epsilon(Z_2^2)^2 Z_1^2}{1 - \gamma\epsilon(Z_1^2)^2} + \alpha_0^2 Z_1^2 + \alpha_1^2 Z_2^2 \end{pmatrix} \quad (4.130)$$

$$u_s = (u_{s1}, u_{s2})^T \quad (4.131)$$

である.  $u_s(X, w, \epsilon)$  を求めるための条件として,  $Z$  が収束する多様体  $\mathcal{M}$  に対す



る不変多様体条件

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_0^1 & -\alpha_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha_0^2 & -\alpha_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1^1(X, w, \epsilon) \\ \pi_2^1(X, w, \epsilon) \\ \pi_1^2(X, w, \epsilon) \\ \pi_2^2(X, w, \epsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{s1}(X, w, \epsilon) \\ u_{s2}(X, w, \epsilon) \end{pmatrix} \\
&= \epsilon \left[ \frac{\partial \pi}{\partial X_1^1} X_1^2 + \frac{\partial \pi}{\partial X_2^1} K \left\{ \frac{2\gamma X_2^2 \pi_2^2(X, w, \epsilon) \pi_1^1(X, w, \epsilon)}{\sqrt{1 - \gamma \epsilon (\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2}} \right. \right. \\
&+ \frac{X_1^1 \gamma^2 (\pi_2^2(X, w, \epsilon))^2 (\pi_1^1(X, w, \epsilon))^2}{1 - \gamma \epsilon (\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2} + \frac{X_1^1 (\pi_2^1(X, w, \epsilon))^2}{\gamma^2 (1 - \gamma \epsilon (\pi_1^1(X, w, \epsilon))^2)} \\
&+ G \sqrt{1 - \gamma \epsilon (\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2} \pi_1^1(X, w, \epsilon) \\
&+ \frac{X_1^2 \pi_1^1(X, w, \epsilon)}{\gamma^2 \sqrt{1 - \gamma \epsilon (\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2}} \left( \frac{\gamma \epsilon (\pi_2^2(X, w, \epsilon))^2 \pi_1^1(X, w, \epsilon)}{1 - \gamma \epsilon (\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2} \right. \\
&- \alpha_0^2 \pi_1^1(X, w, \epsilon) - \alpha_1^2 \pi_2^2(X, w, \epsilon) + u_{s2}(X, w, \epsilon) \left. \right) \left. \right\} + \frac{\partial \pi}{\partial X_1^2} X_2^2 \\
&+ \frac{\partial \pi}{\partial X_2^2} K \left\{ - \frac{2X_1^1 \pi_2^2(X, w, \epsilon) \pi_2^1(X, w, \epsilon)}{\gamma^2 \sqrt{1 - \gamma \epsilon (\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2}} \right. \\
&- \frac{2\gamma X_2^1 \pi_2^2(X, w, \epsilon) \pi_1^1(X, w, \epsilon)}{\sqrt{1 - \gamma \epsilon (\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2}} \\
&+ \frac{X_1^2 (\pi_2^2(X, w, \epsilon))^2}{\gamma^2 (1 - \gamma \epsilon (\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2)} - G \pi_1^2(X, w, \epsilon) \\
&- \frac{K X_1^1 \pi_1^1(X, w, \epsilon)}{\gamma^2 \sqrt{1 - \gamma \epsilon (\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2}} \left( \frac{\gamma \epsilon (\pi_2^2(X, w, \epsilon))^2 \pi_1^1(X, w, \epsilon)}{1 - \gamma \epsilon (\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2} \right. \\
&- \alpha_0^2 \pi_1^1(X, w, \epsilon) - \alpha_1^2 \pi_2^2(X, w, \epsilon) + u_{s2}(X, w, \epsilon) \left. \right) \left. \right\} + \frac{\partial \pi}{\partial w} s'(w) \Big] \quad (4.132)
\end{aligned}$$

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

および不変多様体  $M$  上の誤差ダイナミクス

$$\begin{aligned}
0 = & K \left\{ \frac{2\gamma X_2^2 \pi_2^2(X, w, \epsilon) \pi_1^1(X, w, \epsilon)}{\sqrt{1 - \gamma\epsilon(\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2}} + \frac{X_1^1 \gamma^2 (\pi_2^2(X, w, \epsilon))^2 (\pi_1^1(X, w, \epsilon))^2}{1 - \gamma\epsilon(\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2} \right. \\
& + \frac{X_1^1 (\pi_2^1(X, w, \epsilon))^2}{\gamma^2 (1 - \gamma\epsilon(\pi_1^1(X, w, \epsilon))^2)} + G \sqrt{1 - \gamma\epsilon(\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2} \pi_1^1(X, w, \epsilon) \\
& + \frac{X_1^2 \pi_1^1(X, w, \epsilon)}{\gamma^2 \sqrt{1 - \gamma\epsilon(\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2}} \left( \frac{\gamma\epsilon(\pi_2^2(X, w, \epsilon))^2 \pi_1^2(X, w, \epsilon)}{1 - \gamma\epsilon(\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2} \right. \\
& \left. \left. - \alpha_0^2 \pi_1^2(X, w, \epsilon) - \alpha_1^2 \pi_2^2(X, w, \epsilon) + u_{s2}(X, w, \epsilon) \right) \right\} \\
& - L_s^2 \delta_1(w) + \beta_1^1 (X_2^1 - L_s \delta_1(w)) + \beta_1^1 (X_1^1 - \delta_1(w)) \tag{4.133}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & K \left\{ -\frac{2X_1^1 \pi_2^2(X, w, \epsilon) \pi_2^1(X, w, \epsilon)}{\gamma^2 \sqrt{1 - \gamma\epsilon(\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2}} - \frac{2\gamma X_2^1 \pi_2^2(X, w, \epsilon) \pi_1^1(X, w, \epsilon)}{\sqrt{1 - \gamma\epsilon(\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2}} \right. \\
& + \frac{X_1^2 (\pi_2^2(X, w, \epsilon))^2}{\gamma^2 (1 - \gamma\epsilon(\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2)} - G \pi_1^2(X, w, \epsilon) \\
& - \frac{X_1^1 \pi_1^1(X, w, \epsilon)}{\gamma^2 \sqrt{1 - \gamma\epsilon(\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2}} \left( \frac{\gamma\epsilon(\pi_2^2(X, w, \epsilon))^2 \pi_1^2(X, w, \epsilon)}{1 - \gamma\epsilon(\pi_1^2(X, w, \epsilon))^2} \right. \\
& \left. \left. - \alpha_0^2 \pi_1^2(X, w, \epsilon) - \alpha_1^2 \pi_2^2(X, w, \epsilon) + u_{s2}(X, w, \epsilon) \right) \right\} \\
& - L_s^2 \delta_2(w) + \beta_1^1 (X_2^2 - L_s \delta_2(w)) + \beta_1^1 (X_1^2 - \delta_2(w)) \tag{4.134}
\end{aligned}$$

が得られる．

(4.132), (4.133), (4.134) を  $(\pi(X, w, \epsilon), u_s(X, w, \epsilon))$  について,  $\epsilon$ -修正法を用いて近似的に解くことによって, 漸近追従制御則を得る．偏微分方程式 (4.132) (4.133), (4.134) の近似解は,  $\epsilon$  に関して 2 次まで求めた．原点まわりのある領域で, この近似解を偏微分方程式に代入した残差が十分小さいことから, 仮定 4.4 は局所的に満たされているものと考えられる．この例題を含むいくつかの数値例においては, 偏微分方程式の原点近傍における可解性そのものは,  $\gamma$  の選び方にあまり影響されなかった．一方, 近似解が求められる領域は  $\gamma$  の選び方に依存して大きく変化した．単純に  $\gamma$  を小さくすればよいわけではなく, 適正な値が存在するようである．また, 上記の  $\gamma, \epsilon$  に対して, 仮定 4.7 が成り立つことは, 原点における線形近似によって容易に確かめることができる．

シミュレーション結果を以下に示す．シミュレーションに用いたシステムおよび設計のパラメータを表 1 に示す．目標軌道は,  $y_{d1} = 2 \sin(\pi t/4)$ ,  $y_{d2} = 7 \sin(\pi t/8)$

#### 4.6. 数値例: ball and plate system

表 1 Values of model parameters and control condition

---

$G = 9.807$
$K = 0.7143$
$q = 3$
$\epsilon = 0.064$
$\alpha_0^1 = 25$
$\alpha_1^1 = 10$
$\alpha_0^2 = 25$
$\alpha_1^2 = 10$
$\beta_0^1 = 1$
$\beta_1^1 = 2$
$\beta_0^2 = 1$
$\beta_1^2 = 2$
$x(0) = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)^T$

---

とした (図 7), 提案する手法はハイゲインフィードバックであるので, 得られた  $u$  の値に飽和関数を作用させて,  $|u_i| \leq 5$  ( $i = 1, 2$ ) となるようにした. 提案手法との比較のために, Hauser ら [14] の方法を多入力多出力系に拡張した方法 [16] ( $g(x)$  を近似する場合) による結果と, 原点における線形近似系に対して極配置を行った結果を同時に示す. ハイゲインフィードバックのほうが追従誤差に関して有利であるので, これらの比較対象におけるパラメータを, 閉ループ系の線形近似系の極が提案手法と同じになるように選んだ. 図 8, 9 にシミュレーションにおける追従誤差を示す. 図 8 が  $y_1$  の追従誤差で, 図 9 が  $y_2$  の追従誤差である. 提案手法および線形近似においては, 入力に飽和を設けた場合とそうでない場合の出力の値の変化が, 2, 3 秒付近に多少現れている程度であったが, Hauser の方法では入力に飽和を設けた場合には状態が発散した. そこで, Hauser の方法のみ飽和関数を通していない入力を用いてシミュレーションを行っている. 近似に基づく二種類の従来法においては追従誤差が残っている一方, 提案手法ではほぼ厳密な追従が実現できていることがわかる.

#### 4. 特異摂動系に変換する方法

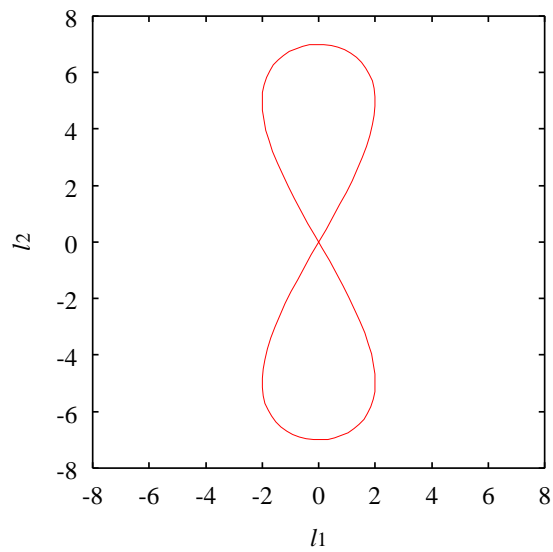


図 7 Reference trajectory of the ball ( $y_{d1} = 2 \sin(\pi t/4)$ ,  $y_{d2} = 7 \sin(\pi t/8)$ )

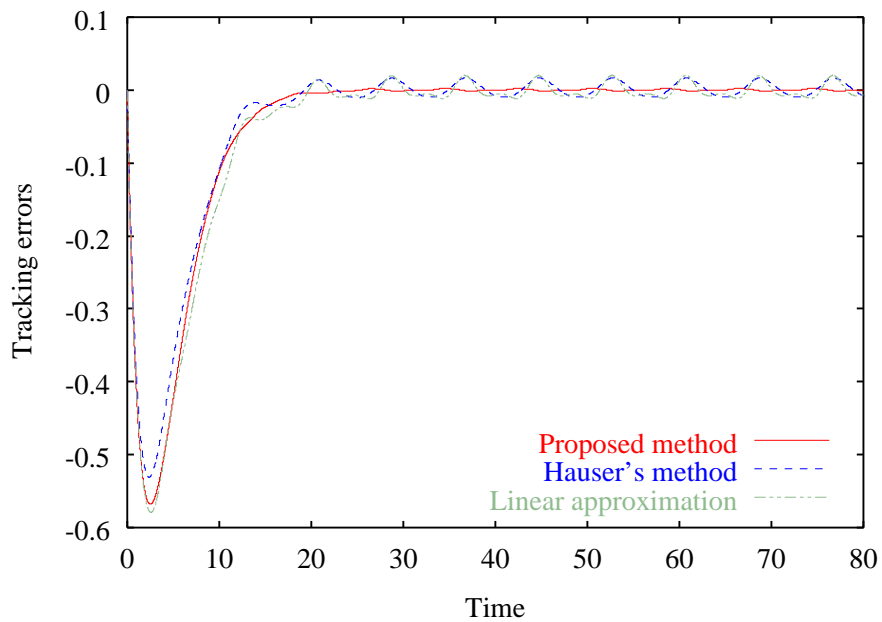
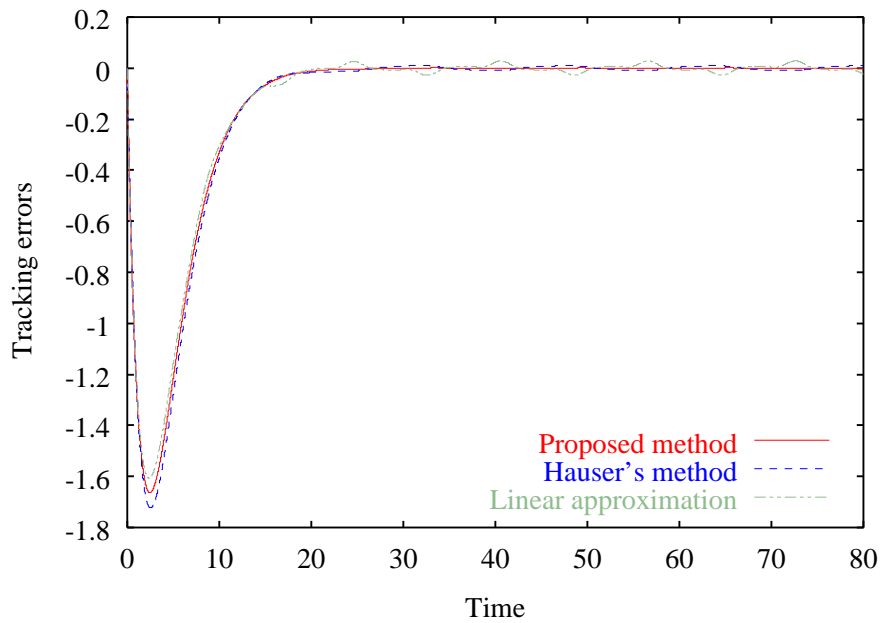


図 8 Tracking error of  $y_1$

図 9 Tracking error of  $y_2$ 

#### 4.7 まとめ

本章では，相対次数が定義できない点が存在する多入力多出力非線形システムについて考察し，そのようなシステムに対する漸近追従制御法を提案した．プラントが多入力多出力系の場合には，無干渉化行列が正則でなくなる場合が生じるが，そのような場合にプラントを形式的に特異摂動系に変換できる条件を導き出した．また，追従制御則を得るための偏微分方程式の近似解法として， $\epsilon$ -修正法が利用できることを示した．近似解においては，外部システムの状態変数  $w$  が出力の目標値の有限回の微係数で置き換えられ，外部システムのダイナミクスは制御則設計時に不要となることを示した．原点において相対次数が定義できない ball and plate system のシミュレーションによって他の近似に基づく手法と比較し，提案手法の優位性を示した．提案手法においては， $\epsilon$  に関する Taylor 級数展開による近似を用いていることから，peaking 現象のために得られる制御則が局所的なものとなる場合がある．そのため，peaking 現象を回避する手法を考える必要がある．



## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

### 5.1 背景

出力レギュレーションの目的は、外部システムと呼ばれる自律システムによって生成される信号に対して、漸近追従制御あるいは漸近外乱除去を達成する制御則を求めることである。Isidori and Byrnes [26] は局所的な出力レギュレーション問題の可解性がレギュレータ方程式と呼ばれる偏微分代数方程式の可解性と関連することを示した。近年では、大域的あるいは準大域的な出力レギュレーション問題が、例えば Khalil [29], Isidori [24], Serrani and Isidori [37], Serrani, Isidori and Marconi [38] などによって解かれている。しかしながら、これらの研究においては、プラントが非線形最小位相系であるという仮定を必要とする。一方、Yamashita and Isidori [46] は、相対次数が定義できない点が存在するシステムに対して、状態フィードバックを用いた大域出力レギュレーション法を提案している。そこでは、追従誤差が零となる不変多様体を導入し、この多様体にシステムの状態を漸近させることによって大域出力レギュレーションを実現させている。

この章では、非線形最小位相系とは限らない一入力出力非線形システムに対する状態フィードバックを用いた大域出力レギュレーション問題について考え、この問題を [46] で示された手法を利用することによって解く。まず、追従誤差が零となる零誤差多様体を求める。つぎに、プラントの状態を零誤差多様体に漸近させる不変多様体を構成するために、バックステッピングの拡張となる手法を提案する。この手法によって得られる不変多様体を用いた座標変換によってプラントを変換し、得られるシステムに対して、linear growth conditionのもとで可変ゲイン状態フィードバック則を用いることによって、大域出力レギュレーションが実現できることを示す。提案する手法においては、プラントの相対次数の存在性を必要としないため、非線形非最小位相系だけでなく、4章で示した相対次数が定義できない点が存在するシステムに対しても適用することができる。また、プラントの出力の定義を変える必要がない。

まず、5.2節において、大域出力レギュレーション問題の一問題である大域漸近追従制御問題について述べる。5.3節では、システムの挙動を指定する複数の不

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

変多様体を導入し，それらの多様体を用いてシステムを変換することを行う．この変換によって，ある多様体に制限されたときに，原点に大域漸近安定平衡点をもつシステムを得る．5.4節では，可変ゲイン状態フィードバック則を適用することによって大域漸近追従制御が達成できることを示す．5.5節では，本手法の有効性を確認するために簡単な非線形非最小位相系を用いた数値例を示す．5.6節で本章のまとめを述べる．

### 5.2 問題設定

本章では，大域出力レギュレーション問題の一つである大域漸近追従制御問題をあつかう．プラントとして以下の式で表される一入力一出力非線形システムを考える．

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ &\dots \\ \dot{x}_{\rho-1} &= x_\rho \\ \dot{x}_\rho &= f_{0\rho}(x) + g_{0\rho}(x)u \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_{0n}(x) + g_{0n}(x)u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{5.1}$$

ここで， $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  はプラントの状態， $u \in \mathbb{R}$  は入力， $y \in \mathbb{R}$  は出力である．また， $i = \rho, \dots, n$  に対して，関数  $f_{0i}(x)$  および  $g_{0i}(x)$  は十分滑らかであり， $f_{0i}(0) = 0$  と仮定する．

プラント (5.1) は，非線形最小位相系である必要はなく，非線形非最小位相系であってもよい．また，相対次数が定義できない点が存在してもよい．(5.1) によって表されるシステムは，実際には，運動方程式などから導出される状態方程式を座標変換することによって得られるが，座標変換の選び方によっては最終的に得られる制御則の形が変わる．また，(5.1) 中の定数  $\rho$  は，一般的には弱相対次数にとることが考えられるが，弱相対次数以下にとっても以下の議論に矛盾は生じ



ない。

プラントの出力  $y$  が追従する目標軌道  $y_d \in \mathbb{R}$  は以下の式で表される大域安定な外部システムの出力として与えられる。

$$\begin{aligned}\dot{w} &= s(w) \\ y_d &= \delta(w)\end{aligned}\tag{5.2}$$

ここで,  $w = (w_1, \dots, w_r)^T \in \mathbb{R}^r$  は外部システムの状態である。また, 関数  $s(w)$  および  $\delta(w)$  は十分滑らかであるとし,  $s(0) = 0$  および  $\delta(0) = 0$  であると仮定する。本章で提案する手法においては, 中心多様体定理を用いないため, 外部システムに対する Poisson 安定の仮定は不要である。

追従誤差を以下のように表す。

$$e(t) = y(t) - y_d(t)\tag{5.3}$$

まず, 大域漸近追従制御問題を以下のように定義する。

定義 5.1 (大域漸近追従制御問題) プラント (5.1) および外部システム (5.2) が与えられているとする。このとき, 条件

- 外部システムからの影響がないときに, 閉ループ系

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ &\dots \\ \dot{x}_{\rho-1} &= x_\rho \\ \dot{x}_\rho &= f_{0\rho}(x) + g_{0\rho}(x)u(x, 0) \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_{0n}(x) + g_{0n}(x)u(x, 0)\end{aligned}\tag{5.4}$$

の平衡点  $x = 0$  が大域漸近安定かつ局所指数安定である。

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

- 任意の初期状態  $(x(0), w(0))$  に対して，閉ループ系

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ &\dots \\ \dot{x}_{\rho-1} &= x_\rho \\ \dot{x}_\rho &= f_{0\rho}(x) + g_{0\rho}(x)u(x, w) \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_{0n}(x) + g_{0n}(x)u(x, w) \\ \dot{w} &= s(w)\end{aligned}\tag{5.5}$$

の軌道が有界であり，なおかつ追従誤差が

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0\tag{5.6}$$

となる．

を満たす状態フィードバック則  $u = u(x, w)$  ( $u(0, 0) = 0$ ) を求めよ．  $\square$

本章では，大域追従制御問題のみを考えているが，外部システムによって生成される外乱がプラントに加わる場合の外乱除去制御問題にも容易に拡張することができる．

### 5.3 システムの変換

ここでは，大域漸近追従制御問題を解くために [46] で示された手法を繰り返し適用することによって，ある多様体に制限されたときに，プラントの状態が零誤差多様体に収束するようにする．

まず，以下の仮定をおく．この仮定は [26] で示されるように局所出力レギュレーション問題の可解条件の一つとなっており，零誤差多様体の存在を仮定するものである．

### 5.3. システムの変換

仮定 5.1 以下の式を満たす関数  $\pi_0(w) = (\pi_{01}(w), \dots, \pi_{0n}(w))^T$  および  $c_0(w)$  ( $\pi_0(0) = 0$  and  $c_0(0) = 0$ ) が存在する .

$$\pi_{0,i+1}(w) = \frac{\partial \pi_{0i}}{\partial w} s(w), \quad (i = 1, \dots, \rho - 1) \quad (5.7)$$

$$f_{0i}(\pi_0(w)) + g_{0i}(\pi_0(w))c_0(w) = \frac{\partial \pi_{0i}}{\partial w} s(w), \quad (i = \rho, \dots, n)$$

$$0 = \pi_{01}(w) - \delta(w) \quad (5.8)$$

■

(5.7) は , 入力  $u = c_0(w)$  のもとで不変多様体  $\mathcal{M}_0 = \{(x, w) : x = \pi_0(w)\}$  が存在することを意味する . また , (5.8) はこの多様体上において追従誤差が零となることを表す . したがって , プラントの状態を  $\mathcal{M}_0$  に漸近させることによって追従誤差を零にすることができる .

関数  $\pi_0(w)$  および  $c_0(w)$  を用いて , 以下の座標変換および入力変換を定義する .

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x - \pi_0(w) \\ u_1 &= u - c_0(w) \end{aligned} \quad (5.9)$$

(5.9) によって , プラント (5.1) は以下のように表される .

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{1,\rho-1} &= \xi_{1\rho} \\ \dot{\xi}_{1\rho} &= f_{1\rho}(\xi_1, w) + g_{1\rho}(\xi_1, w)u_1 \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{1n} &= f_{1n}(\xi_1, w) + g_{1n}(\xi_1, w) \end{aligned} \quad (5.10)$$

ただし ,  $i = \rho, \dots, n$  に対して ,

$$\begin{aligned} f_{1i}(\xi_1, w) &= f_{0i}(\xi_1 + \pi_0(w)) + g_{0i}(\xi_1 + \pi_0(w))c_0(w) - \frac{\partial \pi_{0i}}{\partial w} s(w) \\ g_{1i}(\xi_1, w) &= g_{0i}(\xi_1 + \pi_0(w)) \end{aligned} \quad (5.11)$$

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

とおく．また，(5.7) および (5.11) より， $\xi_1 = 0$  のときに， $i = \rho, \dots, n$  に対して  $f_{1i}(0, w) = 0$  となる．(5.9) の変換によって，プラント (5.1) に対する大域漸近追従制御問題はシステム (5.10) に対する大域漸近安定化問題に帰着される．

以下では，ある多様体に制限されたときに，プラントの状態が多様体  $\mathcal{M}_0$  に収束するようにする．これを実現するために，入れ子構造をもつ多様体を構成する．このような多様体の概念図を図 10 に示す．そして，それらの多様体を用い

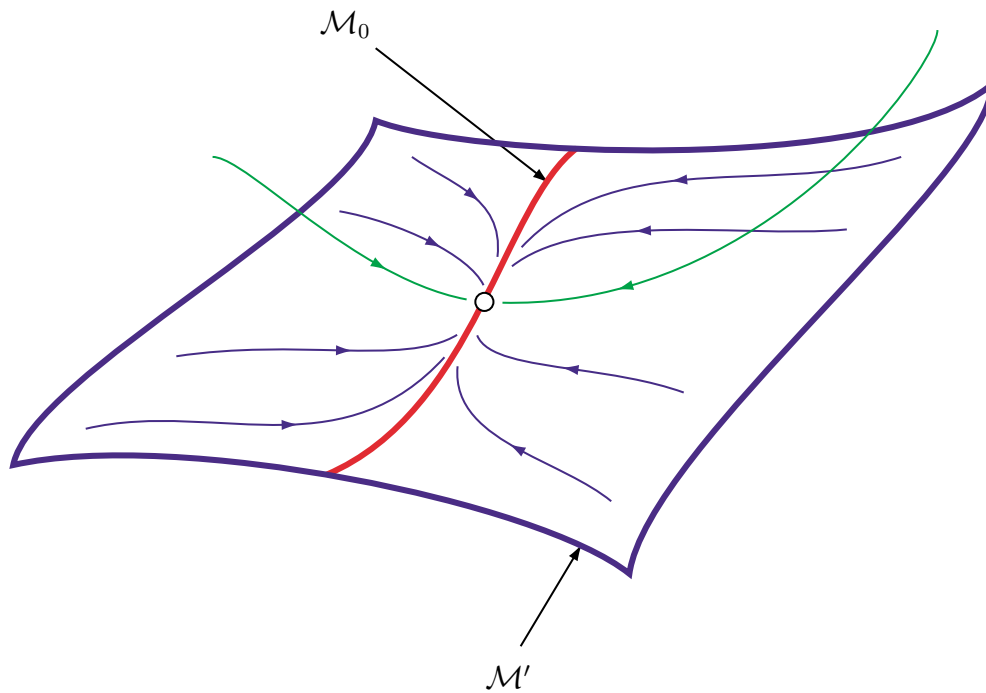


図 10 Sketch of manifolds

ることによって，システム (5.10) に対して繰り返し座標変換を行う．まず，表記の簡単化のために， $\nu = n - \rho + 1$  および  $\rho_k = \rho + k - 1$  とおく．また，任意の  $m$  次元ベクトル  $v = (v_1, \dots, v_m)^T$  および  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq m$  に対して， $i_1$  番目から  $i_2$  番目までの要素からなるベクトルを  $[v]_{i_2}^{i_1} = (v_{i_1}, \dots, v_{i_2})^T$  と表す．

### 5.3. システムの変換

$k = 1, \dots, \nu - 1$  に対して, 以下の座標変換および入力変換を考える.

$$\begin{aligned}\xi_{k+1,i} &= \xi_{ki}, \quad (i = 1, \dots, \rho_k) \\ \xi_{k+1,i} &= \xi_{ki} - \pi_{ki}([\xi_k]_{\rho_k}^1, w), \quad (i = \rho_{k+1}, \dots, n) \\ u_{k+1} &= u_k - c_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w)\end{aligned}\tag{5.12}$$

ただし,  $\pi_k(\cdot) = (\pi_{k\rho_{k+1}}(\cdot), \dots, \pi_{kn}(\cdot))^T$  および  $c_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w)$  は後述する仮定 5.2, 5.3 を満たす関数である. ここで, (5.12) の第 1 式より, 以下の関係が成り立つ.

$$\xi_{ji} = \xi_{ki}, \quad (i = 1, \dots, \rho_k; j = k + 1, \dots, \nu)\tag{5.13}$$

(5.12) の座標を用いて表したシステムを以下のように定義する.

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{k+1,1} &= \xi_{k+1,2} \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{k+1,\rho-1} &= \xi_{k+1,\rho} \\ \dot{\xi}_{k+1,\rho} &= f_{k+1,\rho}(\xi_{k+1}, w) + g_{k+1,\rho}(\xi_{k+1}, w)u_{k+1} \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{k+1,n} &= f_{k+1,n}(\xi_{k+1}, w) + g_{k+1,n}(\xi_{k+1}, w)u_{k+1}\end{aligned}\tag{5.14}$$

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

ただし,

$$\begin{aligned}
f_{k+1,i}(\xi_{k+1}, w) &= f_{ki}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, [\xi_{k+1}]_n^{\rho_{k+1}} + \pi_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), w) \\
&\quad + g_{ki}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, [\xi_{k+1}]_n^{\rho_{k+1}} + \pi_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), w) c_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), \\
&\quad (i = \rho, \dots, \rho_k) \\
f_{k+1,i}(\xi_{k+1}, w) &= f_{ki}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, [\xi_{k+1}]_n^{\rho_{k+1}} + \pi_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), w) \\
&\quad + g_{ki}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, [\xi_{k+1}]_n^{\rho_{k+1}} + \pi_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), w) c_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w) \\
&\quad - \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial w} s(w) - \sum_{j=1}^{\rho-1} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial \xi_{k+1,j}} \xi_{k+1,j+1} \\
&\quad - \sum_{j=\rho}^{\rho_k} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial \xi_{k+1,j}} \{ f_{kj}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, [\xi_{k+1}]_n^{\rho_{k+1}} + \pi_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), w) \\
&\quad + g_{kj}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, [\xi_{k+1}]_n^{\rho_{k+1}} + \pi_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), w) c_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w) \}, \\
&\quad (i = \rho_{k+1}, \dots, n) \\
g_{k+1,i}(\xi_{k+1}, w) &= g_{ki}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, [\xi_{k+1}]_n^{\rho_{k+1}} + \pi_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), w), \\
&\quad (i = \rho, \dots, \rho_k) \\
g_{k+1,i}(\xi_{k+1}, w) &= g_{ki}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, [\xi_{k+1}]_n^{\rho_{k+1}} + \pi_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), w) \\
&\quad - \sum_{j=\rho}^{\rho_k} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial \xi_{k+1,j}} g_{kj}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, [\xi_{k+1}]_n^{\rho_{k+1}} + \pi_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), w), \\
&\quad (i = \rho_{k+1}, \dots, n)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

とおく.

関数  $\pi_1([\xi_1]_{\rho}^1, w)$  および  $c_1([\xi_1]_{\rho}^1, w)$  に対して, 以下の仮定をおく.

仮定 5.2 以下の式を満たす関数  $\pi_1([\xi_1]_\rho^1, w)$  および  $c_1([\xi_1]_\rho^1, w)$  が存在する .

$$\begin{aligned} & f_{1i}([\xi_1]_\rho^1, \pi_1([\xi_1]_\rho^1, w), w) + g_{1i}([\xi_1]_\rho^1, \pi_1([\xi_1]_\rho^1, w), w)c_1([\xi_1]_\rho^1, w) \\ &= \frac{\partial \pi_{1i}}{\partial w} s(w) + \sum_{j=1}^{\rho-1} \frac{\partial \pi_{1i}}{\partial \xi_{1j}} \xi_{1,j+1} + \frac{\partial \pi_{1i}}{\partial \xi_{1\rho}} \{f_{1\rho}([\xi_1]_\rho^1, \pi_1([\xi_1]_\rho^1, w), w) \\ &+ g_{1\rho}([\xi_1]_\rho^1, \pi_1([\xi_1]_\rho^1, w), w)c_1([\xi_1]_\rho^1, w)\}, \quad (i = \rho + 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$f_{1\rho}([\xi_1]_\rho^1, \pi_1([\xi_1]_\rho^1, w), w) + g_{1\rho}([\xi_1]_\rho^1, \pi_1([\xi_1]_\rho^1, w), w)c_1([\xi_1]_\rho^1, w) = a([\xi_1]_\rho^1) \quad (5.17)$$

$$0 = \pi_1(0, w) \quad (5.18)$$

$$0 = c_1(0, w) \quad (5.19)$$

ここで ,

$$a([\xi_1]_\rho^1) = -\alpha_0 \xi_{11} - \dots - \alpha_{\rho-1} \xi_{1\rho} \quad (5.20)$$

であり , 定数  $\alpha_i$  ( $i = 0, \dots, \rho - 1$ ) は , 多項式

$$s^\rho + \alpha_{\rho-1} s^{\rho-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 \quad (5.21)$$

が Hurwitz 多項式となるように選ぶ . ■

(5.16) は , 入力  $u_1 = c_1([\xi_1]_\rho^1, w)$  のもとで不変多様体  $\mathcal{M}_1 = \{(\xi_1, w) : [\xi_1]_\rho^{\rho+1} = \pi_1([\xi_1]_\rho^1, w)\}$  が存在することを意味する . (5.18), (5.19) は ,  $\mathcal{M}_1$  が  $\mathcal{M}_0$  を含むことを意味する . また , (5.17) より ,  $\mathcal{M}_1$  上のダイナミクスは以下のように表される .

$$[\dot{\xi}_1]_\rho^1 = A[\xi_1]_\rho^1 \quad (5.22)$$

ただし ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{\rho-1} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

である． $\mathcal{M}_1$  上のダイナミクス (5.22) は大域漸近安定であり，その Lyapunov 関数は以下の式で与えられる．

$$W_1([\xi_1]_\rho^1) = ([\xi_1]_\rho^1)^T P [\xi_1]_\rho^1 \quad (5.24)$$

ここで， $P$  は以下の Lyapunov 方程式を満たす正定行列である．

$$A^T P + P A = -I \quad (5.25)$$

$\mathcal{M}_1$  上のダイナミクス (5.22) の軌道に沿った  $W_1([\xi_1]_\rho^1)$  の微分は以下の式によって与えられる．

$$\dot{W}_1 = \frac{\partial W_1}{\partial [\xi_1]_\rho^1} A [\xi_1]_\rho^1 = -([\xi_1]_\rho^1)^T [\xi_1]_\rho^1 < 0, \quad ([\xi_1]_\rho^1 \neq 0) \quad (5.26)$$

(5.24) に加えて， $k = 2, \dots, \nu - 1$  に対して，以下の関数を定義する．

$$W_k([\xi_k]_{\rho_k}^1) = W_{k-1}([\xi_k]_{\rho_{k-1}}^1) + \frac{1}{2}(\xi_{k\rho_k})^2 = ([\xi_k]_\rho^1)^T P [\xi_k]_\rho^1 + \frac{1}{2} \sum_{i=\rho+1}^{\rho_k} (\xi_{ki})^2 \quad (5.27)$$

これらの関数は仮定 5.3 で用いられる．

**仮定 5.3**  $k = 2, \dots, \nu - 1$  に対して，以下の式を満たす関数  $\pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w)$  および  $c_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w)$  が存在する．

$$\begin{aligned} & f_{ki}([\xi_k]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w), w) + g_{ki}([\xi_k]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w), w) c_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w) \\ &= \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial w} s(w) + \sum_{j=1}^{\rho-1} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial \xi_{kj}} \xi_{k,j+1} + \sum_{j=\rho}^{\rho_k} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial \xi_{kj}} \{f_{kj}([\xi_k]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w), w) \\ &+ g_{kj}([\xi_k]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w), w) c_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w)\}, \quad (i = \rho_{k+1}, \dots, n) \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} & f_{k\rho_k}([\xi_k]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w), w) \\ &+ g_{k\rho_k}([\xi_k]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w), w) c_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w) = b_{\rho_k}([\xi_k]_{\rho_k}^1, w) \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$0 = \pi_k([\xi_k]_{\rho_{k-1}}^1, 0, w) \quad (5.30)$$

$$0 = c_k([\xi_k]_{\rho_{k-1}}^1, 0, w) \quad (5.31)$$



ここで,

$$b_{\rho_k}([\xi_k]_{\rho_k}^1, w) = -\beta_{\rho_k} \xi_{k\rho_k} - \sum_{j=\rho}^{\rho_k-1} \frac{\partial W_{k-1}}{\partial \xi_{kj}} \tilde{f}_{j\rho_k}([\xi_k]_{\rho_k}^1, w) \quad (5.32)$$

であり, 定数  $\beta_{\rho_k}$  を正に選ぶ. また, 関数  $\tilde{f}_{j\rho_k}([\xi_k]_{\rho_k}^1, w)$  を

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{j\rho_k}([\xi_k]_{\rho_k}^1, w) \xi_{k\rho_k} &= f_{kj}([\xi_k]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w), w) \\ &+ g_{kj}([\xi_k]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w), w) c_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w) \\ &- f_{kj}([\xi_k]_{\rho_{k-1}}^1, 0, w), \quad (j = \rho, \dots, \rho_k-1) \end{aligned} \quad (5.33)$$

と定義する. ■

(5.28) は, 入力  $u_k = c_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w)$  のもとで不変多様体  $\mathcal{M}_k = \{(\xi_k, w) : [\xi_k]_{\rho_k}^1 = \pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w)\}$  が存在することを意味する. (5.30), (5.31) は,  $\mathcal{M}_k$  が  $\mathcal{M}_{k-1}$  を含むことを意味する. すなわち,  $\mathcal{M}_k$  は,  $\mathcal{M}_0$  から  $\mathcal{M}_{k-1}$  までを入れ子状に含む構造をもっている. (5.32) の右辺第 2 項はバックステップング法で用いられているアイデアに基づく項である. (5.29) より,  $\mathcal{M}_k$  上のダイナミクスは以下のように表される.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{k1} &= \xi_{k2} \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{k,\rho-1} &= \xi_{k\rho} \\ \dot{\xi}_{k\rho} &= f_{k\rho}([\xi_k]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w), w) + g_{k\rho}([\xi_k]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w), w) c_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w) \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{k\rho_{k-1}} &= f_{k\rho_{k-1}}([\xi_k]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w), w) \\ &+ g_{k\rho_{k-1}}([\xi_k]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w), w) c_k([\xi_k]_{\rho_k}^1, w) \\ \dot{\xi}_{k\rho_k} &= b_{\rho_k}([\xi_k]_{\rho_k}^1, w) \end{aligned} \quad (5.34)$$

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

(5.15) および仮定 5.2, 5.3 より, 以下の関係が得られる.

$$f_{k+1,i}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, 0, w) = f_{ki}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), w) \\ + g_{ki}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, \pi_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), w)c_k([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), \quad (i = \rho, \dots, \rho_{k-1}) \quad (5.35)$$

$$f_{k+1,\rho_k}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, 0, w) = \begin{cases} a([\xi_{k+1}]_{\rho}^1), & (k = 1) \\ b_{\rho_k}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, w), & (2 \leq k \leq \nu - 1) \end{cases} \quad (5.36)$$

$$f_{k+1,i}([\xi_{k+1}]_{\rho_k}^1, 0, w) = 0, \quad (i = \rho_{k+1}, \dots, n) \quad (5.37)$$

さらに,  $i = \rho, \dots, n$  および  $k = 1, \dots, \nu - 1$  に対して,  $f_{k+1,i}(0, w) = 0$  が成り立つ.

ここで, 仮定 5.3 によって与えられる多様体  $\mathcal{M}_k$  上のダイナミクスの大域安定性に関して, 以下の補題が成り立つ.

**補題 5.1**  $k = 2, \dots, \nu - 1$  に対して,  $\mathcal{M}_k$  上のダイナミクス (5.34) は  $[\xi_k]_{\rho_k}^1 = 0$  に大域漸近安定平衡点をもち, (5.27) で表される放射状に非有界な Lyapunov 関数をもつ.

**証明**  $k = 2$  のとき,  $\mathcal{M}_2$  上のダイナミクスは

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{21} &= \xi_{22} \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{2,\rho-1} &= \xi_{2\rho} \\ \dot{\xi}_{2\rho} &= f_{2\rho}([\xi_2]_{\rho+1}^1, \pi_2([\xi_2]_{\rho+1}^1, w), w) \\ &\quad + g_{2\rho}([\xi_2]_{\rho+1}^1, \pi_2([\xi_2]_{\rho+1}^1, w), w)c_2([\xi_2]_{\rho+1}^1, w) \\ \dot{\xi}_{2,\rho+1} &= b_{\rho+1}([\xi_2]_{\rho+1}^1, w) \end{aligned} \quad (5.38)$$

であり, 関数

$$W_2([\xi_2]_{\rho+1}^1) = W_1([\xi_2]_{\rho}^1) + \frac{1}{2}(\xi_{2,\rho+1})^2 \quad (5.39)$$

が定義される. (5.35), (5.36), (5.37) を考慮すると, (5.38) を以下のように書き直

すことができる .

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_{21} &= \xi_{22} \\
&\dots \\
\dot{\xi}_{2,\rho-1} &= \xi_{2\rho} \\
\dot{\xi}_{2\rho} &= a([\xi_2]_\rho^1) + \tilde{f}_{\rho,\rho+1}([\xi_2]_{\rho+1}^1, w)\xi_{2,\rho+1} \\
\dot{\xi}_{2,\rho+1} &= b_{\rho+1}([\xi_2]_{\rho+1}^1, w)
\end{aligned} \tag{5.40}$$

関数  $W_2([\xi_2]_{\rho+1}^1)$  の時間微分は以下の式で与えられる .

$$\begin{aligned}
\dot{W}_2 &= \frac{\partial W_1}{\partial [\xi_2]_{\rho-1}^1} [\xi_2]_\rho^2 + \frac{\partial W_1}{\partial \xi_{2\rho}} \{ a([\xi_2]_\rho^1) + \tilde{f}_{\rho,\rho+1}([\xi_2]_{\rho+1}^1, w)\xi_{2,\rho+1} \} \\
&\quad + \xi_{2,\rho+1} \left\{ -\beta_{\rho+1}\xi_{2,\rho+1} - \frac{\partial W_1}{\partial \xi_{2\rho}} \tilde{f}_{\rho,\rho+1}([\xi_2]_{\rho+1}^1, w) \right\} \\
&= \frac{\partial W_1}{\partial [\xi_2]_\rho^1} A[\xi_2]_\rho^1 - \beta_{\rho+1} \cdot (\xi_{2,\rho+1})^2 < 0, \quad ([\xi_2]_{\rho+1}^1 \neq 0)
\end{aligned} \tag{5.41}$$

(5.41) が負定関数であることより , (5.38) の平衡点  $[\xi_2]_{\rho+1}^1 = 0$  は大域漸近安定である .

$k = l$  のとき ,  $\mathcal{M}_l$  上のダイナミクスは

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_{l1} &= \xi_{l2} \\
&\dots \\
\dot{\xi}_{l,\rho-1} &= \xi_{l\rho} \\
\dot{\xi}_{l\rho} &= f_{l\rho}([\xi_l]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_l]_{\rho_l}^1, w), w) + g_{l\rho}([\xi_l]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_l]_{\rho_l}^1, w), w)c_l([\xi_l]_{\rho_l}^1, w) \\
&\dots \\
\dot{\xi}_{l\rho_{l-1}} &= f_{l\rho_{l-1}}([\xi_l]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_l]_{\rho_l}^1, w), w) + g_{l\rho_{l-1}}([\xi_l]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_l]_{\rho_l}^1, w), w)c_l([\xi_l]_{\rho_l}^1, w) \\
\dot{\xi}_{l\rho_l} &= b_{\rho_l}([\xi_l]_{\rho_l}^1, w)
\end{aligned} \tag{5.42}$$

であり , 関数

$$W_l([\xi_l]_{\rho_l}^1) = W_{l-1}([\xi_l]_{\rho_{l-1}}^1) + \frac{1}{2}(\xi_{l\rho_l})^2 \tag{5.43}$$

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

が定義される．ここで，(5.42) が  $[\xi_l]_{\rho_l}^1 = 0$  に大域漸近安定平衡点をもち，その Lyapunov 関数が (5.43) で表されると仮定する．すなわち，関数  $W_l([\xi_l]_{\rho_l}^1)$  の時間微分

$$\begin{aligned} \dot{W}_l &= \frac{\partial W_l}{\partial [\xi_l]_{\rho-1}^1} [\xi_l]_{\rho}^2 + \sum_{i=\rho}^{\rho_l-1} \frac{\partial W_l}{\partial \xi_{li}} \{ f_{li}([\xi_l]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_l]_{\rho_l}^1, w), w) \\ &\quad + g_{li}([\xi_l]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_l]_{\rho_l}^1, w), w) c_l([\xi_l]_{\rho_l}^1, w) \} + \frac{\partial W_l}{\partial \xi_{l\rho_l}} b_{\rho_l}([\xi_l]_{\rho_l}^1, w) \end{aligned} \quad (5.44)$$

が負定関数であると仮定する．

$k = l + 1$  のとき，(5.35), (5.36), (5.37) を考慮することによって， $\mathcal{M}_{l+1}$  上のダイナミクスは

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{l+1,1} &= \xi_{l+1,2} \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{l+1,\rho-1} &= \xi_{l+1,\rho} \\ \dot{\xi}_{l+1,\rho} &= f_{l\rho}([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w), w) \\ &\quad + g_{l\rho}([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w), w) c_l([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w) \\ &\quad + \tilde{f}_{\rho\rho_{l+1}}([\xi_{l+1}]_{\rho_{l+1}}^1, w) \xi_{l+1,\rho_{l+1}} \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{l+1,\rho_{l-1}} &= f_{l\rho_{l-1}}([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w), w) \\ &\quad + g_{l\rho_{l-1}}([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w), w) c_l([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w) \\ &\quad + \tilde{f}_{\rho_{l-1}\rho_{l+1}}([\xi_{l+1}]_{\rho_{l+1}}^1, w) \xi_{l+1,\rho_{l+1}} \\ \dot{\xi}_{l+1,\rho_l} &= b_{\rho_l}([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w) + \tilde{f}_{\rho_l\rho_{l+1}}([\xi_{l+1}]_{\rho_{l+1}}^1, w) \xi_{l+1,\rho_{l+1}} \\ \dot{\xi}_{l+1,\rho_{l+1}} &= b_{\rho_{l+1}}([\xi_{l+1}]_{\rho_{l+1}}^1, w) \end{aligned} \quad (5.45)$$

となり，関数

$$W_{l+1}([\xi_{l+1}]_{\rho_{l+1}}^1) = W_l([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1) + \frac{1}{2} (\xi_{l+1,\rho_{l+1}})^2 \quad (5.46)$$

が定義される．関数  $W_{l+1}([\xi_{l+1}]_{\rho_{l+1}}^1)$  の時間微分はつぎの式で与えられる．

$$\begin{aligned}
\dot{W}_{l+1} &= \frac{\partial W_l}{\partial [\xi_{l+1}]_{\rho-1}^1} [\xi_{l+1}]_{\rho}^2 + \sum_{i=\rho}^{\rho_l-1} \frac{\partial W_l}{\partial \xi_{l+1,i}} \{f_{li}([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w), w) \\
&\quad + g_{li}([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w), w) c_l([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w) + \tilde{f}_{i\rho_{l+1}}([\xi_{l+1}]_{\rho_{l+1}}^1, w) \xi_{l+1, \rho_{l+1}}\} \\
&\quad + \frac{\partial W_l}{\partial \xi_{l+1, \rho_l}} \{b_{\rho_l}([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w) + \tilde{f}_{\rho_l \rho_{l+1}}([\xi_{l+1}]_{\rho_{l+1}}^1, w) \xi_{l+1, \rho_{l+1}}\} \\
&\quad + \xi_{l+1, \rho_{l+1}} \left\{ -\beta_{\rho_{l+1}} \xi_{l+1, \rho_{l+1}} - \sum_{j=\rho}^{\rho_l} \frac{\partial W_l}{\partial \xi_{l+1, j}} \tilde{f}_{j\rho_{l+1}}([\xi_{l+1}]_{\rho_{l+1}}^1, w) \right\} \\
&= \frac{\partial W_l}{\partial [\xi_{l+1}]_{\rho-1}^1} [\xi_{l+1}]_{\rho}^2 + \sum_{i=\rho}^{\rho_l-1} \frac{\partial W_l}{\partial \xi_{l+1, i}} \{f_{li}([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w), w) \\
&\quad + g_{li}([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, \pi_l([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w), w) c_l([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w)\} \\
&\quad + \frac{\partial W_l}{\partial \xi_{l+1, \rho_l}} b_{\rho_l}([\xi_{l+1}]_{\rho_l}^1, w) - \beta_{\rho_{l+1}} \cdot (\xi_{l+1, \rho_{l+1}})^2 \tag{5.47}
\end{aligned}$$

(5.44) が負定関数であるという仮定より，(5.47) も負定関数となる．したがって， $k = 2, \dots, \nu - 1$  に対して， $\mathcal{M}_k$  上のダイナミクス (5.34) の平衡点  $[\xi_k]_{\rho_k}^1 = 0$  は大域漸近安定である．◁

この証明より，(5.32) の右辺第 2 項がバックステッピング法と同様の効果を与えていることがよくわかる．多様体  $\mathcal{M}_k$  を利用した (5.12) の座標変換は，バックステッピング法によって制御則の体系的な設計手順が与えられている pure-feedback system に対しても適用することができ，バックステッピング法の拡張となっている．また，(5.27) より， $\mathcal{M}_k$  上のダイナミクス (5.34) に対する Lyapunov 関数は二次形式をもつことがわかる．

システム (5.10) に対して，以上で示された座標変換を繰り返すことによって，

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

つぎの式で表されるシステムが得られる .

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_{\nu 1} &= \xi_{\nu 2} \\
 &\dots \\
 \dot{\xi}_{\nu, \rho-1} &= \xi_{\nu \rho} \\
 \dot{\xi}_{\nu \rho} &= f_{\nu \rho}(\xi_{\nu}, w) + g_{\nu \rho}(\xi_{\nu}, w) u_{\nu} \\
 &\dots \\
 \dot{\xi}_{\nu n} &= f_{\nu n}(\xi_{\nu}, w) + g_{\nu n}(\xi_{\nu}, w) u_{\nu}
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

状態フィードバック則が存在することを保証するために , 以下の仮定をおく .

仮定 5.4 システム (5.48) 中の係数  $g_{\nu n}(\xi_{\nu}, w)$  は非零である . ■

仮定 5.4 のもとで , 以下の状態フィードバック則が得られる .

$$u_{\nu} = \frac{b_n - f_{\nu n}(\xi_{\nu}, w)}{g_{\nu n}(\xi_{\nu}, w)} \tag{5.49}$$

ここで ,  $b_n$  は新しい入力変数である . 状態フィードバック則 (5.49) をシステム (5.48) に適用することによって , 以下の式で表されるシステムが得られる .

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_{\nu 1} &= \xi_{\nu 2} \\
 &\dots \\
 \dot{\xi}_{\nu, \rho-1} &= \xi_{\nu \rho} \\
 \dot{\xi}_{\nu \rho} &= f_{\nu \rho}(\xi_{\nu}, w) + \lambda_{\rho}(\xi_{\nu}, w) \{b_n - f_{\nu n}(\xi_{\nu}, w)\} \\
 &\dots \\
 \dot{\xi}_{\nu, n-1} &= f_{\nu, n-1}(\xi_{\nu}, w) + \lambda_{n-1}(\xi_{\nu}, w) \{b_n - f_{\nu n}(\xi_{\nu}, w)\} \\
 \dot{\xi}_{\nu n} &= b_n
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

ここで ,  $i = \rho, \dots, n-1$  に対して ,

$$\lambda_i(\xi_{\nu}, w) = \frac{g_{\nu i}(\xi_{\nu}, w)}{g_{\nu n}(\xi_{\nu}, w)} \tag{5.51}$$

#### 5.4. 大域漸近追従制御の実現

とおく . (5.33), (5.35), (5.36), (5.37) を考慮することによって , システム (5.50) を以下のように書き直すことができる .

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_{\nu 1} &= \xi_{\nu 2} \\
 &\dots \\
 \dot{\xi}_{\nu, \rho-1} &= \xi_{\nu \rho} \\
 \dot{\xi}_{\nu \rho} &= a([\xi_{\nu}]_{\rho}^1) + \sum_{j=\rho+1}^n \tilde{f}_{\rho j}([\xi_{\nu}]_j^1, w) \xi_{\nu j} + \lambda_{\rho}(\xi_{\nu}, w) b_n \\
 \dot{\xi}_{\nu, \rho+1} &= b_{\rho+1}([\xi_{\nu}]_{\rho+1}^1, w) + \sum_{j=\rho+2}^n \tilde{f}_{\rho+1, j}([\xi_{\nu}]_j^1, w) \xi_{\nu j} + \lambda_{\rho+1}(\xi_{\nu}, w) b_n \\
 &\dots \\
 \dot{\xi}_{\nu, n-1} &= b_{n-1}([\xi_{\nu}]_{n-1}^1, w) + \tilde{f}_{n-1, n}([\xi_{\nu}]_n^1, w) \xi_{\nu n} + \lambda_{n-1}(\xi_{\nu}, w) b_n \\
 \dot{\xi}_{\nu n} &= b_n
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

ここで ,  $i = \rho, \dots, n-1$  に対して ,

$$\tilde{f}_{in}(\xi_{\nu}, w) \xi_{\nu n} = f_{\nu i}(\xi_{\nu}, w) - \lambda_i(\xi_{\nu}, w) f_{\nu n}(\xi_{\nu}, w) - f_{\nu i}([\xi_{\nu}]_{n-1}^1, 0, w) \tag{5.53}$$

とおく . このとき , システム (5.52) を大域漸近安定化できれば , プラント (5.1) に対する大域漸近追従制御を実現することができる . しかしながら ,  $\xi_{\nu i}$  ( $i = \rho, \dots, n-1$ ) の動特性にも入力変数  $b_n$  が含まれることから , 最後のステップにおいては通常のバックステッピング法を適用することはできない . 一方 , 補題 5.1 より ,  $\xi_{\nu n} = 0$  のとき , すなわち , 多様体  $\mathcal{M}_{\nu-1}$  上に制限すれば , システム (5.52) は大域漸近安定となり , 二次形式の Lyapunov 関数  $W_{\nu-1}([\xi_{\nu}]_{n-1}^1)$  をもつ .

#### 5.4 大域漸近追従制御の実現

システム (5.52) の大域漸近安定化について考える前に , つぎの補題を示す . この補題は [46] 中の証明と同様にして証明することができる .

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

補題 5.2 以下の式によって表されるシステムについて考える .

$$\dot{x} = f(x, w) + g(x, z, w)z + p(x, z, w)u \quad (5.54)$$

$$\dot{z} = u \quad (5.55)$$

$$\dot{w} = s(w) \quad (5.56)$$

ただし ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ,  $w \in \mathbb{R}^r$ ,  $u \in \mathbb{R}$  である . ここで , 以下の条件が満たされているものとする .

- $\dot{x} = f(x, w)$  および  $\dot{w} = s(w)$  は  $x$  に関して大域漸近安定であり , 以下の式を満たす放射状に非有界な Lyapunov 関数  $W(x, w)$  をもつ .

$$W(0, w) = 0 \quad (5.57)$$

$$W(x, w) > 0, \quad (x \neq 0) \quad (5.58)$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow W(x, w) \rightarrow \infty \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} f(x, w) + \frac{\partial W}{\partial w} s(w) < 0, \quad (x \neq 0) \quad (5.60)$$

$$\left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \|x\| \leq K(w)W(x, w), \quad (\exists K(w) > 0, \text{ for } \|x\| \geq \exists M > 0) \quad (5.61)$$

- 関数  $p(x, z, w)$  は  $x$  に関する linear growth condition を満たす . すなわち , 以下の式を満たす関数  $P_0(z, w) \geq 0$  および  $P_1(z, w) \geq 0$  が存在する .

$$\|p(x, z, w)\| \leq P_0(z, w) + P_1(z, w)\|x\| \quad (5.62)$$

- $\dot{w} = s(w)$  の平衡点  $w = 0$  は大域安定である .

このとき , 以下の可変ゲイン状態フィードバック則を用いることによって ,  $(x, z)$  は零に収束する .

$$u = -\varphi(x, z, w)z \quad (5.63)$$

ここで ,

$$\varphi(x, z, w) = k \sqrt{1 + \frac{\|g(x, z, w)\|^2}{1 + \|x\|^2}} \quad (5.64)$$

であり ,  $k$  は任意の正の定数である .



#### 5.4. 大域漸近追従制御の実現

証明 表記の簡単化のために,  $\xi = \text{col}(x, z, w)$  および  $\xi_0 = \text{col}(x_0, z_0, w_0) = \text{col}(x(0), z(0), w(0))$  とおく. 可変ゲイン状態フィードバック則 (5.63) をシステム (5.54), (5.55), (5.56) に適用することによって, 以下の式で表されるシステムが得られる.

$$\dot{x} = f(x, w) + g(\xi)z - p(\xi)\varphi(\xi)z \quad (5.65)$$

$$\dot{z} = -\varphi(\xi)z \quad (5.66)$$

$$\dot{w} = s(w) \quad (5.67)$$

$\varphi(\xi) \geq k$  であることより, 以下の時間軸変換を構成することができる.

$$dt' = \varphi(\xi)dt \quad (5.68)$$

(5.68) より, つぎの式が成り立つ.

$$t' = \int_0^t \varphi(\xi(\sigma))d\sigma \quad (5.69)$$

(5.66) を積分することによって, 以下の式が得られる.

$$z = z_0 e^{-t'} \quad (5.70)$$

よって, (5.66) は  $z$  に関して指数安定である. そこで, (5.66) に対する Lyapunov 関数として以下の関数を考える.

$$U(z) = \frac{1}{2}z^2 \quad (5.71)$$

このとき, 関数  $U(z)$  の時間微分は以下の式で与えられる.

$$\dot{U} = -\varphi(\xi)z^2 < 0, \quad (z \neq 0) \quad (5.72)$$

(5.66) の指数安定性および (5.67) の安定性より, 以下の条件を満たす関数  $K_{\max}(w_0) > 0$ ,  $\gamma_0(z_0, w_0) > 0$ ,  $\gamma_1(z_0, w_0) > 0$  が存在する.

$$K(w) \leq K_{\max}(w_0) \quad (5.73)$$

$$P_0(z, w)|z| \leq \gamma_0(z_0, w_0)e^{-t'} \quad (5.74)$$

$$P_1(z, w)|z| \leq \gamma_1(z_0, w_0)e^{-t'} \quad (5.75)$$

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

つぎに，関数  $W(x, w)$  について考えると，その時間微分は以下の式を満たす．

$$\begin{aligned}
 \dot{W} &= \frac{\partial W}{\partial x} \{f(x, w) + g(\xi)z - p(\xi)\varphi(\xi)z\} + \frac{\partial W}{\partial w} s(w) \\
 &\leq \frac{\partial W}{\partial x} \{g(\xi) - p(\xi)\varphi(\xi)\}z \\
 &\leq \left| \frac{\partial W}{\partial x} \{g(\xi) - p(\xi)\varphi(\xi)\}z \right| \\
 &\leq \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \{ \|g(\xi)\| + \|p(\xi)\|\varphi(\xi) \} |z| \\
 &\leq \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \{ \sqrt{1 + \|x\|^2}/k + \|p(\xi)\| \} \varphi(\xi) |z| \\
 &\leq \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \{ \sqrt{1 + \|x\|^2}/k + P_0(z, w) + P_1(z, w)\|x\| \} \varphi(\xi) |z| \quad (5.76)
 \end{aligned}$$

(5.76) は， $\|x\| \geq \max(1, M)$  に対して以下の式を満たす．

$$\begin{aligned}
 \dot{W} &\leq K(w)W(x, w)/\|x\| \{ \sqrt{1 + \|x\|^2}/k + P_0(z, w) + P_1(z, w)\|x\| \} \varphi(\xi) |z| \\
 &\leq K(w)W(x, w) \{ \sqrt{2}/k + P_0(z, w) + P_1(z, w) \} \varphi(\xi) |z| \\
 &\leq K_{\max}(w_0)W(x, w) \{ \sqrt{2}|z_0|/k + \gamma_0(z_0, w_0) + \gamma_1(z_0, w_0) \} e^{-t'} \varphi(\xi) \\
 &\leq \gamma_2(z_0, w_0)W(x, w) e^{-t'} \varphi(\xi) \quad (5.77)
 \end{aligned}$$

ただし，

$$\gamma_2(z_0, w_0) = K_{\max}(w_0) \{ \sqrt{2}|z_0|/k + \gamma_0(z_0, w_0) + \gamma_1(z_0, w_0) \} \quad (5.78)$$

とおく．(5.77) を積分することによって，以下の関係が得られる．

$$\begin{aligned}
 W(x, w) &\leq \exp\{\gamma_2(z_0, w_0)(1 - e^{-t'})\} W(x_0, w_0) \\
 &\leq \exp(\gamma_2(z_0, w_0)) W(x_0, w_0) \quad (5.79)
 \end{aligned}$$

この不等式は，関数  $W(x, w)$  が有界であることを表す．関数  $W(x, w)$  は  $x$  に関して放射状に非有界であることより， $x$  の値も有界となる．

つぎの式で表される関数について考える．

$$\Psi(\xi) = \int_t^\infty \left[ \frac{\partial W}{\partial x} \{g(\xi) - p(\xi)\varphi(\xi)\}z \right]_{\xi=\xi(\tau)} d\tau \quad (5.80)$$

#### 5.4. 大域漸近追従制御の実現

(5.66) の指数安定性および  $x$  と  $w$  の有界性より，関数  $\Psi(\xi)$  が存在することがいえる．実際に，

$$\left| \frac{\partial W}{\partial x} \{g(\xi) - p(\xi)\varphi(\xi)\}z \right| \leq \gamma_3(\xi_0)e^{-t'}\varphi(\xi) \quad (5.81)$$

を満たす関数  $\gamma_3(\xi_0) > 0$  が存在することから，以下の式が得られる．

$$\Psi(\xi) \leq \int_t^\infty \left[ \gamma_3(\xi_0)e^{-t'}\varphi(\xi) \right]_{\xi=\xi(\tau)} d\tau = \gamma_3(\xi_0)e^{-t'} \quad (5.82)$$

$\xi^\circ$  を初期状態  $\xi_0^\circ = \xi^\circ(0)$  に対するシステム (5.65), (5.66), (5.67) の軌道を表すものとする．(5.81) より，ある  $\epsilon > 0$  に対して，以下の式を満たす  $T$  が存在する．

$$\int_T^\infty \left| \frac{\partial W}{\partial x} \{g(\xi) - p(\xi)\varphi(\xi)\}z \right| dt < \frac{\epsilon}{4}, \quad (\|\xi_0 - \xi_0^\circ\| < 1) \quad (5.83)$$

また，初期条件に関する軌道の連続性より，以下の式を満たす  $0 < \delta \leq 1$  が存在する．

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left| \frac{\partial W}{\partial x} \{g(\xi) - p(\xi)\varphi(\xi)\}z - \frac{\partial W(x^\circ, w^\circ)}{\partial x^\circ} \{g(\xi^\circ) - p(\xi^\circ)\varphi(\xi^\circ)\}z^\circ \right| dt \\ & < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\|\xi_0 - \xi_0^\circ\| < \delta) \end{aligned} \quad (5.84)$$

したがって，ある  $\epsilon$  に対して，以下の式を満たす  $\delta$  が存在する．

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left| \frac{\partial W}{\partial x} \{g(\xi) - p(\xi)\varphi(\xi)\}z - \frac{\partial W(x^\circ, w^\circ)}{\partial x^\circ} \{g(\xi^\circ) - p(\xi^\circ)\varphi(\xi^\circ)\}z^\circ \right| dt \\ & < \epsilon, \quad (\|\xi_0 - \xi_0^\circ\| < \delta) \end{aligned} \quad (5.85)$$

(5.85) は， $\Psi(\xi)$  が連続であることを意味する．

システム (5.65), (5.66), (5.67) に対する Lyapunov 関数の候補として，

$$V(\xi) = W(x, w) + U(z) + \Psi(\xi) \quad (5.86)$$

を考える．

$$\int_t^\sigma \dot{W}(\xi(\tau))d\tau = W(x(\sigma), w(\sigma)) - W(x(t), w(t)) \quad (5.87)$$

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

を用いることによって，以下の関係を得ることができる．

$$W(x, w) + \Psi(\xi) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left\{ W(x(\sigma), w(\sigma)) - \int_t^\sigma \left[ \frac{\partial W}{\partial x} f(x, w) + \frac{\partial W}{\partial w} s(w) \right]_{\xi=\xi(\tau)} d\tau \right\} \quad (5.88)$$

この式は  $V(\xi) \geq 0$  であることを意味する．(5.86) および (5.88) より， $V(\xi) = 0$  ならば  $x = 0$  かつ  $z = 0$  となる．したがって，関数  $V(\xi)$  は  $x$  および  $z$  に関して正定となる．

(5.88) の右辺を  $\sigma$  について微分することにより，以下の関係が得られる．

$$\begin{aligned} \dot{W} - \frac{\partial W}{\partial x} f(x, w) - \frac{\partial W}{\partial w} s(w) &= \frac{\partial W}{\partial x} \{g(\xi) - p(\xi)\varphi(\xi)\}z \\ &\geq - \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \{ \sqrt{1 + \|x\|^2/k} + P_0(z, w) + P_1(z, w)\|x\| \} \varphi(\xi) |z| \\ &\geq - \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \{ (1 + \|x\|)/k + P_0(z, w) + P_1(z, w)\|x\| \} \varphi(\xi) |z| \\ &= - \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \{ (1/k + P_0(z, w))(1 - \|x\|) \\ &\quad + (2/k + P_0(z, w) + P_1(z, w))\|x\| \} \varphi(\xi) |z| \\ &\geq - \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \{ (|z_0|/k + \gamma_0(z_0, w_0))(1 - \|x\|) \\ &\quad + (2|z_0|/k + \gamma_0(z_0, w_0) + \gamma_1(z_0, w_0))\|x\| \} e^{-t'} \varphi(\xi) \\ &\geq - \left\{ (|z_0|/k + \gamma_0(z_0, w_0)) \left( \max_{\|x\| \leq 1} \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \right) \right. \\ &\quad \left. + (2|z_0|/k + \gamma_0(z_0, w_0) + \gamma_1(z_0, w_0)) \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \|x\| \right\} e^{-t'} \varphi(\xi) \end{aligned} \quad (5.89)$$

(5.89) は以下のように書き直すことができる．

$$\begin{aligned} \dot{W} - \frac{\partial W}{\partial x} f(x, w) - \frac{\partial W}{\partial w} s(w) \\ &\geq \begin{cases} -\{\gamma_4(\xi_0) + \gamma_5(\xi_0)W(x, w)\}e^{-t'}\varphi(\xi), & (\|x\| \geq M) \\ -\{\gamma_4(\xi_0) + \gamma_6(\xi_0)\}e^{-t'}\varphi(\xi), & (\|x\| < M) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.90)$$

ただし ,

$$\gamma_4(\xi_0) = (|z_0|/k + \gamma_0(z_0, w_0)) \left( \max_{\|x\| \leq 1} \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \right) \quad (5.91)$$

$$\gamma_5(\xi_0) = (2|z_0|/k + \gamma_0(z_0, w_0) + \gamma_1(z_0, w_0)) K_{\max}(w_0) \quad (5.92)$$

$$\gamma_6(\xi_0) = (2|z_0|/k + \gamma_0(z_0, w_0) + \gamma_1(z_0, w_0)) \left( \sup_{\|x\| < M} \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \|x\| \right) \quad (5.93)$$

とおく . (5.90) を積分することによって ,  $\|x(\tau)\| \geq M$  および  $0 \leq \tau \leq t$  に対して ,

$$\begin{aligned} W(x, w) &\geq \exp\{\gamma_5(\xi_0)(e^{-t} - 1)\} W(x_0, w_0) \\ &\quad + \exp(\gamma_5(\xi_0)e^{-t}) \int_0^t \left[ \left( -\gamma_4(\xi_0)e^{-t'} \varphi(\xi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial W}{\partial x} f(x, w) + \frac{\partial W}{\partial w} s(w) \right) \exp(-\gamma_5(\xi_0)e^{-t'}) \right]_{\xi=\xi(\tau)} d\tau \\ &\geq \exp(-\gamma_5(\xi_0)) W(x_0, w_0) - \gamma_4(\xi_0) \\ &\quad + \int_0^t \left[ \frac{\partial W}{\partial x} f(x, w) + \frac{\partial W}{\partial w} s(w) \right]_{\xi=\xi(\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (5.94)$$

となり ,  $\|x(\tau)\| < M$  および  $0 \leq \tau \leq t$  に対して ,

$$\begin{aligned} W(x, w) &\geq W(x_0, w_0) + \{\gamma_4(\xi_0) + \gamma_6(\xi_0)\} \{e^{-t} - 1\} \\ &\quad + \int_0^t \left[ \frac{\partial W}{\partial x} f(x, w) + \frac{\partial W}{\partial w} s(w) \right]_{\xi=\xi(\tau)} d\tau \\ &\geq W(x_0, w_0) - \gamma_4(\xi_0) - \gamma_6(\xi_0) + \int_0^t \left[ \frac{\partial W}{\partial x} f(x, w) + \frac{\partial W}{\partial w} s(w) \right]_{\xi=\xi(\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (5.95)$$

となる . (5.94) および (5.95) より , 以下の不等式が成り立つ .

$$\begin{aligned} W(x, w) &\geq \exp(-\gamma_5(\xi_0)) W(x_0, w_0) - \gamma_4(\xi_0) - \gamma_6(\xi_0) \\ &\quad + \int_0^t \left[ \frac{\partial W}{\partial x} f(x, w) + \frac{\partial W}{\partial w} s(w) \right]_{\xi=\xi(\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (5.96)$$

ゆえに , 以下の式が得られる .

$$W(x_0, w_0) + \Psi(\xi_0) \geq \exp(-\gamma_5(\xi_0)) W(x_0, w_0) - \gamma_4(\xi_0) - \gamma_6(\xi_0) \quad (5.97)$$

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

この不等式は， $\|x\|$  が無限大に発散するときに  $W(x, w) + \Psi(\xi)$  も無限大に発散することを表す．

また，(5.86) および (5.88) より， $|z|$  が無限大に発散するときに関数  $V(\xi)$  も無限大に発散する．よって，関数  $V(\xi)$  は  $x$  および  $z$  に関して放射状に非有界である．(5.86) より，関数  $V(\xi)$  の微分はつぎの式で与えられる．

$$\dot{V} = \frac{\partial W}{\partial x} f(x, w) + \frac{\partial W}{\partial w} s(w) - \varphi(\xi) z^2 \leq 0 \quad (5.98)$$

したがって，システム (5.54), (5.55), (5.56) に対する  $(x, z)$  は，可変ゲイン状態フィードバック則 (5.63) によって，零に収束する．◁

ここで，システム (5.52) の大域漸近安定化を達成するために，以下の仮定をおく．

仮定 5.5  $i = \rho, \dots, n-1$  に対して，システム (5.52) の係数  $\lambda_i(\xi_\nu, w)$  は  $[\xi_\nu]_{n-1}^1$  に関する linear growth condition を満たす． ■

以上の準備のもとで，つぎの定理が成り立つ．

定理 5.1 仮定 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 のもとで，以下の状態フィードバック則を用いることによって，プラント (5.1) および外部システム (5.2) に対する大域漸近追従制御が実現される．

$$u = c_0(w) + \sum_{k=1}^{\nu-1} c_k([\xi_\nu]_{\rho_k}^1, w) + \frac{b_n - f_{\nu n}(\xi_\nu, w)}{g_{\nu n}(\xi_\nu, w)} \quad (5.99)$$

ここで，

$$b_n = -\beta_n(\xi_\nu, w) \xi_{\nu n} \quad (5.100)$$

であり，任意の正の定数  $k_n$  に対して，

$$\beta_n(\xi_\nu, w) = k_n \sqrt{1 + \frac{\sum_{j=\rho}^{n-1} (\tilde{f}_{jn}(\xi_\nu, w))^2}{1 + \|[\xi_\nu]_{n-1}^1\|^2}} \quad (5.101)$$

である．

証明 補題 5.1 より ,

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_{\nu 1} &= \xi_{\nu 2} \\
&\dots \\
\dot{\xi}_{\nu, \rho-1} &= \xi_{\nu \rho} \\
\dot{\xi}_{\nu \rho} &= a([\xi_{\nu}]_{\rho}^1) + \sum_{j=\rho+1}^{n-1} \tilde{f}_{\rho j}([\xi_{\nu}]_j^1, w) \xi_{\nu j} \\
\dot{\xi}_{\nu, \rho+1} &= b_{\rho+1}([\xi_{\nu}]_{\rho+1}^1, w) + \sum_{j=\rho+2}^{n-1} \tilde{f}_{\rho+1, j}([\xi_{\nu}]_j^1, w) \xi_{\nu j} \\
&\dots \\
\dot{\xi}_{\nu, n-2} &= b_{n-2}([\xi_{\nu}]_{n-2}^1, w) + \tilde{f}_{n-2, n-1}([\xi_{\nu}]_{n-1}^1, w) \xi_{\nu, n-1} \\
\dot{\xi}_{\nu, n-1} &= b_{n-1}([\xi_{\nu}]_{n-1}^1, w)
\end{aligned} \tag{5.102}$$

は  $[\xi_{\nu}]_{n-1}^1 = 0$  に大域漸近安定平衡点をもち , その Lyapunov 関数はずぎの式で与えられる .

$$\begin{aligned}
W_{\nu-1}([\xi_{\nu}]_{n-1}^1) &= W_{\nu-2}([\xi_{\nu}]_{n-2}^1) + \frac{1}{2} (\xi_{\nu, n-1})^2 \\
&= ([\xi_{\nu}]_{\rho}^1)^T P [\xi_{\nu}]_{\rho}^1 + \frac{1}{2} \sum_{i=\rho+1}^{n-1} (\xi_{\nu i})^2
\end{aligned} \tag{5.103}$$

よって , Lyapunov 関数 (5.103) は (5.57), (5.58), (5.59), (5.60) の条件を満たす . また , (5.103) は二次形式であることより , (5.61) の条件を満たす . したがって , 補題 5.2 より , システム (5.52) に対して可変ゲイン状態フィードバック則 (5.100) を適用することによって ,  $\xi_{\nu}$  は零に収束する . これは , プラント (5.1) および外部システム (5.2) に対する大域漸近追従制御が状態フィードバック則 (5.99) によって実現されることを意味する . ◁

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

### 5.5 数値例

ここでは、提案した手法を非線形非最小位相系に適用する。  
以下の式で表されるシステムを考える。

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_2 + x_1^2 + u \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_1^2 + u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{5.104}$$

出力  $y$  が恒等的に零となる場合を考えると、プラント (5.104) は以下のような不安定な零ダイナミクスをもつ。

$$\dot{x}_2 = x_2\tag{5.105}$$

外部システムとしてつぎの安定な自律システムを考える。

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= \omega w_2 \\ \dot{w}_2 &= -\omega w_1 \\ y_d &= w_1\end{aligned}\tag{5.106}$$

このとき、定数  $U$  および初期条件

$$\begin{aligned}w_1(0) &= 0 \\ w_2(0) &= U\end{aligned}\tag{5.107}$$

に対して、外部システム (5.106) は以下の目標軌道を生成する。

$$y_d(t) = U \sin \omega t\tag{5.108}$$

関数  $\pi_0(w) = (\pi_{01}(w), \pi_{02}(w))^T$  および  $c_0(w)$  ( $\pi_0(0) = 0, c_0(0) = 0$ ) を得るために、つぎの偏微分方程式を解く必要がある。

$$\begin{aligned}\pi_{01}(w) - \pi_{02}(w) + (\pi_{01}(w))^2 + c_0(w) &= \frac{\partial \pi_{01}}{\partial w_1} \omega w_2 - \frac{\partial \pi_{01}}{\partial w_2} \omega w_1 \\ 2\pi_{01}(w) + (\pi_{01}(w))^2 + c_0(w) &= \frac{\partial \pi_{02}}{\partial w_1} \omega w_2 - \frac{\partial \pi_{02}}{\partial w_2} \omega w_1 \\ 0 &= \pi_{01}(w) - w_1\end{aligned}\tag{5.109}$$



その解は以下の式で与えられる .

$$\begin{aligned}\pi_{01}(w) &= w_1 \\ \pi_{02}(w) &= \frac{-1 + \omega^2}{1 + \omega^2} w_1 - \frac{2\omega}{1 + \omega^2} w_2\end{aligned}\quad (5.110)$$

$$c_0(w) = -\pi_{01}(w) + \pi_{02}(w) - (\pi_{01}(w))^2 \omega w_2 \quad (5.111)$$

変数変換

$$\xi_{11} = x_1 - \pi_{01}(w) \quad (5.112)$$

$$\xi_{12} = x_2 - \pi_{02}(w)$$

$$u_1 = u - c_0(w) \quad (5.113)$$

を用いることによって , 以下のシステムを得る .

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{11} &= \xi_{11} - \xi_{12} + (\xi_{11} + \pi_{01}(w))^2 - (\pi_{01}(w))^2 + u_1 \\ \dot{\xi}_{12} &= 2\xi_{11} + (\xi_{11} + \pi_{01}(w))^2 - (\pi_{01}(w))^2 + u_1\end{aligned}\quad (5.114)$$

関数  $\pi_{12}(\xi_{11}, w)$  および  $c_1(\xi_{11}, w)$  は以下の偏微分方程式を解くことによって得られる .

$$\begin{aligned}2\xi_{11} + (\xi_{11} + \pi_{01}(w))^2 - (\pi_{01}(w))^2 + c_1(\xi_{11}, w) &= \frac{\partial \pi_{12}}{\partial \xi_{11}}(\xi_{11} - \pi_{12}(\xi_{11}, w)) \\ &+ (\xi_{11} + \pi_{01}(w))^2 - (\pi_{01}(w))^2 + c_1(\xi_{11}, w) + \frac{\partial \pi_{12}}{\partial w_1} \omega w_2 - \frac{\partial \pi_{12}}{\partial w_2} \omega w_1\end{aligned}\quad (5.115)$$

$$\xi_{11} - \pi_{12}(\xi_{11}, w) + (\xi_{11} + \pi_{01}(w))^2 - (\pi_{01}(w))^2 + c_1(\xi_{11}, w) = -\alpha_0 \xi_{11} \quad (5.116)$$

$$0 = \pi_1(0, w) \quad (5.117)$$

$$0 = c_1(0, w) \quad (5.118)$$

ここで , 定数  $\alpha_0$  は正に選ぶ . その解は以下の式で与えられる .

$$\pi_{12}(\xi_{11}, w) = \frac{-1 + \alpha_0}{1 + \alpha_0} \xi_{11} \quad (5.119)$$

$$c_1(\xi_{11}, w) = -\xi_{11} + \pi_{12}(\xi_{11}, w) - (\xi_{11} + \pi_{01}(w))^2 + (\pi_{01}(w))^2 - \alpha_0 \xi_{11} \quad (5.120)$$

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

変数変換

$$\xi_{21} = \xi_{11} \quad (5.121)$$

$$\xi_{22} = \xi_{12} - \pi_{12}(\xi_{11}, w)$$

$$u_2 = u_1 - c_1(\xi_{11}, w) \quad (5.122)$$

を用いることによって，以下のシステムが得られる．

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{21} &= \xi_{21} - \xi_{22} - \pi_{12}(\xi_{21}, w) + (\xi_{21} + \pi_{01}(w))^2 - (\pi_{01}(w))^2 \\ &\quad + c_1(\xi_{21}, w) + u_2 \end{aligned} \quad (5.123)$$

$$\dot{\xi}_{22} = \frac{-1 + \alpha_0}{1 + \alpha_0} \xi_{22} + \frac{2}{1 + \alpha_0} u_2$$

(5.123) の第 2 式の  $u_2$  の係数は  $2/(1 + \alpha_0)$  であり，非零である．

以下のフィードバック則を考える．

$$u_2 = \frac{b_2 - (-1 + \alpha_0)/(1 + \alpha_0)\xi_{22}}{2/(1 + \alpha_0)} \quad (5.124)$$

ここで， $b_2$  は新しい入力変数である．このフィードバック則を用いることによって，以下のシステムが得られる．

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{21} &= -\alpha_0 \xi_{21} + \tilde{f}_{12}(\xi_2, w)\xi_{22} + \lambda_1(\xi_2, w)b_2 \\ \dot{\xi}_{22} &= b_2 \end{aligned} \quad (5.125)$$

ただし，

$$\lambda_1(\xi_2, w) = \frac{1 + \alpha_0}{2} \quad (5.126)$$

$$\tilde{f}_{12}(\xi_2, w) = -1 - \lambda_1(\xi_2, w) \frac{-1 + \alpha_0}{1 + \alpha_0} \quad (5.127)$$

とおく．

プラント (5.104) および外部システム (5.106) に対する大域漸近追従制御は以下の状態フィードバック則を用いることによって達成される．

$$u = c_0(w) + c_1([\xi_2]_2^1, w) + \frac{b_2 - (-1 + \alpha_0)(1 + \alpha_0)\xi_{22}}{2/(1 + \alpha_0)} \quad (5.128)$$

ここで,

$$b_2 = -\beta_2(\xi_2, w)\xi_{22} \quad (5.129)$$

であり, 正の定数  $k_2$  に対して,

$$\beta_2(\xi_2, w) = k_2 \sqrt{1 + \frac{(\tilde{f}_{12}(\xi_2, w))^2}{1 + \xi_{21}^2}} \quad (5.130)$$

である.

シミュレーションに用いたパラメータを表 2 に示す. 図 11, 12, 13 にシミュレ-

表 2 Simulation parameter

$\omega = \pi/4$
$U = 1$
$\alpha_0 = 1$
$k_2 = 0.316228$
$x(0) = (0, 0)^T$
$w(0) = (0, U)^T$

ーション結果を示す. 図 11 は追従誤差, 図 12 は各状態の挙動, 図 13 は対応する制御入力を示す. これらの結果より, 良好な追従特性が達成されている.

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

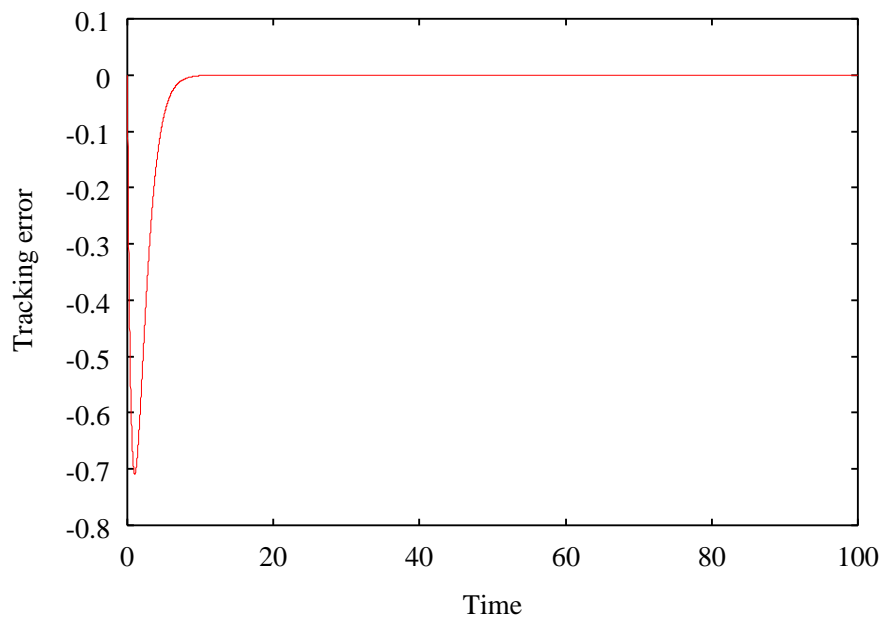


図 11 Tracking error

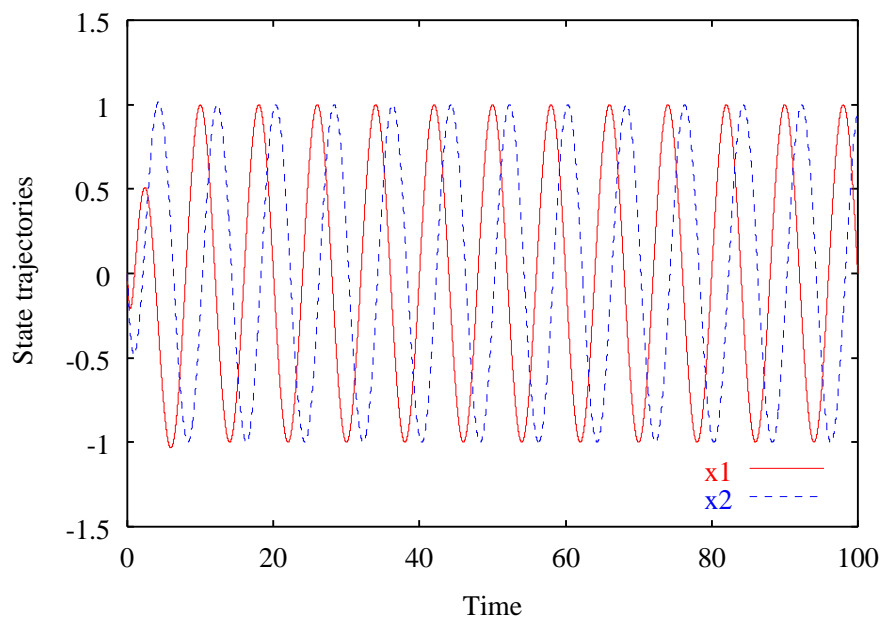


図 12 State trajectories

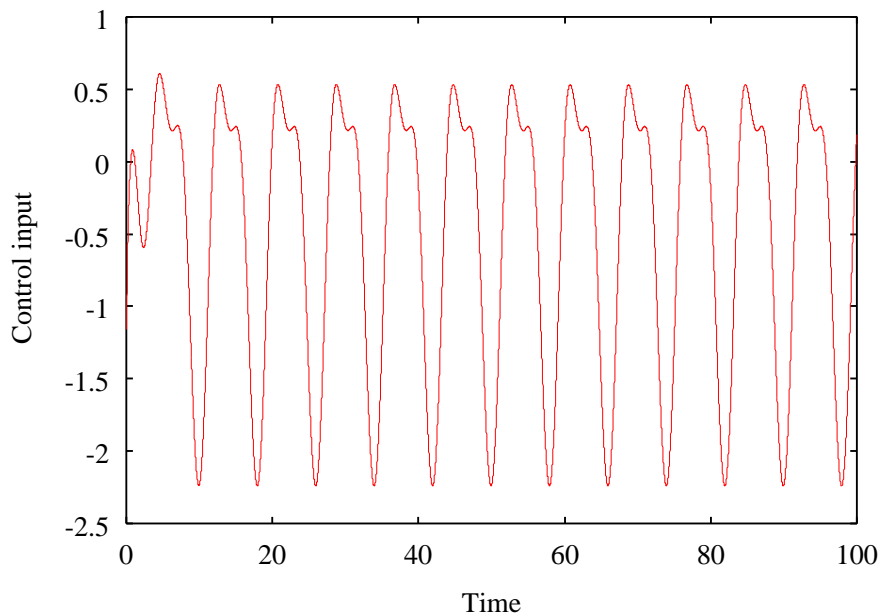


図 13 Control input

## 5.6 まとめ

本章では、非線形最小位相系とは限らない一入力出力非線形システムに対する大域出力レギュレーションを実現する手法を提案した。まず、プラントの状態を追従誤差が零となる零誤差多様体に収束させる不変多様体を構成するためにバックステッピング法の拡張となる手法を提案した。この手法によって得られる複数の不変多様体を用いた座標変換によってプラントを変換し、最終的に得られるシステムに対して、linear growth conditionのもとで可変ゲイン状態フィードバック則を適用することによって、大域出力レギュレーションを実現した。また、提案手法が非線形非最小位相系の出力レギュレーションに対して有効であることを数値例を用いて示した。今後の課題としては、提案手法をエラーフィードバックの場合に拡張することが考えられる。また、本手法においては、レギュレータ方程式などの偏微分方程式を解く必要があるが、一般的に、その解析解を求めることは困難である。このような偏微分方程式の解法に対して、偏微分方程式の解

## 5. 拡張バックステッピングを用いる方法

を Taylor 展開し，低次の項から代数的に求めていくことが考えられる．Huang and Rugh [20] は，レギュレータ方程式に対する  $k$  次近似解の存在する条件を示し，近似解を用いた場合の制御性能について言及した，しかしながら，このような Taylor 級数展開を用いた手法では，動作点の近傍でしかその近似の妥当性がいえないという問題が生じる．この問題点に対して，Wang, Huang and Yau [44] はニューラルネットワークを用いた解法を，横道，島 [48] は RBF ネットワークを用いた解法を提案している．本章で提案した手法においても，偏微分方程式の解析解が求まれば大域的な性質は保たれるが，近似解しか用いることができなければ制御可能領域が制限されてしまう．今後，レギュレータ方程式などの偏微分方程式に対するよりよい近似解法が提案されれば，近似解しか用いることができない場合においても，制御可能領域を拡大することができる．

## 6. 結論

本論文では、非線形非最小位相系の出力レギュレーション問題について考えた。この問題に対して、プラントを特異摂動系に変換する手法と拡張バックステッピング法を用いる手法の二つの手法を提案した。これらの手法は、ある多様体上に制約されたダイナミクスを考えることによって出力レギュレーションを実現するものである。

まず、相対次数が定義できない点が存在する多入力多出力非線形システムに対する出力レギュレーション問題について考察した。この問題を解くために、時間軸変換および座標変換を用いてプラントを形式的に特異摂動系の形に変換し、特異摂動系の速い動特性を安定化する制御則と、速い動特性が安定になったときにできる不変多様体上でプラントの出力が外部システムによって生成される目標軌道に漸近するような制御則を構成した。この手法が近似入出力線形化法などの従来法と比べて優れていることを平衡点において相対次数が定義できない ball and plate system を用いて示した。

つぎに、非線形最小位相系とは限らない一入力出力非線形システムの大域出力レギュレーション問題について考えた。まず、プラントの状態を追従誤差が零となる零誤差多様体に収束させる不変多様体を構成するためにバックステッピング法の拡張となる手法を提案した。この手法によって得られる複数の不変多様体を用いた座標変換によってプラントを変換し、最終的に得られるシステムに対して、linear growth condition のもとで可変ゲイン状態フィードバック則を適用することによって、大域出力レギュレーションが実現できることを示した。また、提案手法が非線形非最小位相系の出力レギュレーションに対して有効であることを数値例を用いて示した。

本論文で提案した二つの手法を比較すると、4章で提案した特異摂動系に変換する方法は相対次数が定義できない点をもつ多入力多出力非線形システムに対して適用でき、5章で提案した拡張バックステッピング法を用いる方法は、一入力出力システムであるが、非線形最小位相系だけでなく非線形非最小位相系あるいは相対次数が定義できないシステムに対しても適用することができる。また、その制御則は、特異摂動系に変換する方法では、peaking 現象のために局所的なもの

## 6. 結論

となる場合があるが，拡張バックステッピングを用いる方法では，大域的なものとして得られる．しかしながら，拡張バックステッピングを用いる方法では，解くべき多様体に関する偏微分方程式が多くなってしまいう問題点がある．一方，特異摂動系に変換する方法では， $\epsilon$ -修正法を用いることによって，近似的に偏微分方程式を解く方法を示しており，また，外部システムの状態を目標値の有限回の微分値で置き換えられる．このように，どちらの方法にも一長一短がある．

提案した二つの手法においては，プラントの状態および外部システムの状態のすべての情報を利用できるものとして，状態フィードバック則を適用することを考えたが，状態の一部しか観測できない出力フィードバックの場合や，追従誤差の情報しか利用できないエラーフィードバックの場合を考えることが今後の課題である．また，モデル化誤差などの外部システムからの影響以外の不確かさをもつ場合の出力レギュレーション問題も重要な課題である．最後に，参考文献に出力レギュレーションに関する文献を載せておく．また，一般的なバックステッピング法については，[30, 32] に詳しく述べられている．



## 謝辞

本研究を進めるにあたって、主指導教官として常に暖かいご指導、ご助言をいただきました奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科システム制御・管理講座 西谷 紘一 教授に深く感謝いたします。

お忙しい中、論文審査委員としてご助言をいただきました杉本 謙二 教授に感謝いたします。

また、非線形制御理論に関する知識および常日頃より多大なるご指導、ご助言をいただきました山下 裕 助教授に感謝いたします。

最後に、あらゆる面でお世話になりましたシステム制御・管理講座の皆様にご厚くお礼申し上げます。



## 参考文献

- [1] Stefano Battilotti. Global Output Regulation and Disturbance Attenuation with Global Stability via Measurement Feedback for a Class of Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 3, pp. 315–327, March 1996.
- [2] C. I. Byrnes, F. Delli Priscoli, A. Isidori, and W. Kang. Structurally Stable Output Regulation of Nonlinear Systems. *Automatica*, Vol. 33, No. 3, pp. 369–385, March 1997.
- [3] Christopher I. Byrnes, Francesco Delli Priscoli, and Alberto Isidori. *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser, 1997.
- [4] D. Cheng, T. J. Tarn, and S. K. Spurgeon. On the design of output regulators for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, Vol. 43, No. 3, pp. 167–179, July 2001.
- [5] E. J. Davison. The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-21, pp. 25–34, 1976.
- [6] C. A. Desoer and C. A. Lin. Tracking and disturbance rejection of mimo nonlinear systems with pi controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-30, No. 9, pp. 861–867, 1985.
- [7] C. A. Desoer and Y. T. Wang. The robust nonlinear servomechanism problem. *International Journal of Control*, Vol. 29, No. 5, pp. 803–828, 1979.
- [8] Santosh Devasia, Degang Chen, and Brad Paden. Nonlinear Inversion-Based Output Tracking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 7, pp. 930–942, July 1996.

## 参考文献

- [9] Zhengtao Ding. Global output regulation of uncertain nonlinear systems with exogenous signals. *Automatica*, Vol. 37, No. 1, pp. 113–119, January 2001.
- [10] B. A. Francis. The linear multivariable regulator problem. *SIAM J. Control Optimization*, Vol. 15, No. 3, pp. 486–505, 1977.
- [11] B. A. Francis and W. M. Wonham. The internal model principle for linear multivariable regulators. *J. Appl. Math. Optimiz.*, Vol. 2, pp. 170–194, 1975.
- [12] B. A. Francis and W. M. Wonham. The internal model principle of control theory. *Automatica*, Vol. 12, pp. 457–465, 1976.
- [13] Swaminathan Gopalswamy and J. Karl Hedrick. Tracking nonlinear non-minimum phase systems using sliding control. *International Journal of Control*, Vol. 57, No. 5, pp. 1141–1158, May 1993.
- [14] John Hauser, Shankar Sastry, and Petar Kokotović. Nonlinear Control via Approximate Input-Output Linearization: The Ball and Beam Example. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC37, No. 3, pp. 392–398, March 1992.
- [15] J. S. A. Hepburn and W. M. Wonham. Error feedback and internal models on differentiable manifolds. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-29, pp. 397–403, 1984.
- [16] 広地岳, 横道政裕, 島公脩. 近似入出力線形化手法を用いた “Ball and Plate System” の制御. 計測自動制御学会論文集, Vol. 31, No. 10, pp. 1635–1642, October 1995.
- [17] R. Hirschorn and J. Davis. Output tracking for nonlinear systems with singular points. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 25, No. 3, pp. 547–557, 1987.

- [18] Jie Huang. Asymptotic Tracking of a Nonminimum Phase Nonlinear System with Nonhyperbolic Zero Dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 3, pp. 542–546, March 2000.
- [19] Jie Huang and Wilson J. Rugh. On a nonlinear multivariable servomechanism problem. *Automatica*, Vol. 26, No. 6, pp. 963–972, 1990.
- [20] Jie Huang and Wilson J. Rugh. An Approximation Method for the Nonlinear Servomechanism Problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 9, pp. 1395–1398, September 1992.
- [21] Jie Huang and Wilson J. Rugh. Stabilization on Zero-Error Manifolds and the Nonlinear Servomechanism Problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 7, pp. 1009–1013, July 1992.
- [22] 石島辰太郎, 石動善久, 三平満司, 島公脩, 山下裕, 渡辺敦. 非線形システム論. 計測自動制御学会, May 1993.
- [23] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag, 3rd edition, 1995.
- [24] Alberto Isidori. A Remark on the Problem of Semiglobal Nonlinear Output Regulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 12, pp. 1734–1738, December 1997.
- [25] Alberto Isidori. A Tool for Semiglobal Stabilization of Uncertain Non-Minimum-Phase Nonlinear Systems via Output Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 10, pp. 1817–1827, October 2000.
- [26] Alberto Isidori and Christopher I. Byrnes. Output Regulation of Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 2, pp. 131–140, February 1990.

## 参考文献

- [27] Alberto Isidori and T. J. Tarn. Robust Regulation for Nonlinear Systems with Gain-Bounded Uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 10, pp. 1744–1754, October 1995.
- [28] 日本学術振興会プロセスシステム工学第 143 委員会. PSE における非線形制御. ワークショップ No. 19. July 1999.
- [29] Hassan K. Khalil. Robust Servomechanism Output Feedback Controllers for Feedback Linearizable Systems. *Automatica*, Vol. 30, No. 10, pp. 1587–1599, October 1994.
- [30] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2nd edition, 1996.
- [31] Khashayar Khorasani and Petar V. Kokotović. A Corrective Feedback Design for Nonlinear Systems with Fast Actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC31, No. 1, pp. 67–69, January 1986.
- [32] Miroslav Krstić, Ioannis Kanellakopoulos, and Petar Kokotović. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. John Wiley & Sons, 1995.
- [33] Nazmi A. Mahmoud and Hassan K. Khalil. Asymptotic Regulation of Minimum Phase Nonlinear Systems Using Output Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 10, pp. 1402–1412, October 1996.
- [34] L. Marconi and A. Isidori. Mixed internal model-based and feedforward control for robust tracking in nonlinear systems. *Automatica*, Vol. 36, No. 7, pp. 993–1000, July 2000.
- [35] Riccardo Marino and Patrizio Tomei. Global Adaptive Output-Feedback Control of Nonlinear Systems, Part I: Linear Parameterization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 1, pp. 17–32, January 1993.

- [36] J.-B. Pomet, R. M. Hirschorn, and W. A. Cebuhar. Dynamic Output Feedback Regulation for a Class of Nonlinear Systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, Vol. 6, No. 2, pp. 106–124, 1993.
- [37] Andrea Serrani and Alberto Isidori. Global robust output regulation for a class of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, Vol. 39, No. 2, pp. 133–139, February 2000.
- [38] Andrea Serrani, Alberto Isidori, and Lorenzo Marconi. Semiglobal robust output regulation of minimum-phase nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 10, No. 5, pp. 379–396, April 2000.
- [39] Paul M. Sharkey and John O’Reilly. Composite control of non-linear singularly perturbed systems: a geometric approach. *International Journal of Control*, Vol. 48, No. 6, pp. 2491–2506, 1988.
- [40] 島公脩, 石動善久, 山下裕, 渡辺 昭義武, 横道政裕. 非線形システム制御論. コロナ社, July 1997.
- [41] N. Sureshbabu and Wilson J. Rugh. Output Regulation with Derivative Information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 10, pp. 1755–1766, October 1995.
- [42] D. G. Taylor, P. V. Kokotovic, R. Marino, and I. Kanellakopoulos. Adaptive regulation of nonlinear systems with unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 4, pp. 405–412, 1989.
- [43] C. J. Tomlin and S. S. Sastry. Switching through singularities. *Systems & Control Letters*, Vol. 35, No. 3, pp. 145–154, October 1998.
- [44] Jin Wang, Jie Huang, and Stephen S. T. Yau. Approximate nonlinear output regulation based on the universal approximation theorem. *International*

## 参考文献

- Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 10, No. 5, pp. 439–456, April 2000.
- [45] Yuh Yamashita, Tetsuya Bono, Masasuke Shima, and Hirokazu Nishitani. Tracking Control for Unlinearizable Nonlinear Systems. In *Preprints of the 4th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design*, pp. 195–200, Enschede, Netherlands, July 1998.
- [46] Yuh Yamashita and Alberto Isidori. Global output regulation through singularities. In *Proceedings of 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, 2000.
- [47] Masahiro Yokomichi and Masasuke Shima. Another approach to asymptotic model matching problem for nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 8, No. 13, pp. 1119–1131, November 1998.
- [48] 横道政裕, 島公脩. RBF ネットワークを用いた非線形出力レギュレータの近似的設計法. 計測自動制御学会論文集, Vol. 36, No. 10, pp. 819–825, October 2000.



## 研究業績

### 学術雑誌論文

1. 山下 裕, 大西 規雄, 西谷 紘一: 相対次数が定義できない非線形系の追従制御, 計測自動制御学会論文集, Vol. 38, No. 1, pp. 18–25, 2002
2. 大西 規雄, 山下 裕, 西谷 紘一: 状態フィードバックを用いた非線形非最小位相系に対する大域的出力レギュレーション, システム制御情報学会論文誌, Vol. 15, No. 7, 2002 (印刷中)

### 国際会議論文

1. Norio Onishi, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: Global Output Regulation of Nonminimum Phase Nonlinear Systems, Proceedings of 40th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 79–84, Florida, USA, December 4–7, 2001

### 学会発表

1. 大西 規雄, 山下 裕, 西谷 紘一: 入出力線形化不可能な非線形 MIMO 系の追従制御, 計測自動制御学会 第 22 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, pp. 35–38, 宇都宮市, 1999 年 10 月
2. 大西 規雄, 山下 裕, 西谷 紘一: 非線形非最小位相系に対する大域的出力レギュレーション, 計測自動制御学会 第 23 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, pp. 183–186, 長岡市, 2000 年 11 月



## 付録

### A. 中心多様体定理

以下の式で表される  $n$  次元非線形システムを考える .

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{A.1})$$

ここで,  $f(x)$  は  $\mathbb{R}^n$  の開部分集合  $U$  上で定義される  $C^r$  級関数 ( $r \geq 2$ ) であり, このシステムは原点  $x = 0$  に平衡点をもつとする . 原点  $x = 0$  が平衡点であることより, システム (A.1) を以下のように書き直すことができる .

$$\dot{x} = Ax + \tilde{f}(x) \quad (\text{A.2})$$

ただし,

$$A = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (\text{A.3})$$

$$\tilde{f}(x) = f(x) - Ax \quad (\text{A.4})$$

である . また,  $\tilde{f}(x)$  は以下の式を満たす  $C^r$  級関数である .

$$\tilde{f}(0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0) = 0 \quad (\text{A.5})$$

線形近似系の安定性の原理としてよく知られるように, システム (A.1) の原点の局所安定性について以下のようにいえる .

- $A$  のすべての固有値が負の実部をもつならば, 原点はシステム (A.1) の漸近安定平衡点である .
- $A$  の固有値に実部が正のものが一つでもあるならば, 原点はシステム (A.1) の不安定平衡点である .

以上では,  $A$  の固有値に実部が零のものがあるときのシステム (A.1) の局所安定性については何も言及されておらず, 原点の局所安定性の解析を完全にはあつかっていない . 行列  $A$  が固有値に実部が零のものをもつ場合のシステムの安定

## A. 中心多様体定理

性問題は漸近解析の臨界問題と呼ばれる．この臨界問題の解析には以下で述べる中心多様体定理を用いることが有効である．

ここで，行列  $A$  は，実部が零の固有値を  $n^c(\geq 1)$  個，実部が負の固有値を  $n^s$  個，実部が正の固有値を  $n^u$  個もつと仮定する ( $n = n^c + n^s + n^u$ )．このとき，線形写像  $A$  の定義域は，次元がそれぞれ  $n^c, n^s, n^u$  である三つの不変部分空間  $\mathcal{E}^c, \mathcal{E}^s, \mathcal{E}^u$  の直和に分解される．ただし，不変部分空間  $\mathcal{E}^c, \mathcal{E}^s, \mathcal{E}^u$  に対して，行列  $A$  の  $\mathcal{E}^c$  による制限  $A|_{\mathcal{E}^c}$  の固有値はすべて実部が零であり， $A|_{\mathcal{E}^s}$  の固有値はすべて実部が負であり， $A|_{\mathcal{E}^u}$  の固有値はすべて実部が正である．線形写像  $A$  を非線形写像  $f : x \in U \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}^n$  の  $x = 0$  における微分表現とみなせば，その定義域は原点  $x = 0$  における  $U$  への接空間  $T_0U$  であり，部分空間  $\mathcal{E}^c, \mathcal{E}^s, \mathcal{E}^u$  は

$$T_0U = \mathcal{E}^c \oplus \mathcal{E}^s \oplus \mathcal{E}^u \quad (\text{A.6})$$

を満たす  $T_0U$  の部分空間とみなされる．

**定義 A.1 (不変多様体)** 開部分集合  $U$  の  $C^r$  級部分多様体  $S$  上の任意の点  $x_0$  に対して， $x(0) = x_0$  を満たすシステム (A.1) の軌道  $x(t)$  がすべての  $t \in (t_1, t_2)$  に対して， $x(t) \in S$  となる  $t_1 < 0 < t_2$  が存在すれば， $S$  はシステム (A.1) に対して局所的に不変であるといい， $S$  をシステム (A.1) に対する (局所) 不変多様体という．  $\square$

**定義 A.2 (中心多様体)** 原点  $x = 0$  をシステム (A.1) の平衡点とする．原点を含む多様体  $S$  が局所的に不変であり，原点における  $S$  への接空間が厳密に不変部分空間  $\mathcal{E}^c$  であるならば， $S$  を原点におけるシステム (A.1) に対する中心多様体という．  $\square$

以下では，原点  $x = 0$  が安定平衡点となり得る場合について考察するために，行列  $A$  が正の実部の固有値をもたない場合を考える．すなわち， $A$  は，実部が零の固有値を  $n^c(\geq 1)$  個，実部が負の固有値を  $n^s$  個もつと仮定する ( $n = n^c + n^s$ )．このとき，以下のように  $A$  をブロック対角行列に変換する相似変換  $T$  を求める

ことができる .

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

ここで ,  $A_1$  はすべての固有値が負の実部をもつ  $n^s$  次元行列であり ,  $A_2$  はすべての固有値が零の実部をもつ  $n^c$  次元行列である . すなわち ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\lambda_i(A_1)] &< 0, \quad (i = 1, \dots, n^s) \\ \operatorname{Re}[\lambda_i(A_2)] &= 0, \quad (i = 1, \dots, n^c; n^c \geq 1) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

を満たす . 座標変換

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = Tx \quad (\text{A.9})$$

を考えると , システム (A.1) を以下のように変換することができる .

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + g_1(y, z) \\ \dot{z} &= A_2 z + g_2(y, z) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

ここで ,  $g_i(y, z)$  ( $i = 1, 2$ ) は以下の式を満たす  $C^r$  級関数である .

$$g_i(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial g_i}{\partial y}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial g_i}{\partial z}(0, 0) = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (\text{A.11})$$

システム (A.10) に対する中心多様体の存在について以下の定理が成り立つ .

**定理 A.1 (中心多様体の存在定理)**  $g_i(y, z)$  ( $i = 1, 2$ ) が (A.11) を満たす  $C^r$  級関数であり ,  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) が (A.8) を満たすならば ,

$$S = \{(y, z) \in \mathbb{R}^{n^s} \times \mathcal{V} : y = \pi(z)\} \quad (\text{A.12})$$

がシステム (A.10) に対する中心多様体となるような  $z = 0$  の近傍  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n^c}$  および  $C^{r-1}$  級写像  $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n^s}$  が存在する .  $\triangle$

中心多様体の定義より , システム (A.10) に対する中心多様体  $S$  は  $(y, z) = (0, 0)$  を含み ,  $y$  座標が零である点の部分集合と接する . よって , 写像  $\pi$  は以下の式を満たす .

$$\pi(0) = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial z}(0) = 0 \quad (\text{A.13})$$

## A. 中心多様体定理

また，多様体  $S$  はシステム (A.10) に対して局所的に不変であることから，初期状態  $(y(0), z(0))$  が  $S$  上にあるならば，その軌道  $(y(t), z(t))$  は  $t \geq 0$  に対して  $S$  上に存在する．すなわち， $y(t) = \pi(z(t))$  となる．これを時間に関して微分することによって以下の関係が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= A_1 \pi(z(t)) + g_1(\pi(z(t)), z(t)) \\ &= \frac{\partial \pi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \pi}{\partial z} (A_2 z(t) + g_2(\pi(z(t)), z(t))) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$S$  に含まれるシステム (A.10) の任意の軌道に対して (A.14) が成り立つ必要があることより，写像  $\pi$  は以下の偏微分方程式を満たす必要がある．

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} (A_2 z + g_2(\pi(z), z)) = A_1 \pi(z) + g_1(\pi(z), z) \quad (\text{A.15})$$

定理 A.1 では，システム (A.10) に対する中心多様体の存在について述べているが，その一意性については何も述べていない．実際に，中心多様体は局所一意性をもたない．また，一般的に，システム (A.10) に対して  $g_i(y, z)$  ( $i = 1, 2$ ) が解析的であっても，任意の  $k \geq 1$  について  $C^k$  級中心多様体は存在するが， $C^\infty$  級中心多様体は必ずしも存在しない．

まず，システム (A.1) が非線形項をもたない場合について考える．このとき， $n$  次元ベクトル  $(y, z) \in \mathcal{E}^s \times \mathcal{E}^c$  のうち， $y$  成分は指数的に零に収束し， $(y, z)$  は  $\mathcal{E}^c$  上に漸近する． $\mathcal{E}^c$  はシステム (A.1) によって定義される流れのもとで不変であることより，システム (A.1) の漸近挙動は  $\mathcal{E}^c$  上の漸近挙動によって決定される．非線形項が存在する場合においても，原点近傍の解を考える限り， $y$  成分が中心多様体  $S$  に収束することがいえる．

**補題 A.1**  $y = \pi(z)$  を  $(y, z) = (0, 0)$  におけるシステム (A.10) に対する中心多様体であると仮定する．また， $(y(t), z(t))$  をシステム (A.10) の解とする．このとき， $(y(0), z(0)) \in \mathcal{U}_0$  であるならば，すべての  $t \geq 0$  に対して  $(y(t), z(t)) \in \mathcal{U}_0$  のときに，

$$\|y(t) - \pi(z(t))\| \leq M e^{-Kt} \|y(0) - \pi(z(0))\| \quad (\text{A.16})$$

となるような  $(y, z) = (0, 0)$  の近傍  $\mathcal{U}_0$  および実数  $M > 0, K > 0$  が存在する． $\triangle$

補題 A.1 は,  $(y, z) = (0, 0)$  に十分近い点から出発するシステム (A.10) の任意の軌道が指数的に中心多様体に漸近することを表す. 特に,  $(y_0, z_0)$  が  $(y, z) = (0, 0)$  に十分近いシステム (A.10) の平衡点であるならば, この平衡点は  $(y, z) = (0, 0)$  を含むシステム (A.10) に対する任意の中心多様体に含まれる必要がある. 実際に,

$$y(t) = y_0, \quad z(t) = z_0, \quad (t \geq 0) \quad (\text{A.17})$$

は  $(y(t), z(t)) = (y_0, z_0)$  を満たすシステム (A.10) の解であり, これは,  $y_0 = \pi(z_0)$  のときにのみ補題 A.1 によって与えられる結果と一致する. 同様に,  $\Gamma$  が  $(y, z) = (0, 0)$  の十分小さな近傍に含まれるシステム (A.10) の周期的な軌道であるとするとき,  $\Gamma$  は  $(y, z) = (0, 0)$  におけるシステム (A.10) に対する任意の中心多様体上に存在する. したがって, 中心多様体の非一意性にもかかわらず, 任意の中心多様体に常に含まれる点が存在する.

$(y(0), z(0))$  が  $S$  上の任意の初期状態であるならば, 定義より  $t = 0$  の近くの  $t$  に対して,  $y(t) = \pi(z(t))$  となる. ゆえに,  $S$  上の点  $y_0 = \pi(z_0)$  から出発するシステム (A.10) の任意の軌道は以下の形式で記述される.

$$y(t) = \pi(\zeta(t)), \quad z(t) = \zeta(t) \quad (\text{A.18})$$

ここで,  $\zeta(t)$  は,  $\zeta(0) = z_0$  を初期状態とする以下の微分方程式の解である.

$$\dot{\zeta} = A_2 \zeta + g_2(\pi(\zeta), \zeta) \quad (\text{A.19})$$

(A.19) は  $S$  上におけるシステム (A.10) の挙動を表す. 以下の定理は, システム (A.10) の  $(y, z) = (0, 0)$  の近傍における漸近特性の解析に対する中心多様体の役割について述べる.

**定理 A.2 (縮約原理)** 定理 A.1 の仮定のもとで,  $z = 0$  がシステム (A.19) の安定 (漸近安定, 不安定) 平衡点であるならば,  $(y, z) = (0, 0)$  はシステム (A.10) の安定 (漸近安定, 不安定) 平衡点である.  $\triangle$

定理 A.2 は,  $n$  次元システムの安定性解析をより低次元の  $n^c$  次元システムの安定性解析に帰着できることを意味する. すなわち, 十分小さな初期状態に対す

## A. 中心多様体定理

るシステム (A.10) の漸近挙動はシステム (A.19) の漸近挙動によって決定される。しかし、実際にこの定理を適用するには、 $\pi(z)$  に関して偏微分方程式 (A.15) を (A.13) の境界条件とともに解く必要があり、これは一般的に困難である。しかしながら、(A.15) の解  $y = \pi(z)$  を任意の精度に近似し、得られた近似解を (A.19) に用いることができる。このようにして、(A.19) の平衡点  $\zeta = 0$  の漸近特性を決定することができる。つぎの定理は中心多様体  $y = \pi(z)$  を  $z$  の Taylor 展開として任意の精度に近似できることを示す。

定理 A.3  $1 < k < r$  に対して、 $y = \pi_k(z)$  を以下の関数を満たす  $k$  次多項式であるとする。

$$\pi_k(0) = 0, \quad \frac{\partial \pi_k}{\partial z}(0) = 0 \quad (\text{A.20})$$

また、以下の関係が満たされていると仮定する。

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial z}(A_2 z + g_2(\pi_k(z), z))A_1 \pi_k(z) + g_1(\pi_k(z), z) = R_k(z) \quad (\text{A.21})$$

ここで、 $R_k(z)$  は  $k$  次以下のすべての偏導関数とともに  $z = 0$  で零となる関数である。このとき、(A.15) の任意の解  $\pi(z)$  に対して、偏差

$$D_k(z) = \pi(z) - \pi_k(z) \quad (\text{A.22})$$

は  $k$  次以下のすべての偏導関数とともに  $z = 0$  で零となる。  $\triangle$