

NAIST-IS-DT9761202

博士論文

ハミルトン・ヤコビ方程式を用いた  
非線形制御系における特異性について

今福 啓

1999年2月8日

奈良先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科 情報システム学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に  
博士(工学)授与の要件として提出した博士論文である。

今福 啓

審査委員： 西谷 紘一 教授  
高橋 豊 教授  
小笠原 司 教授  
山下 裕 助教授

# ハミルトン・ヤコビ方程式を用いた 非線形制御系における特異性について\*

今福 啓

## 内容梗概

本論文では、特異性をもつ非線形系にたいして、ハミルトン・ヤコビ偏微分方程式の解を必要とする制御系を構成するという問題を考える。本論文で扱う問題は、ハミルトニアンを入力にかんして最小化することができない場合と、そしてハミルトニアンを最小化することはできるが、その解がなめらかなものとはならないという2つの異なる問題である。そこで、これらの問題が可解となるための条件を導き、後者についてはハミルトン・ヤコビ偏微分方程式の数値解を求める方法および制御系を構成する方法について提案する。

非線形系において、外乱入力の評価出力に与える影響を決められた値よりも小さくするという問題は、非線形  $H_\infty$  制御問題とよばれる。通常、この  $H_\infty$  制御問題では、外乱入力から評価出力への直達項と、制御入力から観測出力への直達項が列フルランクであるという仮定を満たす標準問題が考えられており、問題が可解となるための十分条件が導かれている。この仮定を満たさない場合には、ハミルトニアンを入力にかんして最小化することができない。本論文ではこの仮定を満たさない特異制御問題において、問題が可解となるための十分条件を導く。この問題は、非標準問題とよばれる。

次に、ノンホロノミックシステムとよばれる非線形特異系にたいして、非線形最適レギュレータを構成することを考える。ノンホロノミックシステムにおいては、Brockettの定理(1983)により「系を漸近安定とするような、なめらかでかつ

---

\*奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報システム学専攻 博士論文, NAIST-IS-DT9761202, 1999年2月8日.

時不変の状態フィードバック則は存在しない」ということが知られており、最適レギュレータを構成する際に必要なハミルトン・ヤコビ偏微分方程式のなめらかな解 ( $C^1$  級の解) が存在しない。本論文では、偏微分方程式の解の概念を拡張し、粘性解という微分不可能となる点が含まれることを許す、偏微分方程式の大域的に唯一の解を求め、最適レギュレータを構成する。ノンホロノミックシステムのひとつとして三輪移動体を取りあげ、動的計画法を用いて粘性解を計算する方法について提案する。また、動的計画法における最適解の探索を高速化するために、ランダム探索を用いた方法についても提案する。そして、得られた粘性解を用いて最適制御則を構成するが、その際に微分不可能点を考慮して粘性解をスプライン関数で近似し、最適制御則が Brockett の定理の条件を満たさない不連続フィードバックとなるための方法を提案する。

また、この方法を応用し、三輪移動体が障害物をひとつの最適制御則で回避するような最適制御則を構成するための、ハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解を求める方法を提案する。さらに、外乱入力のある三輪移動体を考え、このシステムにたいして非線形  $H_\infty$  制御系を構成するために必要となるハミルトン・ヤコビ・アイザックス方程式の粘性解を求める方法も提案する。

最後に、三輪移動体に対して、本論文で提案したハミルトン・ヤコビ偏微分方程式の粘性解の計算法と、粘性解を用いて最適制御則を構成した場合の制御性能をシミュレーションにより評価し、その有効性を確認する。

## キーワード

非線形制御,  $H_\infty$  制御問題, 非標準問題, ノンホロノミックシステム, Hamilton-Jacobi 偏微分方程式, 粘性解

# Singularities of nonlinear control systems designed by Hamilton-Jacobi equations\*

Kei Imafuku

## Abstract

This thesis treats two problems for nonlinear singular systems in order to construct a feedback law through a solution of the Hamilton-Jacobi partial differential equation. The first is the problem for which the Hamiltonian that cannot be minimized with respect to inputs. The second is the problem in which the partial differential equation has no smooth solution. In this thesis, conditions to solve the first problem are derived in the  $H_\infty$  control case. For the second problem, some numerical methods are proposed to calculate a weak solution of the Hamilton-Jacobi equation and to construct the control law.

The problem of making the influence of the disturbance input on the regulated output lower than a specified value for nonlinear systems is called a nonlinear  $H_\infty$  control problem. In general, a standard problem is considered that satisfies the assumptions that the direct through matrix, from the disturbance input to the regulated output, and the control input to the measured output are full rank. Then sufficient conditions are given for this problem. If these assumptions are not satisfied, the Hamiltonian cannot be minimized with respect to the input. In this thesis, sufficient conditions are shown for the singular control problem that does not satisfy these assumptions. This problem is called a nonstandard problem.

---

\*Doctor's Thesis, Department of Information Systems, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, NAIST-IS-DT9761202, February 8, 1999.

Next, the construction of the nonlinear optimal regulator for nonholonomic systems, which are nonlinear singular systems, is considered. It was proved in Brockett's theorem (1983) that there is no smooth and time invariant state feedback law for nonholonomic systems, and that there is no smooth ( $C^1$ ) solution for the Hamilton-Jacobi equation which is required in construction of an optimal regulator. This thesis attempts to obtain a viscosity solution that is globally unique and allows nonsmooth points through expanding the definition of the solution of the partial differential equation. A wheeled vehicle is given as an example of the nonholonomic system, and a numerical method is proposed to calculate the viscosity solution using the dynamic programming principle. To make the search for the optimal solution faster, a new method that uses a random search is also proposed. Then, a feedback law is made by approximating the viscosity solution using a spline function for the nonsmooth points. However, this feedback law does not satisfy the conditions of Brockett's theorem.

By expanding these methods further, we can obtain a viscosity solution for the Hamilton-Jacobi equation that provides a control law designed to avoid the obstacles of one feedback law. We also propose a method to calculate the viscosity solution of the Hamilton-Jacobi-Isaacs equation, which is required to construct a nonlinear  $H_\infty$  control system for a wheeled vehicle under disturbances. Finally, proposed methods to calculate the viscosity solution of the Hamilton-Jacobi equation and the control performances with the optimal feedback law calculated using the viscosity solution are evaluated through simulations. The effectiveness of the proposed methods is shown in these simulations results.

**Keywords:**

nonlinear control,  $H_\infty$  control problem, nonstandard problem, nonholonomic systems, Hamilton-Jacobi partial differential equation, viscosity solution

# 目次

1. はじめに	1
2. 非線形最適制御問題と非線形非標準 $H_\infty$ 制御問題	4
2.1 非線形最適制御問題	4
2.2 状態フィードバックによる非線形非標準 $H_\infty$ 制御問題	6
2.3 出力フィードバックによる非線形非標準 $H_\infty$ 制御問題	13
2.3.1 状態観測器のゲインが与えられている場合の可解条件	13
2.3.2 状態観測器のゲインが与えられていない場合の可解条件	18
3. ハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解を用いたノンホロノミックシステムの制御	24
3.1 ノンホロノミックシステム	24
3.2 ハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解	25
3.3 三輪移動体	26
3.3.1 三輪移動体のモデル	26
3.3.2 三輪移動体にたいする最適レギュレータの構成	28
3.4 ハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解の計算法	29
3.4.1 動的計画法を用いた計算法	29
3.4.2 ランダム探索を用いた動的計画法による計算法	34
3.5 粘性解を用いた最適制御則の計算法	39
3.5.1 一次近似による偏微分値を用いた方法	39
3.5.2 スプライン関数による偏微分値を用いた方法	40
3.6 三輪移動体の障害物回避	43
3.7 ノンホロノミックシステムの $H_\infty$ 制御問題	47
3.7.1 外乱を含む三輪移動体のモデル	47
3.7.2 三輪移動体にたいする $H_\infty$ 制御問題	48
3.8 Hamilton-Jacobi-Isaacs 偏微分方程式の粘性解の計算法	50

4. シミュレーション結果	54
4.1 動的計画法による粘性解を用いた最適制御	54
4.2 ランダム探索を用いた動的計画法による粘性解を用いた最適制御	60
4.2.1 1ステップ先までを探索した場合	60
4.2.2 3ステップ先までを探索した場合	61
4.3 障害物がある場合の粘性解を用いた最適制御	70
4.4 計算時間の比較およびシミュレーション結果の考察	75
5. おわりに	77
謝辞	79
参考文献	80
付録	83
A. 有限差分近似法	83
A.1 有限差分近似法を用いた三輪移動体におけるハミルトン・ヤコビ 方程式の粘性解の計算法	83
A.2 シミュレーション結果	87



## 目 次

1	Wheeled vehicle . . . . .	27
2	Wheeled vehicle (with disturbance) . . . . .	48
3	Viscosity solution at $\theta = 0$ . . . . .	56
4	Optimal trajectory from $(0, 2, 0)$ . . . . .	57
5	Optimal trajectory from $(2, 0, \pi/2)$ . . . . .	57
6	Viscosity solution at $\theta = 0$ . . . . .	58
7	Optimal trajectory from $(0, 2, 0)$ . . . . .	59
8	Optimal trajectory from $(2, 0, \pi/2)$ . . . . .	59
9	Optimal trajectory from $(0, 0, \pi/2)$ . . . . .	60
10	Viscosity solution at $\theta = 0$ . . . . .	63
11	Optimal trajectory from $(0, 2, 0)$ . . . . .	64
12	Optimal trajectory from $(2, 0, \pi/2)$ . . . . .	64
13	Viscosity solution at $\theta = 0$ . . . . .	66
14	Optimal trajectory from $(0, 2, 0)$ . . . . .	66
15	Optimal trajectory from $(2, 0, \pi/2)$ . . . . .	67
16	Optimal trajectory from $(0, 0, \pi/2)$ . . . . .	67
17	Viscosity solution at $\theta = 0$ (searched 3 steps forward) . . . . .	68
18	Optimal trajectory from $(0, 2, 0)$ (searched 3 steps forward) . . . . .	68
19	Optimal trajectory from $(2, 0, \pi/2)$ (searched 3 steps forward) . . . . .	69
20	Optimal trajectory from $(0, 2, 0)$ (searched 3 steps forward) . . . . .	69
21	Optimal trajectory from $(2, 0, \pi/2)$ (searched 3 steps forward) . . . . .	70
22	Viscosity solution at $\theta = 0$ . . . . .	73
23	Optimal trajectory from $(0, 2, 0)$ . . . . .	73
24	Optimal trajectory from $(0, 1, \pi/2)$ . . . . .	74
25	Optimal trajectory from $(0, 1.5, \pi/2)$ . . . . .	74
26	Viscosity solution at $\theta = 0$ . . . . .	89
27	Optimal trajectory from $(0, 2, 0)$ . . . . .	89
28	Optimal trajectory from $(2, 0, \pi/2)$ . . . . .	90

## 表 目 次

1	Parameters for dynamic programming principle . . . . .	56
2	Parameters for dynamic programming principle around the origin .	58
3	Parameters for dynamic programming principle with random search	63
4	Parameters for dynamic programming principle with random search around the origin . . . . .	65
5	Parameters with obstacle . . . . .	72
6	Calculation time . . . . .	76
7	Parameters for finite difference numerical approximation . . . . .	88

## 1. はじめに

非線形系を漸近安定化するためのひとつの手法として、非線形最適制御問題を考え、非線形最適レギュレータを構成するという手法がある。また、外乱の影響をうける非線形系にたいする外乱抑圧問題として、非線形  $H_\infty$  制御問題が知られている。あらかじめ知ることのできない外乱の影響があっても、系を漸近安定とするような制御系を設計するという問題はロバスト制御問題とよばれ、さまざまなロバスト制御問題を  $H_\infty$  制御問題に変換して、統一して解くことができる。非線形最適制御問題が与えられた評価関数を入力にかんして最小化するという問題に帰着されるのにたいし、非線形  $H_\infty$  制御問題では評価関数を入力にかんしては最小化し、外乱にかんしては最大化するような問題に帰着される。どちらも Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の正定解を用いて制御則の計算をおこなうことから、類似した問題となっている。

本論文では、非線形系における制御系の構成に Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解を必要とする制御系における、2つの特異性について考える。まず最初に、Hamiltonian を入力にかんして最小化できないという特異制御問題を考える。次に、Hamiltonian を入力にかんして最小化することはできるが、その解がなめらかなものとはならない特異システムについて考える。

$H_\infty$  制御問題は、状態フィードバックによる制御則を構成する場合には外乱から評価出力までの直達項がフルランクであるという条件を満たす必要がある。そして出力フィードバックによる制御則を構成する場合には、状態フィードバックにおいて満たすべき条件にくわえ、外乱入力から観測出力までの直達項がフルランクであるという条件も満たす必要がある。これらの仮定を満たす問題は標準問題とよばれ、Hamiltonian の鞍点が存在することから、Hamiltonian を外乱にかんして最大化、入力にかんして最小化するような鞍点を用いて問題が可解となるための十分条件が導かれている。標準問題の可解条件について扱っている文献は数多くあるが、代表的なものとして状態フィードバックによるものは文献 [1]、出力フィードバックによるものは文献 [2] がある。本論文では、標準問題において満たすべき2つの仮定を満たしていないことから、Hamiltonian を入力にかんして最小化する鞍点が存在しない、非標準問題とよばれる特異制御問題を考え、 $H_\infty$

制御問題が可解となるための十分条件を導く。

次に、ノンホロノミックシステムという、系の拘束式に位置だけではなく、速度や加速度がふくまれるものをもつ系を漸近安定とするために、最適レギュレータを構成することを考える。このシステムは、Brockett の定理 [14] により「なめらかで時不変な状態フィードバック則が存在しない」ということが証明されている。つまり、最適レギュレータを構成する際に必要な Hamilton-Jacobi 偏微分方程式が、なめらかな解をもたない特異システムである。そこで、ここでは Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解として、微分不可能点を含むことを許す、大域的に唯一である粘性解を求めることを考える。粘性解を用いて最適レギュレータを構成することで、入力が粘性解の微分不可能点において不連続となることから、Brockett の定理における条件を満たさない不連続な状態フィードバック則が実現できる。本論文では、ノンホロノミックシステムのひとつとして三輪移動体を取りあげ、最適レギュレータを構成する際に必要な Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を、動的計画法により計算する手法について提案する。また、この手法において、最適な入力を探索する際にランダム探索を用いることで、計算速度を高速化する手法についても提案する。

得られた粘性解を用いて最適制御則を計算する際には、粘性解に微分不可能点があることを考慮する必要がある。そこで、まず最初に一般的な手法として、粘性解の偏微分値を一次近似により計算する手法について提案する。次に、粘性解をなめらかに補間するために、スプライン関数を用いた補間をおこない、それを微分することで偏微分値の計算をすることを考える。スプライン関数は点と点の間をなめらかに補間する関数であるから、ここでは粘性解の微分不可能点を考慮して、微分不可能点をなめらかに補間しないようにスプライン関数を構成することで粘性解の偏微分値を計算し、最適制御則を決定する手法について提案する。

Brockett の定理における条件を満たさない、不連続フィードバック則を構成することについて述べている文献には [18][19][20] などがあるが、これらはすべて系をチェインド・フォームとよばれる正準系に変換したものにたいして制御則を構成しており、元の系で考える領域のうち不連続フィードバック則をもちいなければ漸近安定にはできない領域を除いて制御則を構成している。それに対し、本論

文では系をチェインド・フォームに変換することなく、しかも評価関数を最小とする最適不連続フィードバック則を計算しているという点が、これらの文献との大きな違いとなっている。

三輪移動体が移動できる範囲内に障害物がある場合にも、障害物がない場合と等しいひとつの制御則で障害物を回避するということも、最適レギュレータを構成することで可能となる。これは、最適レギュレータを構成する際に必要な Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解が、三輪移動体が障害物の中に入らないように得られるからである。このような粘性解を求めるには、三輪移動体が障害物に衝突するかどうかの判定が必要である。そこで、障害物として矩形の物体を考え、三輪移動体が障害物に衝突するかどうかを厳密に計算する方法と、障害物に衝突するのを回避する粘性解を求める手法を提案する。

ノンホロノミックシステムにたいして  $H_\infty$  制御系を構成するという問題として、三輪移動体の左右の後輪の大きさが異なるという場合を考え、車輪の大きさの誤差により生じる外乱の影響を抑えることを考える。このときに必要な Hamilton-Jacobi-Isaacs 偏微分方程式の粘性解を求めるため、動的計画法により得られる最適入力と、Hamilton-Jacobi-Isaacs 偏微分方程式を解析的に求めた最適入力の式が一致することを用いて計算するという手法を提案する。

最後に、提案する手法を用いたシミュレーションをおこない、それぞれの手法の特徴および制御性能について検討し、その有効性を確認する。

## 2. 非線形最適制御問題と非線形非標準 $H_\infty$ 制御問題

非線形系において、決められた評価関数を最小にし、かつ閉ループ系を漸近安定とするような制御則を構成するという問題が、非線形最適制御問題である。本章では、まず Hamilton-Jacobi 方程式の解を求めることで、最適制御則が計算できることを示す。

また、外乱が評価出力に与える影響を決められた値よりも小さく抑えるという、非線形  $H_\infty$  制御問題についても考える。標準問題では、外乱入力から評価出力への直達項と、制御入力から観測出力への直達項が列フルランクであるという条件を満たしている必要があるが、本節で考える非標準問題ではこれを満たす必要はなく、より厳しい条件のもとで問題が可解となるための条件を求める。

### 2.1 非線形最適制御問題

次のような非線形系を考える。

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

$x \in R^n$  は状態、 $u \in R^m$  は入力である。また、平衡点  $x = 0$  において  $f(0) = 0$  が成り立つとする。

式(1)であらわされるシステムにおいて、次の評価関数を最小にすることを考える。

$$J = \int_{t_0}^{\infty} (x^T x + u^T u) dt \quad (2)$$

ここで、 $V(x(t_0))$  を次のように定義する。

$$V(x(t_0)) = \min_u J \quad (3)$$

$$V(x) > 0, V(0) = 0 \quad (4)$$

このとき、式(3)を変形すると

$$\begin{aligned} V(x(t_0)) &= \min_u \int_{t_0}^{\infty} (x^T x + u^T u) dt \\ &= \min_u \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (x^T x + u^T u) dt + \int_{t_1}^{\infty} (x^T x + u^T u) dt \right\} \end{aligned}$$

$$= \min_u \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (x^T x + u^T u) dt + V(x(t_1)) \right\} \quad (5)$$

となる。ただし、 $t_0 < t_1$ である。ここで、もし  $V(x(t))$  が微分可能であるならば、 $V(x(t_0))$  を右辺に移行して両辺を  $t_1 - t_0$  で割り、 $t_1 \rightarrow t_0$  とすることによって

$$\min_u (\dot{V} + x^T x + u^T u) = 0 \quad (6)$$

が得られる。左辺の括弧内を  $H(x, \partial V / \partial x, u)$  とおいて式(1)を代入すると

$$H(x, \frac{\partial V}{\partial x}, u) = \frac{\partial V}{\partial x} (f(x) + g(x)u) + x^T x + u^T u \quad (7)$$

となる。よって、式(2)であらわされる評価関数を最小とするような入力  $u^*$  は、 $H$  を  $u$  にかんして偏微分して得られた

$$\frac{\partial H}{\partial u} = g^T \frac{\partial V^T}{\partial x} + 2u \quad (8)$$

において、右辺を0とおいて  $u$  にかんして整理することによって

$$u^* = -\frac{1}{2} g^T \frac{\partial V^T}{\partial x} \quad (9)$$

のように求めることができる。これを式(7)に代入することによって、次の Hamilton-Jacobi 方程式

$$H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) = \frac{\partial V}{\partial x} f - \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} g g^T \frac{\partial V^T}{\partial x} + x^T x = 0 \quad (10)$$

が得られる。よって、もし式(10)の Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解  $V(x)$  が存在すれば、式(9)の最適制御則を求めることができる。また、もし式(10)の解が存在するならば、式(6)より  $x \neq 0$  において

$$\dot{V} = -x^T x - u^T u < 0 \quad (11)$$

となり、 $V(x)$  がリアプノフ関数となることから、閉ループ系が漸近安定となることがわかる。

以上をまとめると、非線形最適制御にかんする次の定理が得られる。

**定理 1** 式(1)であらわされるシステムにおいて、式(10)(4)を満たすような  $V(x) \in C^1$  が存在するならば、式(9)であらわされる制御則によって式(2)を最小とし、かつ閉ループ系を漸近安定とすることができる。■

## 2.2 状態フィードバックによる非線形非標準 $H_\infty$ 制御問題

次のような、外乱の影響がある非線形系を考える。

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \quad (12)$$

$x \in R^n$  は状態、 $u \in R^m$  は制御入力、 $w \in R^p$  は外乱入力である。また、平衡点  $x = 0$  において  $f(0) = 0$  が成り立つとする。

ここで、次の評価出力にたいして、外乱の影響を抑えつつ、かつ閉ループ系を漸近安定とするような制御入力を求めたい。

$$z = h_1(x) + j_{11}(x)w + j_{12}(x)u \quad (13)$$

ただし、 $h_1(0) = 0$  である。この外乱抑圧問題は、次の  $H_\infty$  制御問題で具体的に定義される。

$H_\infty$  制御問題 式(12)であらわされるシステムにおいて、初期時刻に  $x(0) = 0$  であるときに、外乱  $w$  から式(13)であらわされる評価出力  $z$  までの  $L_2$  ゲインを  $\gamma$  以下にする、すなわち

$$\sup_{\substack{w \in L_2(0, T] \setminus \{0\} \\ T \in (0, \infty), x(0) = 0}} \frac{\int_0^T z^T z dt}{\int_0^T w^T w dt} \leq \gamma^2 \quad (14)$$

を満たし、かつ閉ループ系を漸近安定とするような制御入力  $u$  を求める。■

本節においては、すべての状態  $x$  が観測できるものとする。全状態を観測できないような場合については、次節において述べる。

式(14)が成り立つための必要十分条件は

$$V(x(t_1)) - V(x(0)) \leq \int_0^{t_1} (\gamma^2 w^T w - z^T z) dt \quad (15)$$

$$V(x) \geq 0, V(0) = 0 \quad (16)$$

を満たすような  $V(x)$  が存在することである [8]。そこで、 $V(x) \in C^1$  であるならば、式(15)の両辺は  $t$  にかんして微分することができるので

$$\dot{V}(x) - \gamma^2 w^T w + z^T z \leq 0 \quad (17)$$



と書くことができる。これに式(12)(13)を代入し、左辺を  $H(x, \partial V/\partial x, w, u)$  とおくことによって

$$H(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w, u) = \frac{\partial V}{\partial x}(f + g_1 w + g_2 u) - \gamma^2 w^T w + (h_1 + j_{11} w + j_{12} u)^T (h_1 + j_{11} w + j_{12} u) \leq 0 \quad (18)$$

が得られる。ここで、式(18)が

$$H(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w, u^*) \leq H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) \leq H(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w^*, u) \quad (19)$$

となるような唯一の鞍点  $w = w^*, u = u^*$  をもつとする。ただし

$$H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) = H(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w^*, u^*)$$

である。このとき、もし式(16)を満たすような Hamilton-Jacobi-Isaacs 不等式

$$H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) \leq 0 \quad (20)$$

の解  $V(x)$  が存在するならば、制御則  $u = u^*$  によって、あらゆる外乱  $w$  にたいして式(17)がなりたち、 $w$  から  $z$  までの  $L_2$  ゲインを  $\gamma$  以下にすることができる。

鞍点  $w = w^*, u = u^*$  が存在するためには、次の仮定がなりたつことが必要である。

仮定 1  $R_1(x) = \gamma^2 I - j_{11}^T j_{11}$  は正定である。■

仮定 2 すべての  $x$  について、 $j_{12}(x)$  は

$$\text{rank } j_{12}(x) = q, \quad q \leq m \quad (21)$$

を満たし、 $j_{12}(x)$  の行ベクトルが張る空間に大域的な基底が存在する。■

通常、標準  $H_\infty$  問題においては、式(21)のかわりに次のより厳しい条件がもちいられる。

$$\text{rank } j_{12}(x) = m \quad (22)$$

この条件を緩和したものが、本節で考える非標準  $H_\infty$  問題である。

仮定2がなりたつとき、グラム・シュミットの直交化法によって、 $j_{12}(x)$ の行ベクトル空間を張る正規直交基底

$$\Sigma_1(x) = \begin{bmatrix} \sigma_1(x) \\ \vdots \\ \sigma_q(x) \end{bmatrix} \quad (23)$$

を用いて

$$j_{12}(x) = U_1(x)\Sigma_1(x) \quad (24)$$

と分解できる。ここで、 $U_1(x)$ は列フルランク、 $\Sigma_1(x)$ は行フルランクであり

$$\Sigma_1(x)\Sigma_1^T(x) = I_q \quad (25)$$

となる。なお、 $I_q$ は $q \times q$ の単位行列である。

$j_{12}(x)$ が列フルランクではないことから $j_{12}^T(x)j_{12}(x)$ が半正定となり、式(18)は鞍点をもたない。そこで、式(18)の両辺に

$$2\mu_1(x)u^T(x)\Psi_1(x)u(x) - 2\mu_1(x)c_1^T(x)\Psi_1(x)c_1(x) \quad (26)$$

を加えた、次の関数を考える。

$$\begin{aligned} H'(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w, u) &= \frac{\partial V}{\partial x}(f + g_1w + g_2u) - \gamma^2w^Tw \\ &+ (h_1 + j_{11}w + j_{12}u)^T(h_1 + j_{11}w + j_{12}u) \\ &+ 2\mu_1u^T\Psi_1u - 2\mu_1c_1^T\Psi_1c_1 \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 $c_1(x)$ は $x$ にかんする任意の関数で、 $\Psi_1(x)$ および $\mu_1(x)$ は

$$\Psi_1(x) = I - \Sigma_1^T(x)\Sigma_1(x) \quad (28)$$

$$\mu_1(x) > 0 \quad (29)$$

である。また、 $c_1 = u$ を代入することにより、式(27)は式(18)に一致する。式(27)を $w, u$ にかんして偏微分することによって

$$\frac{\partial H'}{\partial w}(w^*, u^*) = g_1^T \frac{\partial V}{\partial x} + 2j_{11}^T h_1 + 2j_{11}^T j_{12} u^* - 2(\gamma^2 I - j_{11}^T j_{11}) w^* = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial H'}{\partial u}(w^*, u^*) = g_2^T \frac{\partial V}{\partial x} + 2j_{12}^T h_1 + 2j_{12}^T j_{11} w^* + 2(j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1) u^* = 0 \quad (31)$$

が得られるが、式(27)が鞍点をもつためには、 $j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1$ が正定であることを示す必要がある。そこで、次のような入力  $u'$  を考える。

$$u' = \begin{bmatrix} \Sigma_1(x) \\ \Sigma_1^\perp(x) \end{bmatrix} u \quad (32)$$

$\Sigma_1^\perp(x)$  は、 $\Sigma_1(x)$  の行ベクトルによって張られる空間の直交補空間を張る正規直交基底を行としてもつ行列である。このとき、 $u^T(j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1)u$  は、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} & u^T(j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1)u \\ &= u'^T \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_1^\perp \end{bmatrix} \left\{ \Sigma_1^T U_1^T U_1 \Sigma_1 + 2\mu_1(I - \Sigma_1^T \Sigma_1) \right\} \begin{bmatrix} \Sigma_1^T & \Sigma_1^\perp \end{bmatrix} u' \\ &= u'^T \begin{bmatrix} U_1^T U_1 & 0 \\ 0 & 2\mu_1 I_{m-q} \end{bmatrix} u' \end{aligned} \quad (33)$$

$U_1$  は列フルランクなので、上式より

$$j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1 > 0 \quad (34)$$

であることがわかる。ここで

$$j_{12}^T j_{12} \Xi_1 = \Sigma_1^T \Sigma_1 \quad (35)$$

$$j_{12} \Psi_1 = 0 \quad (36)$$

$$\Psi_1 \Xi_1 = 0 \quad (37)$$

$$\Psi_1^2 = \Psi_1 \quad (38)$$

であることから

$$(j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1)^{-1} = \Xi_1 + \frac{1}{2\mu_1} \Psi_1 \quad (39)$$

$$\Xi_1 = \Sigma_1^T (U_1^T U_1)^{-1} \Sigma_1 \quad (40)$$

となり、これらを用いて  $w^*, u^*$  を計算すると

$$w^* = \frac{1}{2} \Lambda \left\{ (g_1^T - \Phi g_2^T) \frac{\partial V}{\partial x} + 2(j_{11}^T - \Phi j_{12}^T) h_1 \right\} \quad (41)$$

$$u^* = -\frac{1}{2} \Gamma^{-1} \left\{ (\Omega g_1^T + g_2^T) \frac{\partial V}{\partial x} + 2(\Omega j_{11}^T + j_{12}^T) h_1 \right\} \quad (42)$$

となる。ただし

$$\Phi = j_{11}^T j_{12} \left( \Xi_1 + \frac{1}{2\mu_1} \Psi_1 \right) \quad (43)$$

$$\Lambda = R_1 + \Phi j_{12}^T j_{11} > 0 \quad (44)$$

$$\Omega = j_{12}^T j_{11} R_1^{-1} \quad (45)$$

$$\Gamma = j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1 + \Omega j_{11}^T j_{12} > 0 \quad (46)$$

$$(47)$$

である。このとき、式(27)は

$$\begin{aligned} H'(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w, u) &= H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) - (w - w^*)^T \Lambda (w - w^*) \\ &+ \{u - u^* + \Phi^T (w - w^*)\}^T (j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1) \{u - u^* + \Phi^T (w - w^*)\} \end{aligned} \quad (48)$$

と平方完成できる。なお、上式において  $H^*(x, \partial V/\partial x)$  は

$$H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) = H'(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w^*, u^*) \quad (49)$$

である。 $w = w^*$  を代入すると

$$H'(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w^*, u) = H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) + (u - u^*)^T (j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1) (u - u^*) \quad (50)$$

となるが、 $j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1 > 0$  であることから

$$\begin{aligned} H'(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w^*, u) &= H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) + (u - u^*)^T (j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1) (u - u^*) \\ &\geq H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) \end{aligned} \quad (51)$$

がなりたつ。

また、式(48)に  $u = u^*$  を代入すると

$$\begin{aligned} H'(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w, u^*) &= H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) - (w - w^*)^T \Lambda (w - w^*) \\ &+ (w - w^*)^T \Phi (j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1) \Phi^T (w - w^*) \end{aligned} \quad (52)$$

となるが

$$\Phi (j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1) \Phi^T = j_{11}^T j_{12} \left( \Xi_1 + \frac{1}{2\mu_1} \Psi_1 \right) j_{12}^T j_{11} \quad (53)$$

であることから

$$\begin{aligned} H'(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w, u^*) &= H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) - (w - w^*)^T R_1 (w - w^*) \\ &\leq H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) \end{aligned} \quad (54)$$

が得られる。ゆえに、式(51)(54)より

$$H'(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w, u^*) \leq H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) \leq H'(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w^*, u) \quad (55)$$

であることがわかり、 $w = w^*, u = u^*$  が唯一の鞍点となることがわかる。なお、上式において、等号成立は  $w = w^*, u = u^*$  のときのみである。

式(27)は、 $u = u^*$  のときに  $c_1 = u^*$  を代入することで式(18)と一致する。そこで、もし式(16)を満たすような Hamilton-Jacobi-Isaacs 不等式

$$H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) \Big|_{c_1=u^*} \leq 0 \quad (56)$$

の解  $V(x) \in C^1$  が存在すれば、式(42)であらわされる制御則によって、あらゆる外乱  $w$  にたいし、 $w$  から  $z$  までの  $L_2$  ゲインを  $\gamma$  以下にすることができる。

$H^*(x, \partial V/\partial x)$  の各項を計算するために、式(48)に  $w = 0, u = 0$  を代入して整理すると

$$\begin{aligned} H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) \Big|_{c_1=u^*} &= H'(x, \frac{\partial V}{\partial x}, 0, 0) \Big|_{c_1=u^*} + w^{*T} \Lambda w^* \\ &\quad - (u^* + \Phi^T w^*)^T (j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1) (u^* + \Phi^T w^*) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f + h_1^T h_1 - 2\mu_1 u^{*T} \Phi_1 u^* + w^{*T} \Lambda w^* \\ &\quad - (u^* + \Phi^T w^*)^T (j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1) (u^* + \Phi^T w^*) \end{aligned} \quad (57)$$

となる。式(31)に左から  $\Xi_1 + \frac{1}{2\mu_1} \Psi_1$  をかけて整理すると

$$u^* + \Phi^T w^* = -\frac{1}{2} (\Xi_1 + \frac{1}{2\mu_1} \Psi_1) g_2^T \frac{\partial V^T}{\partial x} - (\Xi_1 + \frac{1}{2\mu_1} \Psi_1) j_{12}^T h_1 \quad (58)$$

が得られるので

$$\begin{aligned} &(u^{*T} + \Phi^T w^*)^T (j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1 \Psi_1) (u^{*T} + \Phi^T w^*) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} g_2 (\Xi_1 + \frac{1}{2\mu_1} \Psi_1) g_2^T \frac{\partial V^T}{\partial x} + h_1^T U_1 (U_1^T U_1)^{-1} U_1^T h_1 + \frac{\partial V}{\partial x} g_2 \Xi_1 j_{12}^T h_1 \end{aligned} \quad (59)$$

となる。また

$$\begin{aligned} w^{*T} \Lambda w^* &= \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} (g_1 - g_2 \Phi^T) \Lambda^{-1} (g_1^T - \Phi g_2^T) \frac{\partial V}{\partial x} + h_1^T (j_{11} - j_{12} \Phi^T) \Lambda^{-1} (j_{11}^T - \Phi j_{12}^T) h_1 \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial x} (g_1 - g_2 \Phi^T) \Lambda^{-1} (j_{11}^T - \Phi j_{12}^T) h_1 \end{aligned} \quad (60)$$

$$u^{*T} \Psi_1 u^* = \frac{1}{16\mu_1^2} \frac{\partial V}{\partial x} g_2 \Psi_1 g_2^T \frac{\partial V}{\partial x} \quad (61)$$

である。ゆえに、 $H^*(x, \partial V / \partial x)$  は

$$H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) = \frac{\partial V}{\partial x} f^* + h_1^T Q h_1 + \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} R \frac{\partial V}{\partial x} \quad (62)$$

と計算でき、 $f^*, Q, R$  はそれぞれ

$$f^* = f - g_2 \Xi_1 j_{12}^T h_1 + (g_1 - g_2 \Phi^T) \Lambda^{-1} (j_{11}^T - \Phi j_{12}^T) h_1 \quad (63)$$

$$Q = I - U_1 (U_1^T U_1)^{-1} U_1^T + (j_{11} - j_{12} \Phi^T) \Lambda^{-1} (j_{11}^T - \Phi j_{12}^T) \quad (64)$$

$$R = (g_1 - g_2 \Phi^T) \Lambda^{-1} (g_1^T - \Phi g_2^T) - g_2 (\Xi_1 + \frac{1}{\mu_1} \Psi_1) g_2^T \quad (65)$$

となる。

次に、閉ループ系の漸近安定性を考える。 $w = 0$  のとき、式 (17) より

$$\dot{V}(x) \leq -z^T z \quad (66)$$

となるが、 $z = 0$  において  $\dot{V}(x) = 0$  となってしまうことから、このままでは閉ループ系が漸近安定であるとはいえない。そこで、次の仮定がなりたつものとする。

仮定 3 (ゼロ状態可検出性)  $w = 0$  において、ある  $x$  の軌道にそって

$$z = h_1(x) + j_{12}(x)u = 0 \quad (67)$$

となるときに

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0 \quad (68)$$

がなりたつ。■

この仮定がなりたつとき、 $\dot{V}(x) = 0$ を満たす多様体上において  $x \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$  となることから、 $V(x)$  がリアプノフ関数となり、閉ループ系が漸近安定であることがわかる。

以上をまとめると、状態フィードバックによる非線形非標準  $H_\infty$  制御問題にかんする次の定理が得られる。

**定理 2** 式 (12) であらわされる非線形系と式 (13) であらわされる評価出力において、仮定 1、仮定 2、仮定 3 がなりたつとする。このとき、もし式 (16) を満たすような、式 (62) であらわされる Hamilton-Jacobi-Isaacs 不等式の解  $V(x) \in C^1$  が存在するならば、式 (42) であらわされる制御則によって、外乱  $w$  から評価出力  $z$  までの  $L_2$  ゲインを  $\gamma$  以下とすることができる。また  $w = 0$  のとき、この制御則によって閉ループ系は漸近安定となる。■

## 2.3 出力フィードバックによる非線形非標準 $H_\infty$ 制御問題

### 2.3.1 状態観測器のゲインが与えられている場合の可解条件

2.2節と同じく式 (12) の非線形系と式 (13) の評価出力を考える。ただし、本節では状態  $x$  が直接観測できないものとする。そこで、システムの入力から状態を推測する状態観測器を構成し、推定した状態を用いて  $H_\infty$  制御問題を満たすような制御則を構成する。なお、本節においては、問題をより簡単にするために、式 (13) の評価出力における  $w$  の直達項が  $j_{11}(x) = 0$  であるとする。

システムの観測出力として、次式であらわされるもの考える。

$$y = h_2(x) + j_{21}(x)w + j_{22}(x)u \quad (69)$$

ただし、 $y \in R^r$  とし、平衡点  $x = 0$  において、 $h_2(0) = 0$  がなりたつものとする。

また、観測出力  $y$  を用いてシステムの状態を推定する、次の状態観測器を考える。

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= f(\xi) + g_1(\xi)k_1(\xi) + g_2(\xi)k_2(\xi) \\ &+ G(\xi)(y - h_2(\xi) - j_{21}(\xi)k_1(\xi) - j_{22}(\xi)k_2(\xi)) \end{aligned} \quad (70)$$

上式において、 $\xi \in R^n$  は推定された状態で

$$k_1(x) = w^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) \quad (71)$$

$$k_2(x) = u^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) \quad (72)$$

である。また、 $G(\xi)$  は観測器のゲインである。

制御則には、推定した状態により構成された

$$u = k_2(\xi) \quad (73)$$

を用いるが、推定した状態を用いていることから、定理 2 を満たすような  $V(x)$  が存在したとしても、出力フィードバックによる  $H_\infty$  制御問題が可解であるとはいえない。そこで、可解条件を見つけるために、次のような  $x$  と  $\xi$  にかんする拡大系を考える。

$$\dot{x}_E = f_E(x_E) + g_E(x_E)r \quad (74)$$

$$v = h_E(x_E) \quad (75)$$

ただし

$$x_E = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$f_E(x_E) = \begin{bmatrix} f_{E1}(x_E) \\ f_{E2}(x_E) \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$g_E(x_E) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ G(\xi)j_{21}(x) \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$h_E(x_E) = k_2(\xi) - k_2(x) \quad (79)$$

$$r = w - k_1(x) \quad (80)$$

$$f_{E1}(x_E) = \tilde{f}(x) + g_2(x)k_2(\xi) \quad (81)$$

$$f_{E2}(x_E) = \tilde{f}(\xi) + g_2(\xi)k_2(\xi) + G(\xi)(\tilde{h}_2(x) - \tilde{h}_2(\xi) + \tilde{k}_2(x) - \tilde{k}_2(\xi)) \quad (82)$$

$$\tilde{f}(x) = f(x) + g_1(x)k_1(x) \quad (83)$$

$$\tilde{h}_2(x) = h_2(x) + j_{21}(x)k_1(x) \quad (84)$$

$$\tilde{k}_2(x) = j_{22}(x)k_2(x) \quad (85)$$



である。式(74)(75)において、 $r$ から $j_{12}v$ までの $L_2$ ゲインが $\gamma$ 以下となるためには、式(17)と同じく

$$\dot{W}(x_E) - \gamma^2 r^T r + v^T j_{12}^T j_{12} v \leq 0 \quad (86)$$

$$W(x_E) \geq 0, W(0) = 0 \quad (87)$$

を満たすような $W(x_E) \in C^1$ が存在することである。2.2節と同様にして計算することにより、すべての $r$ にたいして $r$ から $j_{12}v$ までの $L_2$ ゲインを $\gamma$ 以下とするための十分条件は、式(87)と次のHamilton-Jacobi 偏微分不等式

$$\frac{\partial W}{\partial x_E} f_E(x_E) + h_E^T(x_E) R_2(x) h_E(x_E) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial W}{\partial x_E} g_E(x_E) g_E^T(x_E) \frac{\partial W}{\partial x_E} \leq 0 \quad (88)$$

を満たすような $W(x_E)$ が存在することであることがわかる。そこで、式(87)と次のHamilton-Jacobi 偏微分不等式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W}{\partial x_E} f_E(x_E) + h_E^T(x_E) (j_{12}^T(x) j_{12}(x) + 2\mu'_1 \Psi_1(x)) h_E(x_E) \\ & + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial W}{\partial x_E} g_E(x_E) g_E^T(x_E) \frac{\partial W}{\partial x_E} \leq 0 \end{aligned} \quad (89)$$

$$W(x_E) \geq 0, W(0) = 0 \quad (90)$$

を満たすような $W(x_E)$ が存在すれば

$$\begin{aligned} \dot{W}(x_E) & \leq \gamma (w - k_1(x))^T (w - k_1(x)) \\ & - (k_2(\xi) - k_2(x))^T (j_{12}^T j_{12} + 2\mu'_1 \Psi_1(x)) (k_2(\xi) - k_2(x)) \end{aligned} \quad (91)$$

がなりたつ。ここで、 $\mu'_1(x)$ は

$$\mu'_1(x) > \mu_1(x) > 0$$

を満たしているものとする。

また、式(62)に $2\mu_1 k_2^T(x) \Psi_1(x) k_2(x) > 0$ を加えた

$$\begin{aligned} & H^{**}(x, \frac{\partial V}{\partial x}) + 2\mu_1 k_2^T(x) \Psi_1(x) k_2(x) \\ & = \frac{\partial V}{\partial x} (f - g_2 \Xi_1 j_{12}^T h_1) + h_1^T (I - j_{12} \Xi_1 j_{12}^T) h_1 \\ & + \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\gamma^2} g_1 g_1^T - g_2 \left( \Xi_1 + \frac{1}{2\mu_1} \Psi_1 \right) \right\} \frac{\partial V}{\partial x} \leq 0 \end{aligned} \quad (92)$$

がなりたつとする。このとき、式(48)を用いることによって

$$\begin{aligned}
& H'(x, \frac{\partial V}{\partial x}, w, u) \\
&= \dot{V} + z^T z - \gamma^2 w^T w + 2\mu_1 u^T \Psi_1(x) u - 2\mu_1 c_1^T(x) \Psi_1(x) c_1(x) \\
&= H'^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) \Big|_{c_1=u^*} - \gamma^2 (w - k_1(x))^T (w - k_1(x)) \\
&\quad + (k_2(\xi) - k_2(x))^T (j_{12}^T(x) j_{12}(x) + 2\mu_1 \Psi_1(x)) (k_2(\xi) - k_2(x)) \\
&\quad + 2\mu_1 k_2^T(x) \Psi_1(x) k_2(x) - 2\mu_1 k_2^T(x) \Psi_1(x) k_2(x) \\
&\leq -\gamma^2 (w - k_1(x))^T (w - k_1(x)) \\
&\quad + (k_2(\xi) - k_2(x))^T (j_{12}^T(x) j_{12}(x) + 2\mu_1 \Psi_1(x)) (k_2(\xi) - k_2(x)) \\
&\quad - 2\mu_1 k_2^T(x) \Psi_1(x) k_2(x) \tag{93}
\end{aligned}$$

となる。よって、新たな関数

$$U(x_E) = V(x) + W(x_E) \tag{94}$$

を定義すると、

$$\begin{aligned}
\dot{U}(x_E) &= \dot{V}(x) + \dot{W}(x_E) \\
&\leq \gamma^2 w^T w - z^T z - 2(\mu_1'(x) - \mu_1(x))(k_2(\xi) - k_2(x))^T \Psi_1(x) (k_2(\xi) - k_2(x)) \\
&\quad - 2\mu_1(x) u^T \Psi_1(x) u \\
&\leq \gamma^2 w^T w - z^T z - 2(\mu_1'(x) - \mu_1(x))(k_2(\xi) - k_2(x))^T \Psi_1(x) (k_2(\xi) - k_2(x)) \\
&\leq \gamma^2 w^T w - z^T z \tag{95}
\end{aligned}$$

となることから、もし  $U(x_E)$  が存在すれば、式(73)であらわされる推定した状態  $\xi$  を用いた制御則によって、すべての  $w$  から  $z$  までの  $L_2$  ゲインを  $\gamma$  以下とすることができる。

次に、式(73)によって構成される閉ループ系の漸近安定性について考える。 $w = 0$  のとき、式(95)より

$$\dot{U}(x_E) \leq -z^T z - 2(\mu_1'(x) - \mu_1(x))(k_2(\xi) - k_2(x))^T \Psi_1(x) (k_2(\xi) - k_2(x)) \leq 0 \tag{96}$$

となる。 $\dot{U} = 0$ となるのは、 $z = 0$ かつ  $(k_2(\xi) - k_2(x))\Psi_1(x)(k_2(\xi) - k_2(x))$  のときであるが、 $z = 0$ のときは仮定3より  $t \rightarrow \infty$ で  $x \rightarrow 0$ となることから、 $\dot{U} = 0$ の軌道上では  $t \rightarrow \infty$ のとき

$$j_{12}(x)k_2(\xi) \rightarrow 0 \quad (97)$$

$$k_2(\xi)\Psi_1(x)k_2(\xi) \rightarrow 0 \quad (98)$$

となる。この2つの式より

$$k_2^T(\xi)(j_{12}^T(x)j_{12}(x) - 2(\mu_1'(x) - \mu_1(x))\Psi_1(x))k_2(\xi) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (99)$$

が得られるが

$$j_{12}^T(x)j_{12}(x) + 2(\mu_1'(x) - \mu_1(x))\Psi_1(x) > 0 \quad (100)$$

であることから

$$k_2(\xi) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (101)$$

となる。よって、式(70)の状態観測器は  $t \rightarrow \infty$ において

$$\dot{\xi} = \bar{f}(\xi) - G(\xi)\bar{h}_2(\xi) \quad (102)$$

に漸近する。ここで、状態観測器のゲイン  $G(x)$  が与えられているときには、上式であらわされる状態観測器が  $\xi = 0$ において漸近安定ならば、 $w = 0$ のとき式(74)の拡大系は漸近安定となる。

以上をまとめると、状態観測器のゲインが与えられている場合の、非線形非標準  $H_\infty$  制御問題にかんする次の定理が得られる。

**定理3** 式(12)の非線形系と式(13)の評価出力および式(69)の観測出力をもつシステムにおいて、仮定1、仮定2、仮定3がなりたつとする。このとき、もし式(92),(16)を満たす  $V(x) \in C^1$  と、式(89),(87)を満たす  $W(x_E) \in C^1$  が存在し、かつ式(102)が  $\xi = 0$ において漸近安定となるならば、式(70)の状態観測器によって推測される状態を用いた式(73)の制御則によって、 $w$  から  $z$  までの  $L_2$  ゲインは  $\gamma$  以下となり、 $w = 0$ のとき  $[x^T, \xi^T]^T = [0, 0]^T$ において漸近安定となる。■

### 2.3.2 状態観測器のゲインが与えられていない場合の可解条件

本節では、問題の可解条件にくわえて、状態観測器のゲイン  $G(x)$  も決定する方法について述べる。本節においても、問題を簡単にするために、式(13)の評価出力における  $w$  の直達項が  $j_{11}(x) = 0$  であるとする。

$G(x)$  として、式(89)の左辺を最小にするようなものを求めることとする。式(89)から直接このような  $G(x)$  を計算することができないので、まずは  $2n$  空間次元上の偏微分不等式である式(89)を、 $n$  次元にすることを考える。式(89)の  $W(x_E)$  を

$$W(x_E) = Q(e) \quad (103)$$

$$Q(e) \geq 0 \quad Q(0) = 0 \quad (104)$$

$$e = x - \xi \quad (105)$$

に限定することにより、式(89)は

$$\begin{aligned} K(e, \xi) = & \frac{\partial Q}{\partial e} \{ \tilde{f}(x) - \tilde{f}(\xi) + (g_2(x) - g_2(\xi))k_2(\xi) \\ & - G(\xi)(\tilde{h}_2(x) - \tilde{h}_2(\xi) + \tilde{k}_2(x) - \tilde{k}_2(\xi)) \} \\ & + (k_2(x) - k_2(\xi))^T (j_{12}^T(x)j_{12}(x) + 2\mu'_1(x)\Psi_1(x))(k_2(x) - k_2(\xi)) \\ & + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial Q}{\partial e} (g_1(x) - G(\xi)j_{21}(x))(g_1(x) - G(\xi)j_{21}(x))^T \frac{\partial Q}{\partial e} \\ \leq & 0 \end{aligned} \quad (106)$$

となる。式(104)より

$$\frac{\partial Q}{\partial e}(0) = 0 \quad (107)$$

であることから、 $K(e, \xi)$  は

$$K(0, \xi) = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial e}(0, \xi) = 0 \quad (108)$$

を満たす。また、 $K(e, \xi)$  の  $(0, 0)$  における Hessian 行列は、式(106)を  $e$  にかんして2回偏微分することによって

$$\frac{\partial^2 K}{\partial e^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 Q}{\partial e^2} \left\{ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0) - G(0) \left( \frac{\partial \tilde{h}_2}{\partial x}(0) + \frac{\partial \tilde{k}_2}{\partial x}(0) \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial k_2^T}{\partial x}(0)(j_{12}^T(0)j_{12}(0) + 2\mu_1'(0)\Psi_1(0))\frac{\partial k_2}{\partial x}(0) \\
& + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial e^2}(g_1(0) - G(0)j_{21}(0))(g_1(0) - G(0)j_{21}(0))^T \frac{\partial^2 Q^T}{\partial e^2} \quad (109)
\end{aligned}$$

となる。式(108)より、連続な行列  $R(e, \xi)$  が存在し

$$K(e, \xi) = \frac{1}{2}e^T R(e, \xi)e \quad (110)$$

とあらわすことができるので、 $K(e, \xi)$  の  $(0, 0)$  における Hessian 行列は  $R(0, 0)$  と一致する。よって、もし

$$R(0, 0) < 0 \quad (111)$$

であるならば、式(106)を満たすような  $Q(e)$  は存在する。

ここで、微小な  $\epsilon > 0$  にたいして、 $e = 0$  において

$$\begin{aligned}
S(e) & = \frac{\partial Q}{\partial e} \{ \tilde{f}(e) - G(e)(\tilde{h}_2(e) + \tilde{k}_2(e)) \} \\
& + k_2^T(e)(j_{12}^T(e)j_{12}(e) + 2\mu_1'(e)\Psi_1(e))k_2(e) \\
& + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial Q}{\partial e}(g_1(e) - G(e)j_{21}(e))(g_1(e) - G(e)j_{21}(e))^T \frac{\partial Q^T}{\partial e} \\
& \leq -\epsilon e^T e < 0 \quad (112)
\end{aligned}$$

という  $n$  次元の偏微分方程式と

$$Q(e) > 0, \quad Q(0) = 0 \quad (113)$$

を満たすような  $C^3$  級の  $Q(e)$  が存在するものとする。このとき、上式の  $(0, 0)$  における Hessian 行列は式(109)と一致し、 $R(0, 0) < 0$  となる。

また  $t \rightarrow \infty$  のとき、式(112)は

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial Q}{\partial e}(\tilde{f}(e) - G(e)\tilde{h}_2(e)) \\
& + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial Q}{\partial e}(g_1(e) - G(e)j_{21}(e))(g_1(e) - G(e)j_{21}(e))^T \frac{\partial Q^T}{\partial e} < 0 \quad (114)
\end{aligned}$$

に漸近する。このとき

$$\dot{Q}(\xi) = \left. \frac{\partial Q}{\partial e} \right|_{e=\xi} (\tilde{f}(\xi) - G(\xi)\tilde{h}_2(\xi)) < 0 \quad (115)$$

となり、 $t \rightarrow \infty$ において漸近する式(102)の状態観測器は $Q(e)$ がリアプノフ関数となり、漸近安定であることがわかる。

ここまでの話により、 $2n$ 次元のHamilton-Jacobi-Isaacs不等式を用いた定理3は、式(112)の $n$ 次元のHamilton-Jacobi-Isaacs不等式を用いた次の定理でおきかえられる。

**定理4** 式(12)の非線形系と式(13)の評価出力および式(69)の観測出力をもつシステムにおいて、仮定1、仮定2、仮定3がなりたつとする。このとき、もし式(92),(16)を満たす $V(x) \in C^1$ と、式(112),(113)を満たす $W(x_E) = Q(e) \in C^3$ が存在するならば、式(70)の状態観測器によって推測される状態を用いた式(73)の制御則によって、 $w$ から $z$ までの $L_2$ ゲインは $\gamma$ 以下となり、 $w = 0$ のとき $[x^T, \xi^T]^T = [0, 0]^T$ において漸近安定となる。■

最後に、式(112)を最小にするような状態観測器のゲイン $G(x)$ を決定する。ここで、次の仮定がなりたつとする。

**仮定4** すべての $x$ について、 $j_{21}(x)$ は

$$\text{rank} j_{21}(x) = d, \quad d \leq p \quad (116)$$

を満たし、 $j_{21}(x)$ の列ベクトルが張る空間に大域的な基底が存在する。■

標準問題においては、式(116)のかわりに、より厳しい次の条件がもちいられる。

$$\text{rank} j_{21}(x) = p \quad (117)$$

仮定4がなりたつとき、式(24)と同様に $j_2^T(x)$ にかんして次のような分解をすることができる。

$$j_{21}^T(x) = U_2(x)\Sigma_2(x), \quad \Sigma_2(x) = [\rho_1^T, \dots, \rho_d^T]^T \quad (118)$$

ただし、 $\rho_1, \dots, \rho_d$ は $j_{21}^T(x)$ の行ベクトル空間を張る正規直交基底で、 $U_2(x)$ は列フルランク、 $\Sigma_2(x)$ は行フルランクである。また、式(27)と同様に、式(112)の

両辺に2つの項をくわえ

$$S'(e) = S(e) + \frac{1}{2\gamma^2} \mu_2(e) \frac{\partial Q}{\partial e} G(e) \Psi_2(e) G^T(e) \frac{\partial Q}{\partial e} - \frac{1}{2\gamma^2} \mu_2(e) c_2^T(e) \Psi_2(e) c_2(e) \quad (119)$$

とする。ここで

$$\Psi_2(e) = I - \Sigma_2^T(e) \Sigma_2(e) \quad (120)$$

$$\mu_2(e) > 0 \quad (121)$$

である。このとき、 $S'(e)$ は

$$S'(e) = \frac{\partial Q}{\partial e} \tilde{f} + k_2^T (j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1' \Psi_1) k_2 + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial Q}{\partial e} g_1 g_1^T \frac{\partial Q}{\partial e} - \frac{1}{2\gamma^2} \mu_2 c_2^T c_2 + \frac{1}{4\gamma^2} \left\{ \lambda - (\Xi_2 + \frac{1}{2\mu_2} \Psi_2) B \right\} (j_{21}^T j_{21} + 2\mu_2 \Psi_2) \left\{ \lambda - (\Xi_2 + \frac{1}{2\mu_2} \Psi_2) B \right\} - \frac{1}{4\gamma^2} B^T (\Xi_2 + \frac{1}{2\mu_2} \Psi_2) B \quad (122)$$

と平方完成できる。ただし

$$\lambda(e) = G^T(e) \frac{\partial Q}{\partial e} \quad (123)$$

$$B(e) = 2\gamma^2 (\tilde{h}_2(e) + \tilde{k}_2(e)) + j_{21}(e) g_1^T(e) \frac{\partial Q}{\partial e} \quad (124)$$

$$\Xi_2(e) = \Sigma_2^T(e) (U_2^T(e) U_2(e))^{-1} \Sigma_2(e) \quad (125)$$

である。式(122)より

$$\lambda = (\Xi_2 + \frac{1}{2\mu_2}) B \quad (126)$$

を満たすように  $G(e)$  をえらべば、 $S'(e)$  を最小にできることがわかる。このとき、 $S'(e)$  は式(119)に

$$c_2 = (\Xi_2 + \frac{1}{2\mu_2} \Psi_2) B \quad (127)$$

を代入することによって式(112)の  $S(e)$  と一致して

$$\frac{\partial Q}{\partial e} \{ \tilde{f} - g_1 j_{21}^T \Xi_2 (\tilde{h}_2 + \tilde{k}_2) \} + k_2^T (j_{12}^T j_{12} + 2\mu_1' \Psi_1) k_2$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma^2(\tilde{h}_2 + \tilde{k}_2)^T(\Xi_2 + \frac{1}{\mu_2}\Psi_2)(\tilde{h}_2 + \tilde{k}_2) \\
& + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial Q}{\partial e} g_1(I - j_{21}^T \Xi_2 j_{21}) g_1^T \frac{\partial Q}{\partial e} \leq -\epsilon e^T e < 0
\end{aligned} \tag{128}$$

となる。また、式(126)より

$$(\tilde{h}_2(e) + \tilde{k}_2(e))^T = \frac{\partial Q}{\partial e} L(e) \tag{129}$$

を満たすような  $L(e)$  が存在すれば、式(128)を最小とするような  $G(e)$  は

$$G(e) = (g_1(e)j_{21}^T(e) + 2\gamma^2 L(e))(\Xi_2(e) + \frac{1}{2\mu_2}\Psi_2(e)) \tag{130}$$

となる。ここで

$$\frac{\partial Q}{\partial e}(0) = 0, \tilde{h}_2(0) = 0, \tilde{k}_2(0) = 0 \tag{131}$$

であることから、 $\frac{\partial Q}{\partial e}, (\tilde{h}_2(e) + \tilde{k}_2(e))^T$  は、 $e$  の関数  $M(e), N(e)$  を用いてそれぞれ

$$\frac{\partial Q}{\partial e}(e) = e^T M(e) \tag{132}$$

$$(\tilde{h}_2(e) + \tilde{k}_2(e))^T = e^T N(e) \tag{133}$$

とあらわすことができる。よって、 $M(e)$  が原点近傍において正則ならば、 $L(e)$  は

$$L(e) = M^{-1}(e)N(e) \tag{134}$$

と求めることができ、式(128)を最小とする  $G(e)$  は

$$G(e) = (2\gamma^2 M^{-1}(e)N(e) + g_1(e)j_{21}^T(e))(\Xi_2(e) + \frac{1}{2\mu_2}\Psi_2(e)) \tag{135}$$

となる。

以上をまとめると、状態観測器のゲインが与えられていない場合の、出力フィードバックによる非線形非標準  $H_\infty$  制御問題にかんする次の定理が得られる。

**定理 5** 式(12)の非線形系と式(13)の評価出力および式(69)の観測出力をもつシステムにおいて、仮定1、仮定2、仮定3、仮定4がなりたつとする。



このとき、もし式 (92),(16) を満たす  $V(x) \in C^1$  と、微小な値  $\epsilon$  にたいして式 (128),(113) を満たす  $Q(e) \in C^3$  が存在し、かつ式 (132) を満たす  $M(e)$  が原点近傍において正則ならば、式 (70) の状態観測器と式 (135) のゲインによって推測される状態を用いた式 (73) の制御則によって、 $w$  から  $z$  までの  $L_2$  ゲインは  $\gamma$  以下となり、 $w = 0$  のとき  $[x^T, \xi^T]^T = [0, 0]^T$  において漸近安定となる。■

### 3. ハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解を用いたノンホロノミックシステムの制御

ノンホロノミックシステムは非線形システムであることから、ノンホロノミックシステムを漸近安定とするような制御則のひとつとして、非線形最適レギュレータを構成することが考えられる。非線形最適レギュレータを構成する際には、Hamilton-Jacobi 方程式の解が必要となるが、ノンホロノミックシステムではこの解が微分不可能となり、 $C^1$  級の解を求める通常の手法を適用することができない。

ここでは、ノンホロノミックシステムのひとつである三輪移動体を取りあげ、非線形最適レギュレータを構成する。この際、Hamilton-Jacobi 方程式の解として、通常の偏微分方程式の解の概念を拡張した、微分不可能点をもつ粘性解を動的計画法により求める手法について提案する。そして、得られた粘性解を用いて最適制御側を計算する方法についても示す。

#### 3.1 ノンホロノミックシステム

次のような一般化座標  $x$  をもつ非線形システム

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (136)$$

が、 $g(x) = 0$  のように位置の項のみを含むような拘束式をもつとき、この拘束はホロノミックであり、システムはホロノミックシステムとよばれる。しかし、拘束式が  $h(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$  のように、位置だけではなく、速度や加速度項を含むような拘束式をもつとき、この拘束はノンホロノミックであるといわれ、システムはノンホロノミックシステムとなる。

ノンホロノミックシステムの閉ループ制御について、Brockett の定理 [14] より「ノンホロノミックシステムを漸近安定とするような、なめらかな時不変状態フィードバック制御則が存在しない」ということが知られている。そこで、この定理を満たさないような制御則として

##### 1. 開ループ制御

## 2. 時変フィードバック

## 3. 不連続フィードバック

が提案されている。

ここでは、ノンホロノミックシステムを制御する方法として非線形最適レギュレータを構成することを考えるが、2.1節において示したように、最適制御則を構成するためには Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解を求める必要がある。しかし、Brockett の定理より、この Hamilton-Jacobi 方程式の解もなめらかな解、すなわち  $C^1$  級の解にはならない。そこで、ほとんどすべての点においてなめらかであるが、微分不可能となる点をもつ解も偏微分方程式の解としてゆるすような、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解について次節で説明する。粘性解を用いた最適制御則は、粘性解の微分不可能点のところで不連続となることから、Brockett の定理を満たさない不連続フィードバックとなる。

### 3.2 ハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解

Hamilton-Jacobi 方程式の粘性解は、次のように定義される。 $R^N$  の有界な開集合  $\Omega$  において定義される Hamilton-Jacobi 方程式

$$H(x, V(x), \frac{\partial V}{\partial x}(x)) = 0 \quad (137)$$

を考える。ただし、 $V$  は  $C^0$  級以上とする。また、 $H$  は

$$H(x, r, p) \leq H(x, s, p) \quad (r \leq s) \quad (138)$$

を満たすものとする。このとき、式 (137) の解  $V(x)$  が粘性劣解であるとは、 $C(\Omega)$  を  $\Omega$  上の連続関数の全体としたときに  $\varphi \in C(\Omega)$  であり、 $V - \varphi$  が  $\bar{x}$  において極大値をとるときに

$$H(\bar{x}, V(\bar{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}(\bar{x})) \leq 0 \quad (139)$$

がなりたつことをいう。 $V(x)$  が粘性優解であるとは、 $V - \varphi$  が  $\bar{x}$  において極小値をとるときに

$$H(\bar{x}, V(\bar{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}(\bar{x})) \geq 0 \quad (140)$$

がなりたつことをいう。そして、粘性劣解でもあり粘性優解でもあるものが、式(137)であらわされる Hamilton-Jacobi 方程式の粘性解である [11]。このように、粘性解はもとの方程式の解の微分可能性を必要としない弱解の概念として知られている。

粘性優解、あるいは粘性劣解は無数に存在するが、粘性解は唯一な大域的最適解である。この解の一意性は、比較定理により証明される [11]。

### 3.3 三輪移動体

#### 3.3.1 三輪移動体のモデル

本節では、図 1 に示すような三輪移動体を考える。このような三輪移動体のモデル式は、次のようになる。

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta \quad (141)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta \quad (142)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{L} \dot{r} \tan \alpha \quad (143)$$

ここで、 $x, y$  は三輪移動体の位置、 $\theta$  は姿勢角、 $L$  は前輪から後輪までの長さ、 $\dot{r}$  は速度、 $\alpha$  はハンドルの切り角である。状態  $\phi$  を

$$\phi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (144)$$

入力  $u$  を

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{r} \tan \alpha \end{bmatrix} \quad (145)$$

とおくことにより、次のような三輪移動体の状態方程式をえることができる。

$$\dot{\phi} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad (146)$$

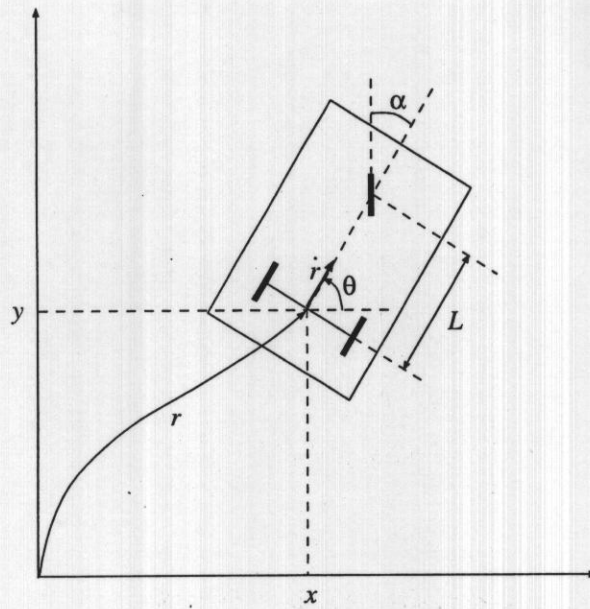


図 1 Wheeled vehicle

このシステムは

$$\dot{y} - \dot{x} \tan \theta = 0 \quad (147)$$

という拘束式をもつことから、ノンホロノミックシステムである。

式(146)であらわされる三輪移動体は、座標変換

$$\xi_1 = x$$

$$\xi_2 = \tan \theta$$

$$\xi_3 = y$$

および入力変換

$$v_1 = \cos \theta u_1$$

$$v_2 = \frac{u_2}{\cos^2 \theta}$$

により

$$\dot{\xi}_1 = v_1 \quad (148)$$

$$\dot{\xi}_2 = v_2 \quad (149)$$

$$\dot{\xi}_3 = \xi_2 v_1 \quad (150)$$

のような、チェインド・フォームとよばれる正準系に変換できる。しかしこの系であらわされるのは、式(146)であらわされる元の系における

$$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

の領域にかぎられている。よって、チェインド・フォームにたいして構成された制御則では、初期値が  $\theta \in \{[-\pi, -\pi/2] \cap [\pi/2, \pi]\}$  の場合、すなわち漸近安定とするには軌道が切りかわることが必要な領域に初期値があるような場合が、系を構成した際に除かれてしまう。

### 3.3.2 三輪移動体にたいする最適レギュレータの構成

式(146)にたいして、2.1節のように非線形最適レギュレータを構成する。

ここでは、次の評価関数を最小とすることを考える。

$$J = \int_0^{\infty} (\phi^T \phi + u^T u) dt \quad (151)$$

このとき、式(146)の三輪移動体の状態方程式と式(10)より、次の Hamilton-Jacobi 偏微分方程式

$$\begin{aligned} H(\phi, \frac{\partial V}{\partial \phi}) &= -\frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta \sin \theta + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{L^2} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 \right\} + x^2 + y^2 + \theta^2 = 0 \end{aligned} \quad (152)$$

の解  $V(\phi) (> 0, V(0) = 0)$  が存在すれば、式(153)より最適制御則は

$$u_1^* = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta \right) \quad (153)$$

$$u_2^* = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (154)$$

と計算できる。

### 3.4 ハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解の計算法

本節では、Hamilton-Jacobi 方程式の粘性解を求める手法をより具体的に示すために、3.3節において扱った三輪移動体に最適レギュレータを構成する際に必要となる Hamilton-Jacobi 方程式の粘性解を求める手法について述べる。

#### 3.4.1 動的計画法を用いた計算法

まず、式(151)の評価関数を時間間隔  $\Delta T$  で離散化し、次の  $J_d$  をえる。

$$J_d = \sum_{k=0}^{\infty} \{ \phi^T(k+1)\phi(k+1) + u^T(k)u(k) \} \Delta T \quad (155)$$

式(152)の粘性解は、式(151)の評価関数の最小値に等しいことから、あるステップ  $k = k_1 (k_1 \geq 0)$  における  $V$  の値は、動的計画法を用いることによって

$$\begin{aligned} & V_d(\phi(k_1)) \\ &= \min_u \left\{ \sum_{k=k_1}^{k_2} (\phi^T(k+1)\phi(k+1) + u^T(k)u(k)) \Delta T \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=k_2+1}^{\infty} (\phi^T(k+1)\phi(k+1) + u^T(k)u(k)) \Delta T \right\} \\ &= \min_u \left\{ V_d(\phi(k_2+1)) + \sum_{k=k_1}^{k_2} (\phi^T(k+1)\phi(k+1) + u^T(k)u(k)) \Delta T \right\} \quad (156) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $V_d(\phi)$  は  $V(\phi)$  の離散化した値であり、 $k_2 > k_1$  とする。つまり、上式の右辺を最小とするような  $u(k)$  を見つけ、逆時間に解くことによって、式(152)の粘性解  $V(\phi)$  が計算できる。なお、本節では  $k_1 = k_2 = k$  として話をすすめる。すなわち、式(156)は

$$V_d(\phi(k)) = \min_u \{ V_d(\phi(k+1)) + (\phi^T(k+1)\phi(k+1) + u^T(k)u(k)) \Delta T \} \quad (157)$$

となる。

最初に、粘性解  $V_d$  を求める範囲を決定し、その範囲内に格子を構成する。 $V_d$  を求める範囲は

$$x \in [x_{\min}, x_{\max}] \quad (158)$$

$$y \in [y_{\min}, y_{\max}] \quad (159)$$

$$\theta \in [-\pi, \pi] \quad (160)$$

とする。ただし、この範囲は原点と原点に可到達な領域を含むものとする。なお、 $\theta$ の範囲は式(160)の範囲ですべての範囲があらわされることから、このように決定した。そして、この解を求める範囲内をそれぞれ $\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$ 分割し、 $x, y, \theta$ の格子間隔を

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\eta_x} \quad (161)$$

$$\Delta y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\eta_y} \quad (162)$$

$$\Delta \theta = \frac{2\pi}{\eta_\theta} \quad (163)$$

として、格子点 $(x_l, y_m, \theta_n)$ を次のように構成する。

$$x_l = x_{\min} + \Delta x \cdot l, \quad l = 0, \dots, \eta_x \quad (164)$$

$$y_m = y_{\min} + \Delta y \cdot m, \quad m = 0, \dots, \eta_y \quad (165)$$

$$\theta_n = -\pi + \Delta \theta \cdot n, \quad n = 0, \dots, \eta_\theta \quad (166)$$

格子上の一点 $(x_l, y_m, \theta_n)$ において、式(158)(159)(160)の範囲内で式(157)の右辺を最小値を求めるには、入力 $u(k)$ によって計算できる状態 $\phi(k+1)$ を求める必要がある。入力が時間 $\Delta T$ の間 $u(k)$ という一定値であるとする、 $\Delta T$ 後の状態は $\dot{\theta} \neq 0$ のとき

$$x(k+1) = x(k) + \frac{u_1(k)}{u_2(k)} L \left\{ \sin\left(\frac{1}{L} u_2(k) \Delta T + \theta(k)\right) - \sin \theta(k) \right\} \quad (167)$$

$$y(k+1) = y(k) - \frac{u_1(k)}{u_2(k)} L \left\{ \cos\left(\frac{1}{L} u_2(k) \Delta T + \theta(k)\right) - \cos \theta(k) \right\} \quad (168)$$

$$\theta(k+1) = \theta(k) + \frac{1}{L} u_2(k) \Delta T \quad (169)$$

と、近似を用いることなく、積分して厳密に計算できる。 $\dot{\theta} = 0$ の場合も同様に

$$x(k+1) = x(k) + u_1(k) \cos \theta(k) \Delta T \quad (170)$$

$$y(k+1) = y(k) + u_1(k) \sin \theta(k) \Delta T \quad (171)$$

$$\theta(k+1) = \theta(k) \quad (172)$$



と、積分して厳密に計算できる。

状態の範囲が式(158)(159)(160)のように限定されていることから、入力範囲も三輪移動体がこの範囲内を移動するように限定することができる。よって、入力範囲を決定し、入力をその範囲内で変化させることで、式(157)の右辺を最小にするような入力を見つける。 $\dot{\theta} \neq 0$ における入力  $u_2$  の範囲は、式(169)より

$$u_{2\min} = \frac{L(-\pi - \theta(k))}{\Delta T} \quad (173)$$

$$u_{2\max} = \frac{L(\pi - \theta(k))}{\Delta T} \quad (174)$$

$$u_2 \in [u_{2\min}, u_{2\max}] \quad (175)$$

となる。なお、 $u_{2\min} > u_{2\max}$  のときは、式(173)と式(174)をいれかえる。次に入力  $u_1$  の範囲を決定するが、 $u_1$  は  $u_2$  に依存していることから、 $u_2$  の値において  $u_1$  の範囲は変化する。そこで、式(175)の範囲を  $\lambda_2$  分割して

$$u_{2j} = u_{2\min} + \frac{u_{2\max} - u_{2\min}}{\lambda_2} j, \quad j = 0, \dots, \lambda_2 \quad (176)$$

とし、それぞれの  $u_2 = u_{2j}$  にたいして  $u_1$  の範囲を計算する。 $u_1$  の範囲は、式(167)(168)と式(158)(159)の  $x$  および  $y$  の範囲から決定できる。 $\sin \theta(k+1) - \sin \theta(k) \neq 0$  のとき、式(167)を  $u_1(k)$  について解いて  $u_2(k)$  に  $u_{2j}$  を代入した

$$u_1(k) = \frac{u_{2j}(x(k+1) - x(k))}{L\{\sin(u_{2j}\Delta T/L + \theta(k)) - \sin \theta(k)\}} \quad (177)$$

の  $x(k+1)$  に  $x_{\min}, x_{\max}$  を代入したものをそれぞれ  $u_{1\lim 1}, u_{1\lim 2}$ 、 $\cos \theta(k+1) - \cos \theta(k) \neq 0$  のとき、式(168)を  $u_1(k)$  について解いて  $u_2(k)$  に  $u_{2j}$  を代入した

$$u_1(k) = -\frac{u_{2j}(y(k+1) - y(k))}{L\{\cos(u_{2j}\Delta T/L + \theta(k)) - \cos \theta(k)\}} \quad (178)$$

の  $y(k+1)$  に  $y_{\min}, y_{\max}$  を代入したものをそれぞれ  $u_{1\lim 3}, u_{1\lim 4}$  とする。 $u_{1\lim 1}, u_{1\lim 2}$  はそれぞれ  $x$  の端点である  $x_{\min}, x_{\max}$  に到達するのに必要な入力であり、 $u_{1\lim 3}, u_{1\lim 4}$  はそれぞれ  $y$  の端点である  $y_{\min}, y_{\max}$  に到達するのに必要な入力である。 $u_{1\lim 1}, u_{1\lim 2}, u_{1\lim 3}, u_{1\lim 4}$  のうち、最大と最小の値をとるものは、式(158)(159)であらわされる範囲の外への入力となることから、それ以外の2つの

うち値の小さいものを  $u_{1\min}$ 、大きいものを  $u_{1\max}$  とすることで、 $u_2 = u_{2j}$  における入力  $u_1$  の範囲は

$$u_1 \in [u_{1\min}, u_{1\max}] \quad (179)$$

と決定できる。なお、 $\sin \theta(k+1) - \sin \theta(k) = 0$  のときには  $u_{1\lim 1}, u_{1\lim 2}$  のうち、値の小さいものを  $u_{1\min}$ 、大きいものを  $u_{1\max}$  とし、 $\cos \theta(k+1) - \cos \theta(k) = 0$  のときには  $u_{1\lim 3}, u_{1\lim 4}$  のうち、値の小さいものを  $u_{1\min}$ 、大きいものを  $u_{1\max}$  とする。また、 $u_{2j} = 0$  のときには、式(177)のかわりに式(170)を  $u_1(k)$  について解いた

$$u_1(k) = \frac{x(k+1) - x(k)}{\cos \theta(k)} \quad (180)$$

を、式(178)のかわりに式(171)を  $u_1(k)$  について解いた

$$u_1(k) = \frac{y(k+1) - y(k)}{\sin \theta(k)} \quad (181)$$

を用いて同様の手順をおこなう。あとは、この範囲を  $\lambda_1$  分割して

$$u_{1i} = u_{1\min} + \frac{u_{1\max} - u_{1\min}}{\lambda_1} i, \quad i = 0, \dots, \lambda_1 \quad (182)$$

とし、 $(u_1, u_2) = (u_{1i}, u_{2j})$  とすることで、式(157)の右辺

$$V_d(\phi(k+1)) + (\phi^2(k+1) + u^2(k))\Delta T \quad (183)$$

が計算できる。つまり、それぞれの  $u_{2j}$  にたいして  $u_1$  の範囲を計算し、 $u_1 = u_{1i}$  における式(183)を計算するという手順を  $j = 0, \dots, \lambda_2$  および  $i = 0, \dots, \lambda_1$  にかんしてくりかえし、式(183)を最小とする  $(u_1, u_2) = (u_{1i}^*, u_{2j}^*)$  の値を求める。

より精度の高い解を求めるために、式(179)の  $u_{1\min}, u_{1\max}$  を

$$u_{1\min} = u_{1i}^* - \frac{u_{1\max} - u_{1\min}}{\lambda_1} \quad (184)$$

$$u_{1\max} = u_{1i}^* + \frac{u_{1\max} - u_{1\min}}{\lambda_1} \quad (185)$$

とおきかえ、この範囲内を  $\lambda_1$  分割して式(183)を計算し、最小値を点  $(x_l, y_m, \theta_n)$  における  $V_d(\phi(k))$  として記憶する。これを何回かくりかえすことによって、解の精度をさらに高めることができる。

以上の手順を、式(158)(159)(160)の範囲内のすべての格子点 $(x_l, y_m, \theta_n)$ においておこなう。そして $V_d(\phi(k))$ と $V_d(\phi(k+1))$ との差が十分に小さくなるまで以上の手順をくりかえし、この差が求める精度よりも小さくなったならば、 $V_d(\phi(k))$ を式(152)の粘性解として計算を終了する。

これをまとめると、動的計画法を用いた粘性解の計算法は、次のような手順となる。

**Step 1** 粘性解を求めたい $(x, y, \theta)$ の範囲を、式(158)(159)(160)のように原点と原点に可到達な領域を含むように決定する。そしてこの $(x, y, \theta)$ の範囲をそれぞれ $\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$ 分割し、式(164)(165)(166)のように格子を構成する。

**Step 2** 格子上の一点 $(x_l, y_m, \theta_n)$ における入力 $u_2$ の範囲を、式(173)(174)(175)のように計算する。そして、 $u_2$ を式(176)の $u_{2j}$ として、 $u_1$ の範囲を式(177)(178)( $u_{2j} = 0$ のときには式(180)(181))を用いて求める。

**Step 3**  $u_1$ を式(182)として式(183)を計算する。これを $i = 0, \dots, \lambda_1$ にかんしてくりかえす。

**Step 4** Step 2, Step 3を $j = 0, \dots, \lambda_2$ にかんしてくりかえし、式(183)を最小とする $u_1, u_2$ をそれぞれ $u_{1i}^*, u_{2j}^*$ とする。

**Step 5**  $u_2 = u_{2j}^*$ として、 $u_{1\min}, u_{1\max}$ をそれぞれ式(184)(185)でおきかえて、Step 3をおこなう。そして式(183)の最小値を、 $(x_l, y_m, \theta_n)$ における $V_d(\phi(k))$ として記憶する。

**Step 5'** Step 5を数回くりかえす。これによって、解の精度をさらにあげることができる(このStepは、かならずしもおこなう必要はない)。

**Step 6** Step 2 ~ Step 5'を、Step 1で決定した、解を求める範囲内のすべての格子上の点においておこなう。

**Step 7**  $V_d(\phi(k))$ と $V_d(\phi(k+1))$ との間の差が十分に小さくなったならば終了する。そうでなければ、Step 2にもどる。

### 3.4.2 ランダム探索を用いた動的計画法による計算法

前節において用いた動的計画法では、式(183)の最小値を探索する際に、格子上の一点から、粘性解を求めるすべての範囲を探索していることから、得られた解の精度は高いが、計算にかかる時間もたいへんに長くなる。そこで、本節ではこれをより短くする手法を考える。

本節では式(157)ではなく、一般的な動的計画法の式である、式(156)を考える。ただし

$$k_2 = k_1 + k_n - 1 \quad (186)$$

とし、 $k_n$ は自然数とする。

まず最初に、前節と同様に粘性解を求める範囲を、式(158)(159)(160)のように決定する。この範囲は、原点と原点に可到達な領域を含む必要がある。そして、この範囲を $x, y, \theta$ にかんしてそれぞれ $\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$ 分割し、式(164)(165)(166)のように格子を構成する。

次に、入力 $u_1, u_2$ の範囲を決定する。ここでは前節のように、格子点におうじてその上限・下限を計算するのではなく、すべての格子点において同じ上限値と下限値を用いるものとする。これを

$$u_1 \in [u_{1 \min}, u_{1 \max}] \quad (187)$$

$$u_2 \in [u_{2 \min}, u_{2 \max}] \quad (188)$$

のように決定する。ただし、 $u_{1 \min}, u_{1 \max}, u_{2 \min}, u_{2 \max}$ は

$$u_{1 \min} < u_{1 \max}$$

$$u_{2 \min} < u_{2 \max}$$

を満たす定数とする。ここで、式(187)(188)で入力の範囲を決定する際には、これらの範囲に離散化時間 $\Delta T$ をかけた値が、時刻 $\Delta T$ 後の状態の計算に使用される入力の上限・下限になるということに注意して設定する必要がある。

以上の準備のもとで、格子点 $(x_l, y_m, \theta_n)$ における $V_d$ の値の計算をおこなう。式(187)の入力の範囲内で、 $k_n$ 個のランダムな値を発生させ、これを

$$u_{1r} = [u_{1r1}, \dots, u_{1rk_n}] \quad (189)$$

とする。同様に、式(188)の範囲内で  $k_n$  個のランダムな値を発生させ、これを

$$u_{2r} = [u_{2r1}, \dots, u_{2rk_n}] \quad (190)$$

とする。なお、最初はあとで用いる

$$u_{1o} = [u_{1o1}, \dots, u_{1ok_n}] \quad (191)$$

の各要素を、すべて0に初期化しておく。同様に

$$u_{2o} = [u_{2o1}, \dots, u_{2ok_n}] \quad (192)$$

の各要素をすべて0とする。そして、 $u_{1r}$  と  $u_{1o}$  の各要素を順番をいれかえずに交互にくみあわせ、次のような  $2^{k_n}$  個の入力列を構成する。

$$u_{1c1} = [u_{1o1}, u_{1o2}, \dots, u_{1ok_n}] \quad (193)$$

$$u_{1c2} = [u_{1r1}, u_{1o2}, \dots, u_{1ok_n}] \quad (194)$$

⋮

$$u_{1c2^{k_n}} = [u_{1r1}, \dots, u_{1rk_n-1}, u_{1rk_n}] \quad (195)$$

同様にして  $u_{2r}$  と  $u_{2o}$  をくみあわせて、 $u_{2c1}, \dots, u_{2c2^{k_n}}$  を構成する。こうして構成された  $u_{1c1}, \dots, u_{1c2^{k_n}}$  および  $u_{2c1}, \dots, u_{2c2^{k_n}}$  を、順番をいれかえずに交互にくみあわせ、次の  $2^{2 \cdot k_n}$  個の入力列を構成する。

$$u_{c1} = \begin{bmatrix} u_{1c1} \\ u_{2c1} \end{bmatrix} \quad (196)$$

$$u_{c2} = \begin{bmatrix} u_{1c1} \\ u_{2c2} \end{bmatrix} \quad (197)$$

⋮

$$u_{c2^{2 \cdot k_n}} = \begin{bmatrix} u_{1c2^{k_n}} \\ u_{2c2^{k_n}} \end{bmatrix} \quad (198)$$

ここで、 $u_{cp}$  ( $p = 1, \dots, 2^{2 \cdot k_n}$ ) の各ステップにたいする要素を  $u_{cp}[q]$  ( $q = 1, \dots, k_n$ ) という  $q$  であらわすこととする。たとえば

$$u_{c1}[1] = \begin{bmatrix} u_{1o1} \\ u_{2o1} \end{bmatrix}, \quad u_{c2}[3] = \begin{bmatrix} u_{1o3} \\ u_{2r3} \end{bmatrix} \quad (199)$$

である。まずは、入力を

$$u(k) = u_{c1}[1] \quad (200)$$

として、式(167)(168)(169)( $u_2(k_1) = 0$ のときには式(170)(171)(172))を用いて  $\phi(k_1 + 1)$  を計算して

$$(\phi^2(k_1 + 1) + u^2(k_1))\Delta T \quad (201)$$

が得られる。同様に、入力

$$u(k) = u_{c1}[2] \quad (202)$$

と状態  $\phi(k) = \phi(k_1 + 1)$  を用いて  $\phi(k_1 + 2)$  を計算し

$$(\phi^2(k_1 + 2) + u^2(k_1 + 1))\Delta T \quad (203)$$

が得られる。 $q = 1, \dots, k_n$  にかんしてくりかえし、 $\phi(k_1 + k_n)$  における  $V_d(\phi(k_1 + k_n))$  を用いることで

$$V_d(\phi(k_1 + k_n)) + \sum_{k=k_1}^{k_1+k_n-1} (\phi^2(k+1) + u^2(k))\Delta T \quad (204)$$

が計算できる。なお、 $\phi(k_1 + k_n)$  が式(158)(159)(160)で決定した範囲外となった場合には、式(204)の値として大きなペナルティ値を与える。これを、入力列の数である  $p = 1, \dots, 2^{k_n}$  にかんしてくりかえし、式(204)を最小とするものがそのとき記憶している  $V_d(\phi(k_1))$  の値よりも小さければ、その値を  $V_d(\phi(k_1))$  として記憶し、さらに式(204)を最小とする  $u_c^*$  を用いて、 $u_{1o}, u_{2o}$  を

$$u_c^* = \begin{bmatrix} u_{1c}^* \\ u_{2c}^* \end{bmatrix} \quad (205)$$

$$u_{1o} = u_{1c}^* \quad (206)$$

$$u_{2o} = u_{2c}^* \quad (207)$$

として記憶する。これらの手順をおこなう回数  $ltime$  を設定し、 $ltime$  回おこなったのちに、 $V_d(\phi(k_1))$  を計算する前の  $u_{1o}, u_{2o}$  と、 $ltime$  回おこなった後の  $u_{1o}, u_{2o}$  の要素がすべて同じならば、次の格子点における  $V_d$  の計算にすすむ。そうでなければ、これらの手順を  $ltime$  よりも少ない  $ltime'$  回おこない、ふたたび

$V_d(\phi(k_1))$  を計算する前の  $u_{10}, u_{20}$  と、 $u_{10}, u_{20}$  の要素の比較をおこなう。 $u_{10}, u_{20}$  の要素がすべて同じならば、最適入力を得られたと考えられることから次の格子点における  $V_d$  の計算にすすみ、そうでなければ同様の手順をくりかえす。

以上の手順をすべての格子点においておこない、すべての格子点における  $V_d(\phi(k_1))$  と  $V_d(\phi(k_1 + k_n))$  との差が十分に小さくなるまで計算をくりかえす。そして、この差が十分に小さくなったならば、 $V_d(\phi(k))$  を求める粘性解として、計算を終了する。なお、ある程度計算が進むにしたがって、 $u_{10}$  および  $u_{20}$  の値が収束してくることから、 $V_d(\phi(k_1))$  の値と  $V_d(\phi(k_1 + k_n))$  との差がある程度小さくなったならば、それ以降は  $ltimes$  の値を  $ltimes'$  と置きかえることで、さらに計算時間を短縮することができる。

$k_n$  の値が大きい場合には、 $2^{2k_n}$  の値が大きくなることから、式(196)-(198)で構成される入力列の数が多くなり、あまり実用的であるとはいえない。そこで、 $k_n$  が大きい場合には次のように入力列を構成する。まず、 $1, \dots, k_n$  の間のランダムな自然数を2つ発生し、これをそれぞれ  $u_{1p}, u_{2p}$  とする。そして、入力列  $u_{c1}$  を、このランダムな値を用いて

$$u_{c1} = \begin{bmatrix} u_{1cu_{1p}} \\ u_{2cu_{2p}} \end{bmatrix} \quad (208)$$

とする。これを決められた  $p_{\max}$  回おこない、入力列  $u_{c1}, \dots, u_{cp_{\max}}$  を構成する。 $u_{cp_{\max}}$  を  $2^{2k_n}$  にくらべて小さい値にすることで、式(196)-(198)で構成した入力列よりも少ない数の入力列が構成できるので、これを用いて式(204)の最小値を探索することで、探索の時間をより短くできる。

これをまとめると、ランダム探索を用いた動的計画法による粘性解の計算法は、次のような手順となる。

**Step 1** 粘性解を求めたい  $(x, y, \theta)$  の範囲を、式(158)(159)(160)のように、原点と原点に可到達な領域を含むように決定する。そして、この  $(x, y, \theta)$  の範囲をそれぞれ  $\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$  分割し、式(164)(165)(166)のように格子を構成する。

**Step 2** 入力  $u_1, u_2$  の範囲を、それぞれ式(187),(188)のように決定する。

**Step 3** 長さ  $k_n$  のランダム列を発生し、 $u_{1r}$  とする。これと  $u_{1o}$  を、順番をいれかえずに交互にくみあわせ、式 (193)-(195) であらわされる  $2^{k_n}$  個の列  $u_{1c1}, \dots, u_{1c2^{k_n}}$  を構成する。同様に  $u_{2c1}, \dots, u_{2c2^{k_n}}$  を構成する。

**Step 4**  $u_{1c1}, \dots, u_{1c2^{k_n}}$  および  $u_{2c1}, \dots, u_{2c2^{k_n}}$  を用いて、順番をいれかえずに交互にくみあわせ、式 (196)-(198) の  $2^{2k_n}$  個の入力列  $u_{c1}, \dots, u_{c2^{2k_n}}$  を構成する。 $k_n$  の値が大きい場合には、次の **Step 4'** により入力列を構成する。

**Step 4'**  $1, \dots, k_n$  の間のランダムな 2 つの自然数  $u_{1p}, u_{2p}$  を発生し、これと **Step 3** により構成された  $u_{1c1}, \dots, u_{1c2^{k_n}}$  および  $u_{2c1}, \dots, u_{2c2^{k_n}}$  を用いて、式 (208) のように入力列を構成する。これを、必要な入力数  $p_{\max}$  回くりかえしおこない、 $u_{c1}, \dots, u_{cp_{\max}}$  をえる。

**Step 5** **Step 4** あるいは **Step 4'** で構成した入力列を用いて、 $\phi(k_1 + 1), \dots, \phi(k_1 + k_n)$  を計算する。そして、 $\phi(k_1 + k_n)$  における  $V_d(\phi(k_1 + k_n))$  を用いて、式 (204) を計算する。もし  $\phi(k_1 + k_n)$  が **Step 1** で設定した解を求める範囲の外となった場合には、 $V_d(\phi(k_1 + k_n))$  の値として大きなペナルティ値を与える。これを  $l$  times 回おこなう。そして式 (204) を最小とする入力を  $u_{1o}, u_{2o}$ 、その最小値を  $V_d(\phi(k_1))$  として記憶する。

**Step 6**  $V_d(\phi(k_1))$  を計算する前の  $u_{1o}, u_{2o}$  と、計算を  $l$  times 回おこなった後の  $u_{1o}, u_{2o}$  を比較し、これらの要素がすべて同じであるならば、式 (204) の最小値を点  $(x_1, y_m, \theta_n)$  における  $V_d(\phi(k_1))$  として、最小とする入力列を  $u_{1o}, u_{2o}$  として記憶し、つぎへすすむ。そうでなければ、 $l$  times を  $l$  times' ( $< l$  times) でおきかえて、**Step 5** にもどる。

**Step 7** **Step 3** ~ **Step 6** を、**Step 1** で決定した解を求める範囲内のすべての格子点においておこなう。そして  $V_d(\phi(k_1))$  と  $V_d(\phi(k_1 + k_n))$  との差が十分に小さくなったならば、 $V_d(\phi(k_1))$  を求める粘性解として終了する。そうでなければ、**Step 3** にもどる。

本節における手法の特徴として、 $k = k_1$  よりも 1 ステップあとの状態  $\phi(k_1 + 1)$  が解を求める範囲の外であるとしても、 $k_n$  ステップ後の状態  $\phi(k_1 + k_n)$  が解を求



める範囲内であれば解の収束が得られるという点をあげることができる。これは

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

のような、ドリフト項  $f(x)$  をもつ非線形システムにおいても本手法が適用できるということの意味する。すなわち、ドリフト項をもつシステムでは、入力を0としてもドリフト項により状態が変化し、1ステップ後の状態  $\phi(k_1+1)$  が解を求める範囲の外となるということがおこるからである。3.4.1節の手法では、 $\phi(k_1+1)$  が解を求める範囲の外となった場合、この状態における  $V_d(\phi(k_1+1))$  の値がないことから、粘性解の計算が困難となる。

また、3.4.1節では1ステップ先の最適な  $u(k)$  を求めているが、本節では  $k_n$  ステップ先までを考慮した最適な  $u(k)$  を求めていることから、より大域的な解が得られるという利点もある。

### 3.5 粘性解を用いた最適制御則の計算法

3.4節の手法により得られた粘性解  $V(\phi)$  を用いて、最適制御側を計算する方法について述べる。式(153)(154)より、得られた粘性解の偏微分値を計算することで最適制御則が計算できることがわかるが、解が微分不可能点をもつ粘性解であることから、微分不可能点で偏微分値が不連続でなければならない。そこで、以下では得られた粘性解の偏微分値が不連続となるように計算する手法について考える。

#### 3.5.1 一次近似による偏微分値を用いた方法

三輪移動体が  $\phi_r = (x_r, y_r, \theta_r)$  にあるとし、 $x_r, y_r, \theta_r$  は

$$x_l \leq x_r \leq x_{l+1} \tag{209}$$

$$y_m \leq y_r \leq y_{m+1} \tag{210}$$

$$\theta_n < \theta_r \leq \theta_{n+1} \tag{211}$$

を満たすものとする。ここで、 $x_l, y_m, \theta_n$  は、それぞれ 3.4 節で  $V_d$  を計算する際に構成した格子点の  $x, y, \theta$  座標で、 $x_{l+1}, y_{m+1}, \theta_{n+1}$  は

$$x_{l+1} = x_l + \Delta x$$

$$y_{m+1} = y_m + \Delta y$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta \theta$$

である。

このとき、 $V$  の偏微分値を次のように一次近似する。

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_r, y_r, \theta_r) \approx \frac{V(x_{l+1}, y_r, \theta_r) - V(x_l, y_r, \theta_r)}{\Delta x} \quad (212)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x_r, y_r, \theta_r) \approx \frac{V(x_r, y_{m+1}, \theta_r) - V(x_r, y_m, \theta_r)}{\Delta y} \quad (213)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}(x_r, y_r, \theta_r) \approx \frac{V(x_r, y_r, \theta_{n+1}) - V(x_r, y_r, \theta_n)}{\Delta \theta} \quad (214)$$

これによって、偏微分値が格子点上において不連続となるような近似値が得られる。

### 3.5.2 スプライン関数による偏微分値を用いた方法

得られた粘性解の全体的な形を考慮して粘性解の偏微分値を計算すれば、よりよい近似ができるはずである。そこで、得られた粘性解をスプライン関数により補完することを考える。しかし、スプライン関数は任意の点の前後をなめらかに補完することから、粘性解の微分不可能点のように、点の前後が折れ曲がっているような部分もなめらかに補完してしまう。ここでは微分不可能点を考慮して、スプライン関数による補完をおこなう。

前節とおなじく、三輪移動体が  $\phi_r = (x_r, y_r, \theta_r)$  にあるとする。このとき、関数  $V(x, y_r, \theta_r)$  が得られれば、それを  $x$  で微分して  $x = x_r$  を代入することで、 $\partial V / \partial x(x_r, y_r, \theta_r)$  の近似値を求めることができる。よって、まずは格子点  $x = x_l$  ( $l = 0, \dots, \eta_x$ ),  $y = y_m$  ( $m = 0, \dots, \eta_y$ ) のそれぞれにおける  $V(x_l, y_m, \theta_r)$  の値を求めるために、関数  $V(x_l, y_m, \theta)$  を、次のスプライン関数で近似する。

$$V(x_l, y_m, \theta) \approx a_0^{l,m} + a_1^{l,m} \theta + c_0^{l,m} (\theta - \theta_0)_+^3 + \dots + c_{\eta_\theta}^{l,m} (\theta - \theta_{\eta_\theta})_+^3 \quad (215)$$

上式において、 $(\theta - \theta_i)_+^3$  ( $i = 0, \dots, \eta_\theta$ ) は

$$(\theta - \theta_i)_+^3 = \begin{cases} (\theta - \theta_i)^3 & ((\theta - \theta_i) > 0) \\ 0 & ((\theta - \theta_i) \leq 0) \end{cases} \quad (216)$$

である。また  $a_0^{l,m}, a_1^{l,m}, c_0^{l,m}, \dots, c_{\eta_\theta}^{l,m}$  は定数であり

$$a_0^{l,m} + a_1^{l,m} + c_0^{l,m} + \dots + c_{\eta_\theta}^{l,m} = 0 \quad (217)$$

$$c_0^{l,m} \theta_0 + \dots + c_{\eta_\theta}^{l,m} \theta_{\eta_\theta} = 0 \quad (218)$$

を満たす。式 (215) に  $\theta = \theta_r$  を代入することにより、 $\theta = \theta_r$  という平面上における  $V$  の値が得られる。

次に、 $V(x_l, y_m, \theta_r)$  の値を用いて、 $V(x_l, y_r, \theta_r)$  の値を求める。この際、得られた粘性解が  $x$  軸および  $y$  軸上で微分不可能となっていることが予想されることから、以下のように  $y_r$  が正の場合と負の場合にわけてスプライン関数を構成して、 $x$  軸上の微分不可能点を考慮した近似をおこなう。

$$V(x_l, y, \theta_r) \approx \begin{cases} a_0^l + a_1^l y + c_0^l (y - y_0)_+^3 \\ \quad + \dots + c_{\eta_y/2}^l (y - y_{\eta_y/2})_+^3 & (y_r < 0) \\ a_0^l + a_1^l y + c_0^l (y - y_{\eta_y/2+1})_+^3 \\ \quad + \dots + c_{\eta_y/2}^l (y - y_{\eta_y})_+^3 & (y_r \geq 0) \end{cases} \quad (219)$$

$a_0^l, a_1^l, c_0^l, \dots, c_{\eta_y/2}^l$  は  $a_0^{l,m}, a_1^{l,m}, c_0^{l,m}, \dots, c_{\eta_\theta}^{l,m}$  と同様に

$$a_0^l + a_1^l + c_0^l + \dots + c_{\eta_y/2}^l = 0 \quad (220)$$

$$c_0^l y_0 + \dots + c_{\eta_y/2}^l y_{\eta_y/2} = 0 \quad (221)$$

を満たす定数である。式 (219) に  $y = y_r$  を代入することで、 $\theta = \theta_r$  という平面上で、 $y = y_r$  という直線上の  $V$  の値が求められる。

最後に、 $V(x_l, y_r, \theta_r)$  ( $l = 0, \dots, \eta_x$ ) の値を用いて、 $V(x, y_r, \theta_r)$  の関数を構成する。先ほどと同様に、 $y$  軸上の微分不可能点を考慮して、次のように  $x_r$  が正の場

合と負の場合をわけてスプライン関数を構成する。

$$V(x, y_r, \theta_r) \approx \begin{cases} a_0 + a_1 x + c_0(x - x_0)_+^3 \\ \quad + \cdots + c_{\eta_x/2}(x - x_{\eta_x/2})_+^3 & (x_r < 0) \\ a_0 + a_1 x + c_0(x - x_{\eta_x/2+1})_+^3 \\ \quad + \cdots + c_{\eta_x/2}(x - x_{\eta_x})_+^3 & (x_r \geq 0) \end{cases} \quad (222)$$

ここで、 $a_0, a_1, c_0, \dots, c_{\eta_x/2}$  は

$$a_0 + a_1 + c_0^l + \cdots + c_{\eta_x/2}^l = 0 \quad (223)$$

$$c_0 x_0 + \cdots + c_{\eta_x/2}^l y_{\eta_x/2} = 0 \quad (224)$$

を満たす定数である。式(222)で得られた  $V(x, y_r, \theta_r)$  を  $x$  で微分し、 $x = x_r$  を代入することによって、 $\partial V/\partial x(x_r, y_r, \theta_r)$  の近似値が得られる。 $\partial V/\partial y(x_r, y_r, \theta_r)$ ,  $\partial V/\partial y(x_r, y_r, \theta_r)$  にかんしても、以上の手順と同様にして求めることができる。

三輪移動体が原点のまわりの一格子内に到達したときには、微分不可能点が複雑になっており、微分不可能点を考慮してスプライン関数により近似をおこなっても、偏微分項がうまく表現できないと考えられる。そこで、 $\partial V/\partial x(x_r, y_r, \theta_r)$ ,  $\partial V/\partial y(x_r, y_r, \theta_r)$  の計算法を、 $u_1 \neq 0$  のとき

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_r, y_r, \theta_r) \approx \frac{V(x_r + \Delta x, y_r, \theta_r) - V(x_r - \Delta x, y_r, \theta_r)}{2 \cdot \Delta x} \quad (225)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x_r, y_r, \theta_r) \approx \frac{V(x_r, y_r + \Delta y, \theta_r) - V(x_r, y_r - \Delta y, \theta_r)}{2 \cdot \Delta y} \quad (226)$$

$u_1 = 0$  のとき

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_r, y_r, \theta_r) \approx \begin{cases} \frac{V(x_r + \Delta x, y_r, \theta_r) - V(x_r, y_r, \theta_r)}{\Delta x} & (x_r \geq 0) \\ \frac{V(x_r, y_r, \theta_r) - V(x_r - \Delta x, y_r, \theta_r)}{\Delta x} & (x_r < 0) \end{cases} \quad (227)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x_r, y_r, \theta_r) \approx \begin{cases} \frac{V(x_r, y_r + \Delta y, \theta_r) - V(x_r, y_r, \theta_r)}{\Delta y} & (y_r \geq 0) \\ \frac{V(x_r, y_r, \theta_r) - V(x_r, y_r - \Delta y, \theta_r)}{\Delta y} & (y_r < 0) \end{cases} \quad (228)$$

とする。このように式(153)(154)の最適制御則から入力を計算することで、三輪移動体が原点近傍でチャタリングをおこすことなく停止させることができる。また式(227)(228)は、三輪移動体が  $x$  軸上、あるいは  $y$  軸上に位置するとき、入力  $u_1 = 0$  となり停止したままになってしまうことをさけるためである。

以上の手順によって得られた  $\partial V/\partial \phi(x_r, y_r, \theta_r)$  を式(153)(154)に代入することによって、点  $(x_r, y_r, \theta_r)$  における最適制御則  $u_1^*, u_2^*$  を計算することができる。

微分不可能となる点が、格子点上ではなく格子間にあるような場合も考えられる。そのような微分不可能点は、入力  $u_1$  の符号が変化する前後にあるものと考えられることから、 $u_1$  の符号が変化する前の  $V$  の値だけを用いてスプライン関数で近似したものと、 $u_1$  の符号が変化した後の  $V$  の値だけを用いてスプライン関数で近似したものの交点を求めることで、格子点間の微分不可能点を正確に計算することができる。これによって、より真の最適軌道に近い軌道を求めることができるかと予想される。

### 3.6 三輪移動体の障害物回避

ここでは、三輪移動体が移動する範囲内に障害物があるという場合を考え、制御則を切りかえることなく、式(153)(154)の最適制御則のみで障害物を回避して漸近安定とするための粘性解を求める手法を考える。

粘性解を求める範囲として、次のような範囲を考える。

$$\phi \in \{((x \in [x_{\min}, x_{\max}]) \cap (y \in [y_{\min}, y_{\max}]) \cap ([\theta \in \theta_{\min}, \theta_{\max}]))) \setminus ((x \in [x_{obj \min}, x_{obj \max}]) \cap (y \in [y_{obj \min}, y_{obj \max}])))\} \quad (229)$$

これは、式(158)(159)(160)であらわされる範囲から、 $x_{obj \min} \leq x \leq x_{obj \max}$  かつ  $y_{obj \min} \leq y \leq y_{obj \max}$  であらわされる矩形領域を除いた範囲である。

粘性解を計算する手法として、3.4.2節の手法に障害物との衝突判定を加える。3.4.2節における Step 2 ~ Step 4' および Step 6 は同様におこない、Step 1 の粘性解を求める範囲を式(229)の範囲に変更し、Step 5 において障害物との衝突判定を加える。そこで、Step 1, Step 5 を、それぞれ以下の Step 1', Step 5' で置きかえる。

**Step 1'** 粘性解を求める  $(x, y, \theta)$  の範囲を、式(229)のように、原点と原点に可到達な範囲を含み、かつ障害物を含まないように決定する。そしてこの  $x, y, \theta$  の範囲をそれぞれ  $\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$  分割し、式(164)(165)(166)のように格子を構成する。

**Step 5'** Step 4 あるいは Step 4' で構成した入力列を用いて、 $\phi(k_1 + 1), \dots, \phi(k_1 + k_n + 1)$  を計算する。そして、 $\phi(k_1 + k_n + 1)$  における  $V_d(\phi(k_1 + k_n + 1))$  を用いて、式 (204) を計算する。もし  $\phi(k_1 + k_n + 1)$  が Step 1 で設定した解を求める範囲の外となる、あるいは障害物と衝突した場合には、式 (204) を計算する代わりに大きなペナルティ値を与える。これを  $l$  times 回おこない、式 (204) の最小値を、点  $(x_l, y_m, \theta_n)$  における  $V_d(\phi(k_1))$  として記憶する。また  $V_d(\phi(k_1))$  を最小とする入力列を  $u_{10}, u_{20}$  として記憶する。

以下では格子点  $(x_l, y_m, \theta_n)$  からの障害物との衝突判定を考えるが、以下の障害物との衝突判定の条件をすべて満たさなければ、その軌道は障害物に衝突しないので式 (204) を計算する。障害物に衝突する場合には、式 (204) を計算する代わりに大きなペナルティ値を与える。

はじめに、式 (167)(168)(169)( $u_2 = 0$  のときは、式 (170)(171)(172)) より、格子点  $(x_l, y_m, \theta_n)$  を現在時刻の状態  $(x(k), y(k), \theta(k))$  として、時刻  $\Delta T$  後の状態  $(x(k+1), y(k+1), \theta(k+1))$  を計算する。 $(x(k+1), y(k+1), \theta(k+1))$  が式 (229) の範囲外であれば障害物に衝突するか、あるいは解を求める範囲の外である。

時刻  $\Delta T$  の間入力が一定であるとすると、 $u_2 \neq 0$  の場合には三輪移動体は

$$(x - x_{rc})^2 + (y - y_{rc})^2 = r^2 \quad (230)$$

$$r = \frac{u_1}{u_2} L \quad (231)$$

$$x_{rc} = x(k) - \frac{u_1}{u_2} L \sin \theta(k) \quad (232)$$

$$y_{rc} = y(k) + \frac{u_1}{u_2} L \cos \theta(k) \quad (233)$$

という円軌道の一部を動く。そこで、この円と障害物が衝突するかどうかをチェックする。まずは、障害物の  $x$  座標にかんする衝突を考える。式 (230) を  $x$  について解くと

$$x = x_{rc} \pm \sqrt{r^2 - (y - y_{rc})^2} \quad (234)$$

となるが、上式の  $y$  に  $y_{obj \min}$  を代入したときに

$$r^2 - (y_{obj \min} - y_{rc})^2 < 0 \quad (235)$$

であれば、式(230)の円は  $y = y_{obj\ min}$  を通らないことから、障害物には衝突しないことがわかる。そうでなければ式(234)に  $y = y_{obj\ min}$  を代入して

$$x_{obj\ \pm} = x_{rc} + \sqrt{r^2 - (y_{obj\ min} - y_{rc})^2} \quad (236)$$

を計算する。もし

$$x_{obj\ min} < x_{obj\ \pm} < x_{obj\ max} \quad (237)$$

であれば、式(230)の円は点  $(x_{obj\ \pm}, y_{obj\ min})$  において障害物と衝突することがわかるので、円が障害物と接する位置における三輪移動体の姿勢角を、 $\tan \alpha < 0$  のとき

$$\theta_{obj\ \pm} = \tan^{-1} \frac{y_{obj\ min} - y_{rc}}{x_{obj\ \pm} - x_{rc}} + \frac{\pi}{2} \quad (238)$$

$\tan \alpha \geq 0$  のとき

$$\theta_{obj\ \pm} = \tan^{-1} \frac{y_{obj\ min} - y_{rc}}{x_{obj\ \pm} - x_{rc}} - \frac{\pi}{2} \quad (239)$$

と計算する。そして

$$\theta(k) < \theta_{obj\ \pm} < \theta(k+1) \quad (240)$$

あるいは

$$\theta(k+1) < \theta_{obj\ \pm} < \theta(k) \quad (241)$$

ならば、障害物に衝突する。なお、 $u_2 < 0$  において、 $\theta(k) < 0$  かつ  $\theta(k+1) > 0$  のとき

$$\theta(k+1) < \theta_{obj\ \pm} < \theta(k) + 2\pi \quad (242)$$

を満たすならば、障害物と衝突する。また  $u_2 > 0$  において、 $\theta(k) > 0$  かつ  $\theta(k+1) < 0$  のとき

$$\theta(k) < \theta_{obj\ \pm} < \theta(k+1) + 2\pi \quad (243)$$

を満たすならば、障害物と衝突する。 $y = y_{obj\ max}$  にかんしても、式(234)に  $y = y_{obj\ max}$  を代入して、同様に判定する。

障害物の  $y$  座標にかんする衝突の判定も、式(230)を  $y$  について解いた

$$y = y_{rc} \pm \sqrt{r^2 - (x - x_{rc})^2} \quad (244)$$

を用いて、同様にして判定できる。

$u_2 = 0$  の場合は、三輪移動体は  $x(k) = x(k+1)$  のとき、すなわち  $y$  軸に平行に移動するとき

$$x_{obj\ min} < x(k) < x_{obj\ max} \quad (245)$$

かつ

$$\begin{aligned} & ((y_{obj\ min} > y(k)) \cap (y_{obj\ max} < y(k+1))) \\ & \cup ((y_{obj\ min} > y(k+1)) \cap (y_{obj\ max} < y(k))) \end{aligned} \quad (246)$$

ならば、障害物に衝突する。また  $y(k) = y(k+1)$ 、すなわち  $x$  軸に平行に移動するとき

$$y_{obj\ min} < y(k) < y_{obj\ max} \quad (247)$$

かつ

$$\begin{aligned} & ((x_{obj\ min} > x(k)) \cap (x_{obj\ max} < x(k+1))) \\ & \cup ((x_{obj\ min} > x(k+1)) \cap (x_{obj\ max} < x(k))) \end{aligned} \quad (248)$$

ならば、障害物に衝突する。それ以外の場合には

$$(y(k+1) - y(k))x - (x(k+1) - x(k))y + x(k+1)y(k) - x(k)y(k+1) = 0 \quad (249)$$

という直線軌道上の一部を通ることから、この式を  $y$  にかんして解いた

$$y = \frac{y(k+1) - y(k)}{x(k+1) - x(k)}x + \frac{x(k+1)y(k) - x(k)y(k+1)}{x(k+1) - x(k)} \quad (250)$$

に  $x_{obj\ min}, x_{obj\ max}$  を代入し、そのときの  $y$  座標が

$$y_{obj\ min} < y < y_{obj\ max} \quad (251)$$

を満たす、あるいは

$$x = \frac{x(k+1) - x(k)}{y(k+1) - y(k)}y + \frac{x(k)y(k+1) - x(k+1)y(k)}{y(k+1) - y(k)} \quad (252)$$



の  $y$  に  $y_{obj \min}, y_{obj \max}$  を代入し、そのときの  $x$  座標が

$$x_{obj \min} < x < x_{obj \max} \quad (253)$$

であるならば、障害物と衝突することがわかる。

なお、障害物が矩形のような簡単な形状ではない場合には、時刻  $\Delta T$  を  $\eta_T$  分割し、式(167)(168)(169)( $u_2 = 0$  のときは式(170)(171)(172))の  $\Delta T$  を

$$\Delta T := \frac{\Delta T}{\eta_T} \quad (254)$$

として、時刻  $\Delta T/\eta_T \sim \Delta T$  のそれぞれの時刻における状態を計算し、それぞれの状態が障害物に衝突するかどうかを判定することで対応できる。

### 3.7 ノンホロミックシステムの $H_\infty$ 制御問題

#### 3.7.1 外乱を含む三輪移動体のモデル

図2のように、 $\theta$  に  $\theta_w$  のような外乱入力のある三輪移動体のモデル式は、次のようになる。

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\theta + \theta_w) \quad (255)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin(\theta + \theta_w) \quad (256)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{L} \dot{r} \tan \alpha \cdot \cos \theta_w \quad (257)$$

ここで、 $\theta_w$  は、左右の車輪の大きさが異なることにより生じる姿勢角  $\theta$  の誤差である。 $\phi, u$  をそれぞれ式(144)(145)のようにおくことによって、次の状態方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \cos \theta \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}\right) - \sin \theta \frac{w}{\sqrt{1+w^2}} & 0 \\ \sin \theta \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}\right) + \cos \theta \frac{w}{\sqrt{1+w^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}\right) \end{bmatrix} u \quad (258)$$

ただし

$$w = \tan \theta_w, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_w < \frac{\pi}{2} \quad (259)$$

である。式(258)の右辺第1項が、外乱のない場合のシステムであり、第2項は  $w = 0$  あるいは  $u = 0$  のとき0となる。

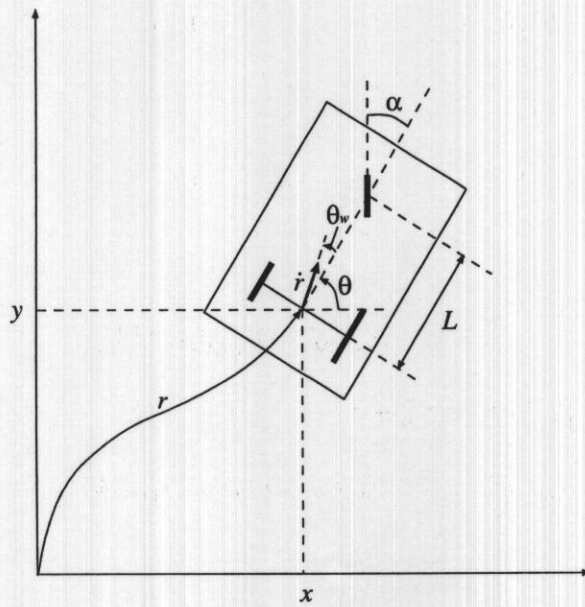


図2 Wheeled vehicle (with disturbance)

### 3.7.2 三輪移動体にたいする $H_\infty$ 制御問題

評価出力として

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad (260)$$

を考える。また、次の評価関数を考える。

$$J = \int_{t_0}^{\infty} (z^T z - \gamma^2 w^2) dt \quad (261)$$

この評価関数において

$$V(\phi(t_0)) = \max_w \min_u J \quad (262)$$

とおくと

$$\begin{aligned} V(\phi(t_0)) &= \max_w \min_u \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (z^T z - \gamma^2 w^2) dt + \int_{t_1}^{\infty} (z^T z - \gamma^2 w^2) dt \right\} \\ &= \max_w \min_u \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (z^T z - \gamma^2 w^2) dt + V(\phi(t_1)) \right\} \\ &\geq \min_u \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (z^T z - \gamma^2 w^2) dt + V(\phi(t_1)) \right\} \end{aligned} \quad (263)$$

となることから、上式を満たす  $V(\phi) (\geq 0, V(0) = 0)$  を見つけることにより、式(262)を満たす  $u$  のもとで、 $w$  から  $z$  までの  $L_2$  ゲインは  $\gamma$  以下となる。

式(263)を、次のように変形する。

$$\max_w \min_u \left( V(\phi(t_1)) - V(\phi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} (z^T z - \gamma^2 w^2) dt \right) = 0 \quad (264)$$

$t_1 \rightarrow t_0$  として両辺を  $t_1 - t_0$  で割ることによって

$$\max_w \min_u (\dot{V}(\phi) - \gamma^2 w^2 + z^T z) = 0 \quad (265)$$

が得られる。

$$H(\phi, \frac{\partial V}{\partial \phi}, w, u) = \dot{V}(x) - \gamma^2 w^2 + z^T z \quad (266)$$

とおくと

$$\begin{aligned} H(\phi, \frac{\partial V}{\partial \phi}, w, u) &= \frac{\partial V}{\partial x} \left( \cos \theta \frac{1}{\sqrt{1+w^2}} u_1 - \sin \theta \frac{w}{\sqrt{1+w^2}} u_1 \right) \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial y} \left( \sin \theta \frac{1}{\sqrt{1+w^2}} u_1 + \cos \theta \frac{w}{\sqrt{1+w^2}} u_1 \right) \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{1}{L} \frac{1}{\sqrt{1+w^2}} u_2 - \gamma^2 w^2 \\ &\quad + x^2 + y^2 + \theta^2 + u_1^2 + u_2^2 \end{aligned} \quad (267)$$

となることから、上式の  $H$  が鞍点  $u = u^* = [u_1^{*T}, u_2^{*T}]^T, w = w^*$  をもつとして  $u_1, u_2, w$  で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_1}(w^*, u^*) &= \frac{\partial V}{\partial x} \left( \cos \theta \frac{1}{\sqrt{1+w^{*2}}} - \sin \theta \frac{w^*}{\sqrt{1+w^{*2}}} \right) \\ &+ \frac{\partial V}{\partial y} \left( \sin \theta \frac{1}{\sqrt{1+w^{*2}}} + \cos \theta \frac{w^*}{\sqrt{1+w^{*2}}} \right) + 2u_1^* = 0 \end{aligned} \quad (268)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2}(w^*, u^*) = \frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{1+w^{*2}}} + 2u_2^* = 0 \quad (269)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial w}(w^*, u^*) &= - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta \right) u_1^* w^* (1+w^{*2})^{-\frac{3}{2}} \\ &- \left( \frac{\partial V}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta \right) u_1^* (1+w^{*2})^{-\frac{3}{2}} \\ &- \frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial \theta} u_2^* (1+w^{*2})^{-\frac{3}{2}} - 2\gamma^2 w^* = 0 \end{aligned} \quad (270)$$

が得られる。式(268)(269)より、 $u_1^*$  および  $u_2^*$  は

$$\begin{aligned} u_1^* &= -\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta \right) \frac{1}{\sqrt{1+w^{*2}}} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta \right) \frac{w^*}{\sqrt{1+w^{*2}}} \right\} \end{aligned} \quad (271)$$

$$u_2^* = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{1+w^{*2}}} \quad (272)$$

となる。これを式(267)に代入することによって、Hamilton-Jacobi-Isaacs 偏微分方程式

$$H^*\left(\phi, \frac{\partial V}{\partial \phi}\right) = H\left(\phi, \frac{\partial V}{\partial \phi}, w^*, u^*\right) = 0 \quad (273)$$

が得られる。この Hamilton-Jacobi-Isaacs 偏微分方程式の粘性解を求めることで、式(270)および式(271)(272)より、 $w$  から  $z$  までの  $L_2$  ゲインを  $\gamma$  以下にするような最適入力  $u^*$  を計算することができる。次節で、この Hamilton-Jacobi-Isaacs 偏微分方程式の粘性解の計算法および最適入力の計算法について述べる。

### 3.8 Hamilton-Jacobi-Isaacs 偏微分方程式の粘性解の計算法

式(263)を時間間隔  $\Delta T$  で離散化して、次の式をえる。

$$V_d(\phi(k)) = \max_w \min_u \left\{ V_d(\phi(k+1)) + (z^T z - \gamma^2 w^2) \Delta T \right\} \quad (274)$$

$V_d$  は、 $V$  を離散化したものである。本節では上式を用いて、粘性解  $V_d$  を計算する手法を考える。

3.4.1節と同様に、まずは解を求める範囲を式 (158)(159)(160) のように、原点と原点に可到達な領域を含むように決定し、 $x, y, \theta$  の範囲をそれぞれ  $\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$  分割して、式 (164)(165)(166) のように格子を構成する。

次に、構成した格子上の一点  $(x_l, y_m, \theta_n)$  における  $V_d$  の計算をおこなう。まずは  $w = 0$  として、3.4節における手法を用いて上式を最小とする  $u_1, u_2$  を求めると、式 (271)(272) より

$$A = \frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta = -2u_1 \quad (275)$$

$$C = \frac{\partial V}{\partial \theta} = -2Lu_2 \quad (276)$$

と計算できる。なお、 $A, C$  は定数となるので、それぞれ式 (275)(276) のようにおいた。同様に、 $w = w' (\neq 0)$  として式 (274) を最小とする  $u_1, u_2$  を求めることにより

$$B = \frac{\partial V}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta = \frac{\sqrt{1+w'^2}}{w_1} \left( A \frac{1}{\sqrt{1+w'^2}} + 2u_1 \right) \quad (277)$$

と計算できる。ここで、 $B$  は定数であるので、上式のようにおいた。この手順により、 $u_1^*, u_2^*$  はそれぞれ

$$u_1^* = -\frac{1}{2} \left( A \frac{1}{\sqrt{1+w^{*2}}} - B \frac{w^*}{\sqrt{1+w^{*2}}} \right) \quad (278)$$

$$u_2^* = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{L} C \frac{1}{\sqrt{1+w^{*2}}} \quad (279)$$

という  $w^*$  の関数となるので、この2つの式を式 (270) に代入して整理すると

$$A^2 w^* - AB w^{*2} + AB - B^2 w^* + \left( \frac{C}{L} \right)^2 - 4\gamma^2 w^* (1+w^{*2})^2 = 0 \quad (280)$$

が得られる。この5次方程式の解  $w_1^*, w_2^*, w_3^*, w_4^*, w_5^*$  を求め、 $w_i^* (i = 0, \dots, 5)$  を式 (278)(279) に代入して計算した  $u_1^*, u_2^*$  をそれぞれ  $u_{1i}^*, u_{2i}^*$  とする。 $w_i^*, u_{1i}^*, u_{2i}^*$  を式 (267)、すなわち

$$H\left(\phi, \frac{\partial V}{\partial \phi}, w, u\right) = A \frac{1}{\sqrt{1+w^2}} u_1 - B \frac{w}{\sqrt{1+w^2}} u_1 + \frac{1}{L} C \frac{1}{\sqrt{1+w^2}} u_2 - \gamma^2 w^{*2} + x^2 + y^2 + \theta^2 + u_1^2 + u_2^2 \quad (281)$$

に代入して計算し、これを最小とする  $w_i^*, u_{1i}^*, u_{2i}^*$  を、格子点  $(x_l, y_m, \theta_n)$  における  $H$  の鞍点  $w^*$  および  $u^*$  として記憶する。そして、これを用いて式 (274) を計算した値を、格子点  $(x_l, y_m, \theta_n)$  における  $V_d(\phi(k))$  の値として記憶する。

以上の手順を解を求めるすべての範囲でおこない、すべての格子点における  $V_d(\phi(k))$  の値と  $V_d(\phi(k+1))$  との値の差が十分に小さくなるまで計算をくりかえす。この差が十分に小さくなったならば、 $V_d(\phi(k))$  を求める粘性解として計算を終了する。

これをまとめると、Hamilton-Jacobi-Isaacs 偏微分方程式の粘性解の計算法は、次のようになる。

**Step 1** 粘性解を求めたい  $(x, y, \theta)$  の範囲を、式 (158)(159)(160) のように、原点と原点に可到達な範囲を含むように決定する。そしてこの  $(x, y, \theta)$  の範囲をそれぞれ  $\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$  分割し、式 (164)(165)(166) のように格子を構成する。

**Step 2** 格子上の一点  $(x_l, y_m, \theta_n)$  において、 $w = 0$  として 3.4.2 節の手法により、式 (274) の右辺

$$V_d(\phi(k+1)) + (z^T z - \gamma^2 w^2) \Delta T \quad (282)$$

を最小化するような  $u^*$  を探索して、式 (275)(276) を計算する。同様に、 $w = w' (\neq 0)$  として 3.4.2 節の手法により、上式を最小化する  $u^*$  を探索して、式 (277) を計算する。

**Step 3** Step 2 により、式 (270) が  $w^*$  にかんする式 (280) となることから、これを  $w^*$  にかんして解き、求められた  $w_i (i = 1, \dots, 5)$  を式 (278)(279) に代入して計算した  $u_{1i}$  および  $u_{2i}$  を式 (281) に代入し、これを最小とするものを、格子点  $(x_l, y_m, \theta_n)$  における最悪外乱  $w^*$  および最適入力  $u^*$  とする。またこうして得られた  $w^*, u^*$  を式 (282) に代入して計算した値を、格子点  $(x_l, y_m, \theta_n)$  における  $V_d(\phi(k))$  とする。

**Step 4** Step 2,3 を、Step 1 で決定した粘性解を求める範囲内のすべての点においておこなう。そして、 $V_d(\phi(k))$  と  $V_d(\phi(k+1))$  の値との差が十分に小さくなったならば、 $V_d(\phi(k))$  を求める粘性解として計算を終了する。そうでなければ、Step 2 にもどる。

次に、得られた Hamilton-Jacobi-Isaacs 偏微分方程式の粘性解を用いた最適制御則の計算をおこなう手法を示す。ここでは、三輪移動体が点  $(x_r, y_r, \theta_r)$  にあるとして、最適制御則を計算する。得られた粘性解を用いて、3.5節における手法を適用することにより、式 (275)(276)(277) を計算することができる。これによってハミルトニアン  $w$  による偏微分値は式 (280) のようになることから、あとは先ほどと同様にこれを  $w^*$  について解き、それを式 (278)(279) に代入して  $u$  を求め、式 (281) を最小とするものを最適入力  $u^*$  とする。

## 4. シミュレーション結果

本章では、3章で述べた、Hamilton-Jacobi 方程式の粘性解の数値解法と、得られた粘性解を用いて最適制御則を計算したシミュレーション結果を示す。なお、使用したコンピュータは DEC の AlphaServer8400 であり、C 言語によるプログラムを用いてシミュレーションをおこなった。

### 4.1 動的計画法による粘性解を用いた最適制御

3.4.1節の動的計画法による粘性解の計算法を用いて、粘性解を求めるシミュレーションをおこなった。シミュレーションに使用したパラメータは、表1のとおりである。

図3は、提案した動的計画法により粘性解を計算するという方法により得られた  $\theta = 0$  における粘性解である。 $x$  軸および  $y$  軸上が微分不可能となっていることを見てとることができ、粘性解であることがわかる。

この粘性解を用いて最適制御則を計算する。まず、3.5.1節における、偏微分値を一次近似により求め、最適制御則を計算するという手法を用いた結果について示す。図4は、初期値を  $(0, 2, 0)$  としたときに得られた最適軌道である。点  $(0.5, 0, 0)$  のあたりで前進と後進が切りかわり、漸近安定となる軌道が得られた。なお、この軌道は一つの制御則である式(153)(154)から得られたものであり、点  $(0.5, 0, 0)$  の近傍で制御則を切りかえているわけではない。

また、図5は初期値を  $(2, 0, \pi/2)$  としたときに得られた最適軌道である。原点近傍で  $y$  座標に 0.01 以下のオフセットが生じている。オフセットを 0 とするためには、原点近傍における微分不可能点が正確にあらわされている必要がある。これは、原点近傍における粘性解を、表1の格子間隔では精度良くあらわすことができなかったからである。よって、三輪移動体が原点のまわりの一格子内に到達したときには、原点近傍をより正確に求めた粘性解を用いて最適制御則を計算することで、このようなオフセットを小さくすることができると予想される。

次に、3.5.2節における、微分不可能点を考慮して粘性解をスプライン関数で近似して偏微分値を求め、最適制御則を計算するという手法を用いたシミュレーショ



ン結果を示す。ここでは先に述べたの点を考慮し、最適軌道をより正確に求めるために、三輪移動体が  $-0.3 \leq x \leq 0.3$  かつ  $-0.3 \leq y \leq 0.3$  の範囲内に入ったときには、表2のパラメータを用いて3.4.1節の方法により求めた粘性解に切りかえて最適制御則の計算をおこなった。ここで表2の解を求める範囲は、表1の格子間隔  $\Delta x = 0.25, \Delta y = 0.25$  よりもやや大きい範囲とした。本節においては、比較のために、以下の図において原点近傍で粘性解を切りかえた場合の最適制御のシミュレーション結果と、切りかえない場合の最適制御のシミュレーション結果を一つの図に示す。実線が粘性解を切りかえない場合で、点線が原点近傍で粘性解を切りかえた最適軌道である。

表2のパラメータを用いて得られた粘性解は、図6のようになった。図3と同様に、 $x$  軸および  $y$  軸上に微分不可能点があることが見てとれるが、図6では  $x$  軸上の微分不可能点や、原点近傍の粘性解の微妙な形状がより正確にあらわされていることが、図3と図6を比較することによりよくわかる。

初期値が  $(0, 2, 0)$  のときの最適軌道は、図7のようになった。この初期値の場合には、粘性解を切りかえた場合も切りかえない場合も、点  $(-0.5, 0, 0)$  のあたりで前後進が切りかわり漸近安定となる軌道が得られた。

初期値が  $(2, 0, \pi/2)$  の場合の最適軌道は、図8となる。粘性解を切りかえない場合には  $y$  座標にオフセットが生じているが、粘性解を切りかえた最適軌道においては、粘性解が切りかわった  $x = 0.3$  のあたりから原点の方向に進んでいき、オフセットがなくなっている。

また、初期値を  $(0, 0, \pi/2)$  という、 $x$  および  $y$  が0となる位置を初期値とした場合についてもシミュレーションをおこなった。このときの最適軌道は図9のようになった。この初期値の場合には、原点近傍で粘性解を切りかえた軌道は、表2のパラメータにより求めた原点近傍の粘性解のみを用いた軌道であるのに対し、粘性解を切りかえない軌道は表1により求めた粘性解のみを用いた軌道となっていることから、この2つの粘性解の精度の違いがあらわれた結果となっている。

表 1 Parameters for dynamic programming principle

parameter	value
$L$	0.5[m]
$[x_{\min}, x_{\max}]$	$[-3.0[\text{m}], 3.0[\text{m}]]$
$[y_{\min}, y_{\max}]$	$[-3.0[\text{m}], 3.0[\text{m}]]$
$[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$	$[-\pi[\text{rad}], \pi[\text{rad}]]$
$\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$	24, 24, 24
$\Delta T$	0.1[sec]

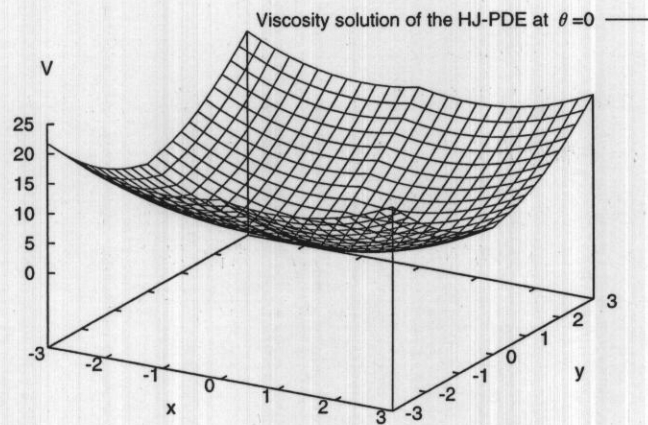


图 3 Viscosity solution at  $\theta = 0$

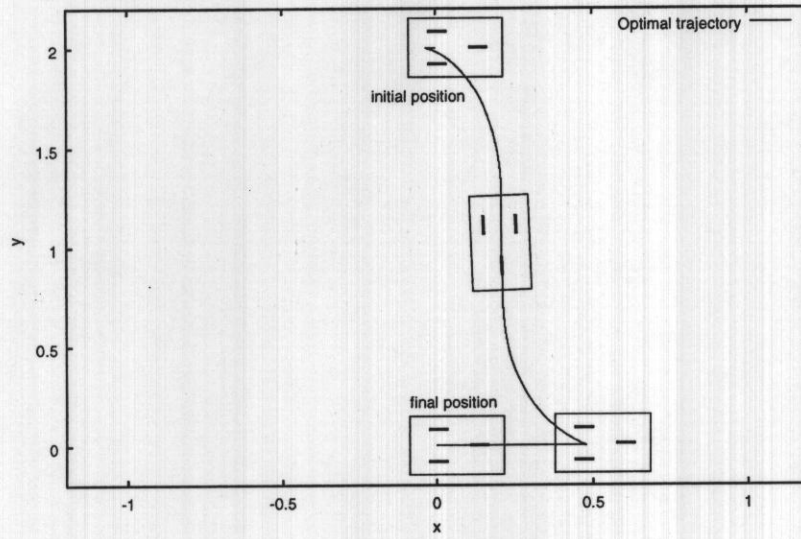


图 4 Optimal trajectory from  $(0, 2, 0)$

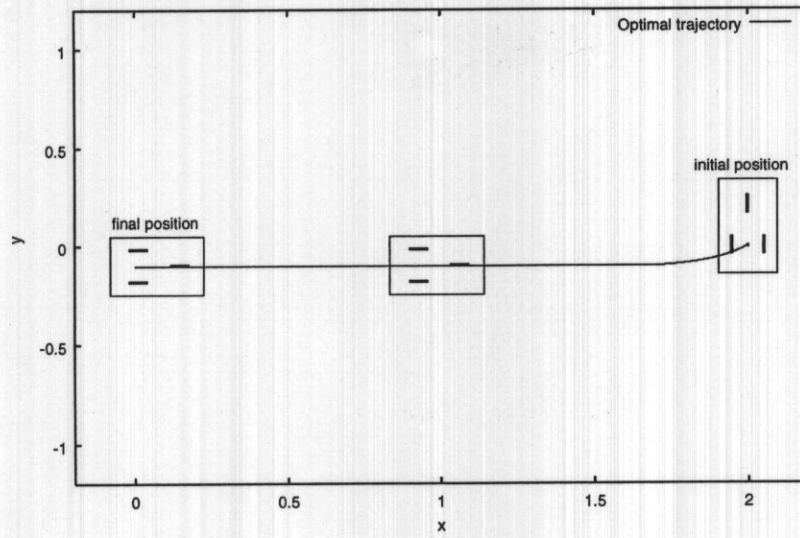


图 5 Optimal trajectory from  $(2, 0, \pi/2)$

表 2 Parameters for dynamic programming principle around the origin

parameter	value
$L$	0.5[m]
$[x_{\min}, x_{\max}]$	$[-0.3[\text{m}], 0.3[\text{m}]]$
$[y_{\min}, y_{\max}]$	$[-0.3[\text{m}], 0.3[\text{m}]]$
$[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$	$[-\pi[\text{rad}], \pi[\text{rad}]]$
$\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$	12, 12, 12
$\Delta T$	0.1[sec]

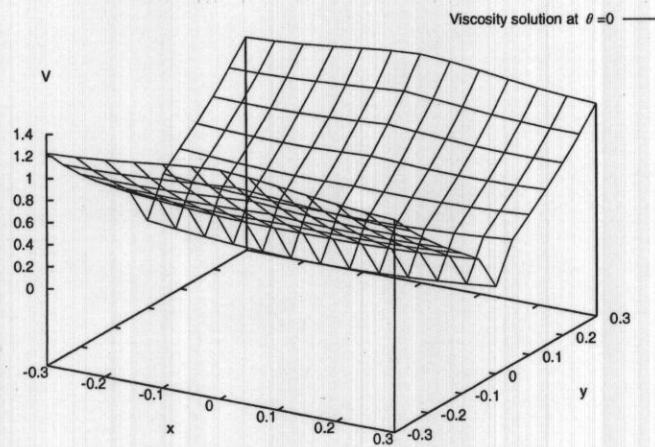


图 6 Viscosity solution at  $\theta = 0$

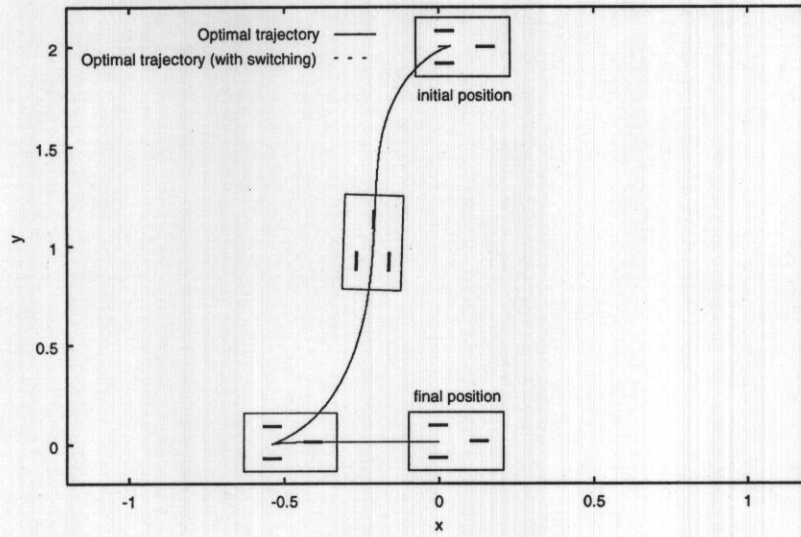


图 7 Optimal trajectory from  $(0, 2, 0)$

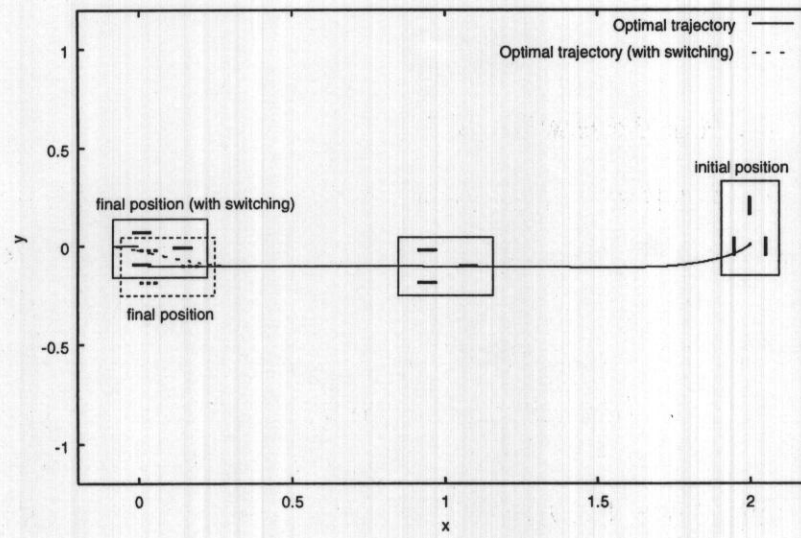


图 8 Optimal trajectory from  $(2, 0, \pi/2)$

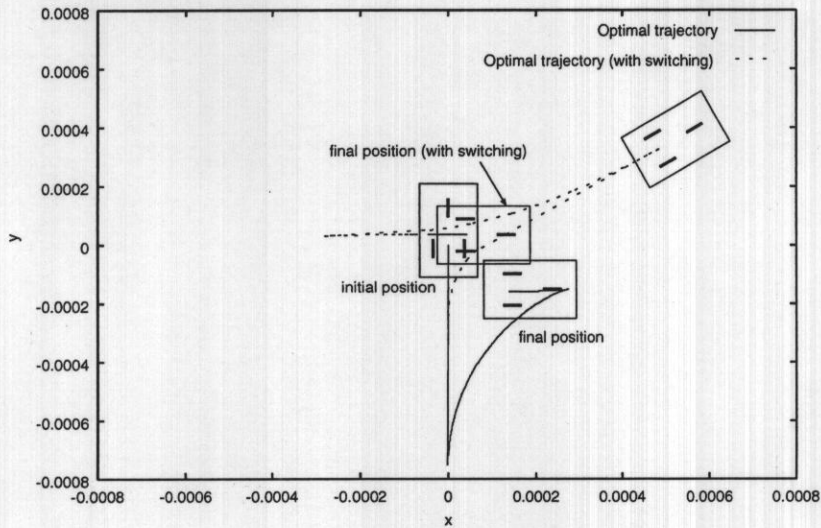


図 9 Optimal trajectory from  $(0, 0, \pi/2)$

## 4.2 ランダム探索を用いた動的計画法による粘性解を用いた最適制御

### 4.2.1 1ステップ先までを探索した場合

3.4.2節の、ランダム探索を用いた動的計画法による粘性解の計算法のシミュレーションをおこなった。シミュレーションに使用したパラメータは表3のとおりである。ここでは  $k_n = 1$  としていることから、3.4.1節の動的計画法による粘性解の計算法と同じく1ステップ先の最適な  $u$  を求めることとなる。また、 $k_n$  の値が小さいことから、入力列の構成には **Step 4** を用いた。なお、計算開始時の  $k_1$  を  $k_1 = 0$  とし、 $k_1 > 10$  となったところで、 $ltimes$  を  $ltimes'$  で置きかえた。

図10は、3.4.2節で提案する方法により得られた、 $\theta = 0$  における粘性解である。図3と同様に、 $x$  軸および  $y$  軸上が微分不可能となっていることを見てとることができ、粘性解であることがわかる。

この粘性解を用いて、まず3.5.1節の手法で最適制御則を求めた。初期値を  $(0, 2, 0), (2, 0, \pi/2)$  としたときの最適軌道は、それぞれ図11,12のようになる。3.4.2

節における手法により求めた粘性解でも、3.4.1節の手法により求めた粘性解を用いた場合と同様の軌道が得られることがわかる。また、初期値が  $(2, 0, \pi/2)$  の場合には、4.1のときと同様の理由から  $y$  座標にオフセットが生じている。3.4.2節の手法では、4.4節で比較するように3.4.1節の動的計画法による手法にくらべて計算時間が大幅に短縮されることから、粘性解を求めるきわめて有効な手法であるといえる。

次に、最適制御則を3.5.2節の手法で計算し、シミュレーションをおこなった。なお、ここでは4.1と同様に、表3の格子間隔  $\Delta x = 0.25, \Delta y = 0.25$  よりもやや大きい範囲を粘性解を求める範囲とした表4のようなパラメータを用いて粘性解を計算し、三輪移動体が  $-0.3 \leq x \leq 0.3$  かつ  $-0.3 \leq y \leq 0.3$  の範囲内に入ったときには、表4のパラメータにより求めた粘性解に切りかえて最適軌道を計算した。なお、表4のパラメータを用いて粘性解を計算した際には、表3のパラメータを用いて粘性解を計算したときと同様に、計算開始時の  $k_1$  を  $k_1 = 0$  とし、 $k_1 > 10$  となったところで、 $l$ times を  $l$ times' で置きかえた。

表4のパラメータを用いて得られた粘性解は、図13のようになる。図6と同様に、原点近傍の微分不可能点および粘性解の微妙な形状をより正確にあらわしていることがわかる。

初期値を  $(0, 2, 0)$  としたときの最適軌道は、図14のようになった。最初に  $0.1[m]$  ほど前進してから、後進して漸近安定となる軌道が得られた。また、初期値を  $(2, 0, \pi/2)$  としたときの最適軌道は、図15のようになった。粘性解を切りかえる  $x = 0.3$  のあたりから、さらに原点に近づいていくような軌道が得られた。

初期値を  $(0, 0, \pi/2)$  としたときの最適軌道は、図16のようになった。図9と同様の軌道が得られていることから、表4のパラメータにより3.4.2節の手法で求めた原点近傍の粘性解が、精度良く求められていることがわかる。

#### 4.2.2 3ステップ先までを探索した場合

4.2.1節において使用した表3のパラメータのうち、 $k_n = 3$  としてシミュレーションをおこなった。 $k_n = 3$  とした以外は、4.2.1節とまったく同様にしてシミュレーションをおこなった。

図 17は、 $\theta = 0$ における粘性解である。 $x$  軸および  $y$  軸上の微分不可能点がはっきりとわかり、粘性解となっていることがわかる。

この粘性解を使用し、3.5.1節の手法で最適制御則を計算した。初期値を  $(0, 2, 0)$ ,  $(2, 0, \pi/2)$  とした場合の最適軌道は、それぞれ図 18, 19のようになった。初期値が  $(2, 0, \pi/2)$  の場合の最適軌道は、 $k_n = 1$  の場合の図 12と比べてより原点から外側に膨らみ、原点近傍で原点に近付いていくという軌道となった。これは、 $k_n = 3$  としたことにより、 $k_n = 1$  の場合と比べてより大域的な計算をおこなったことにより、得られた粘性解がより厳密なものとなったためであると考えられる。

次に、4.2.1節と同様に、最適制御則を 3.5.2節の手法で計算し、シミュレーションをおこなった。先ほどと同様に、表 3の格子間隔  $\Delta x = 0.25, \Delta y = 0.25$  よりもやや大きい範囲を粘性解を求める範囲とした表 4のようなパラメータを用いて粘性解を計算し、三輪移動体が  $-0.3 \leq x \leq 0.3$  かつ  $-0.3 \leq y \leq 0.3$  の範囲内に入ったときには、表 4のパラメータにより求めた粘性解に切りかえて最適軌道を計算した。

初期値を  $(0, 2, 0)$ ,  $(2, 0, \pi/2)$  としたときの最適軌道は、それぞれ図 20, 21のようになった。特に初期値が  $(2, 0, \pi/2)$  の場合は、図 19の場合と比べて、原点近傍での粘性解をより厳密に計算したことによりオフセットがなくなっていることがわかる。



表 3 Parameters for dynamic programming principle with random search

parameter	value
$L$	0.5[m]
$[x_{\min}, x_{\max}]$	[-3.0[m], 3.0[m]]
$[y_{\min}, y_{\max}]$	[-3.0[m], 3.0[m]]
$[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$	$[-\pi[\text{rad}], \pi[\text{rad}]]$
$\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$	24, 24, 24
$[u_{1 \min}, u_{1 \max}]$	[-6.0[m/sec], 6.0[m/sec]]
$[u_{2 \min}, u_{2 \max}]$	[-6.0[m/sec], 6.0[m/sec]]
$\Delta T$	0.1[sec]
$k_n$	1
$l_{\text{times}}$	300
$l_{\text{times}}'$	30

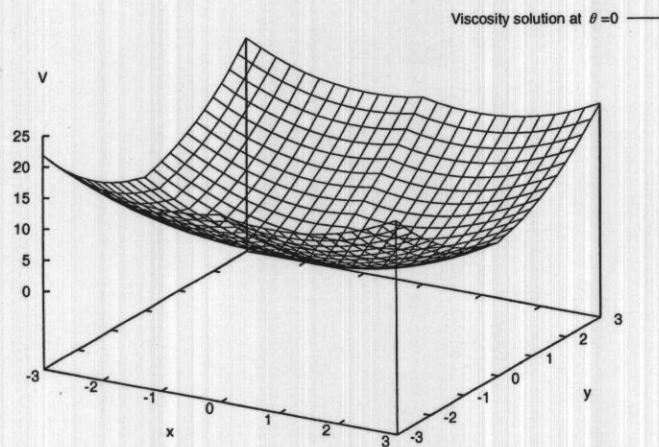
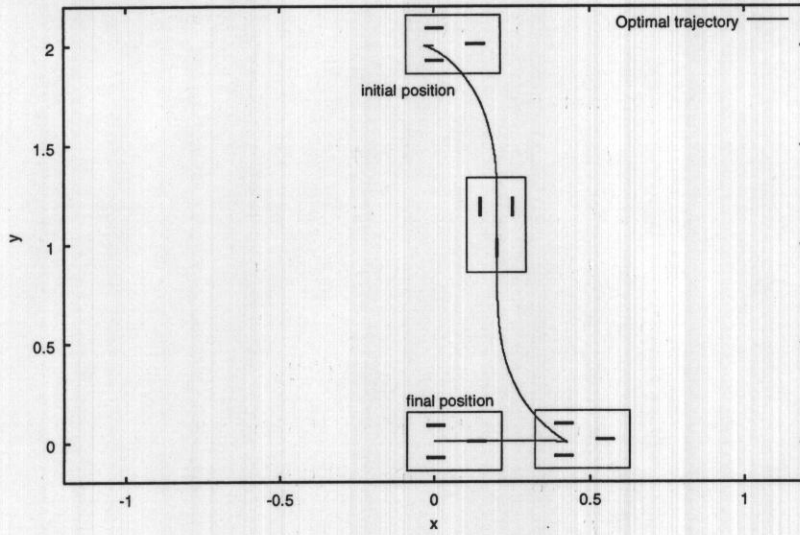
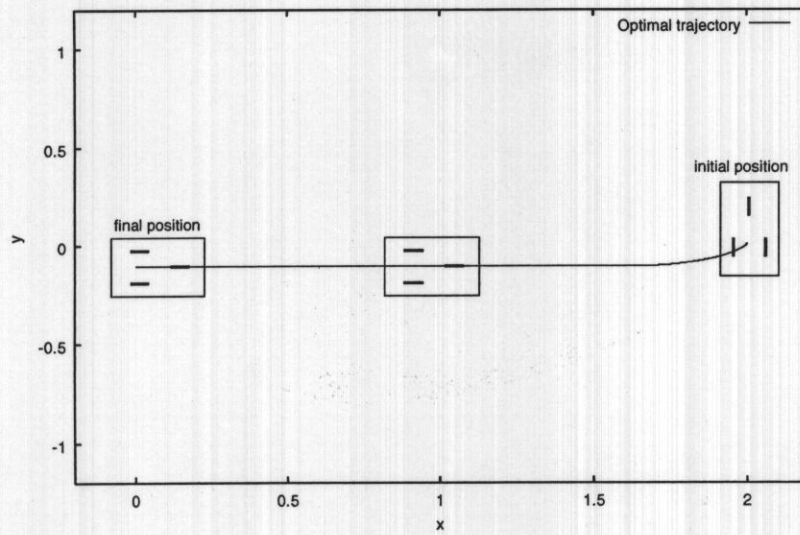


图 10 Viscosity solution at  $\theta = 0$



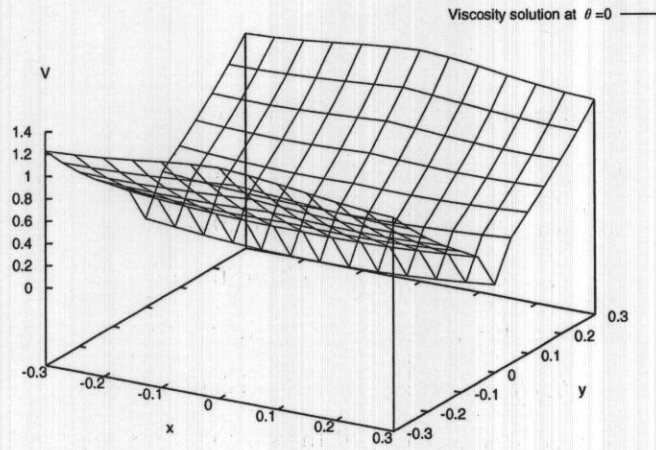
⊠ 11 Optimal trajectory from  $(0, 2, 0)$



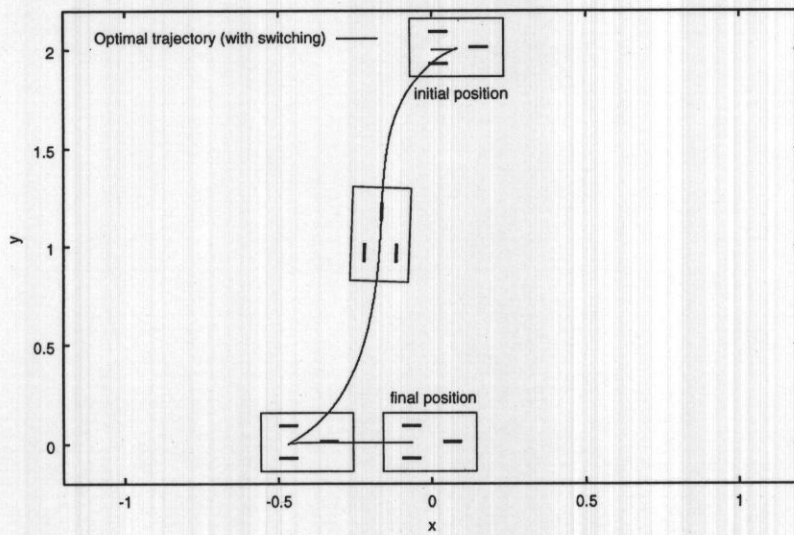
⊠ 12 Optimal trajectory from  $(2, 0, \pi/2)$

表 4 Parameters for dynamic programming principle with random search around the origin

parameter	value
$L$	0.5[m]
$[x_{\min}, x_{\max}]$	[-0.3[m],0.3[m]]
$[y_{\min}, y_{\max}]$	[-0.3[m],0.3[m]]
$[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$	$[-\pi[\text{rad}], \pi[\text{rad}]]$
$\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$	12,12,12
$[u_{1 \min}, u_{1 \max}]$	[-6.0[m/sec],6,0[m/sec]]
$[u_{2 \min}, u_{2 \max}]$	[-6.0[m/sec],6,0[m/sec]]
$\Delta T$	0.1[sec]
$k_n$	1
$l_{\text{times}}$	300
$l_{\text{times}'}$	30



⊗ 13 Viscosity solution at  $\theta = 0$



⊗ 14 Optimal trajectory from  $(0, 2, 0)$

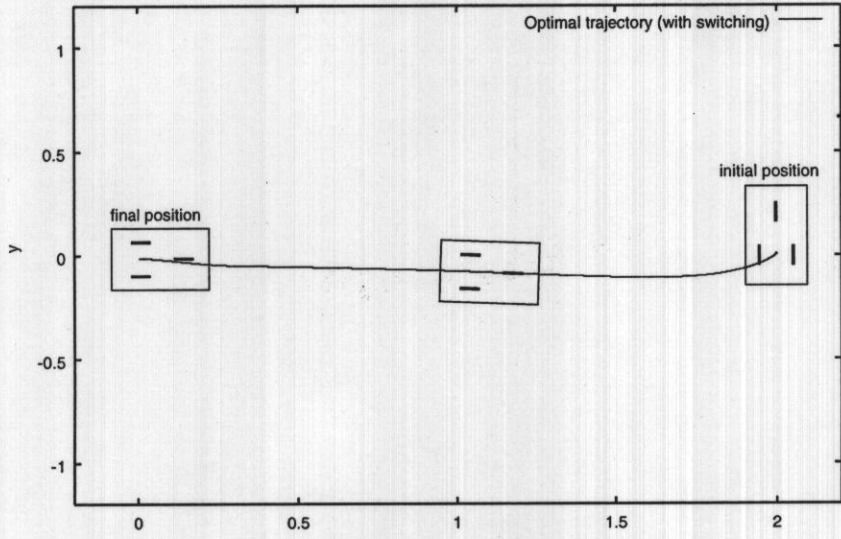


图 15 Optimal trajectory from  $(2, 0, \pi/2)$

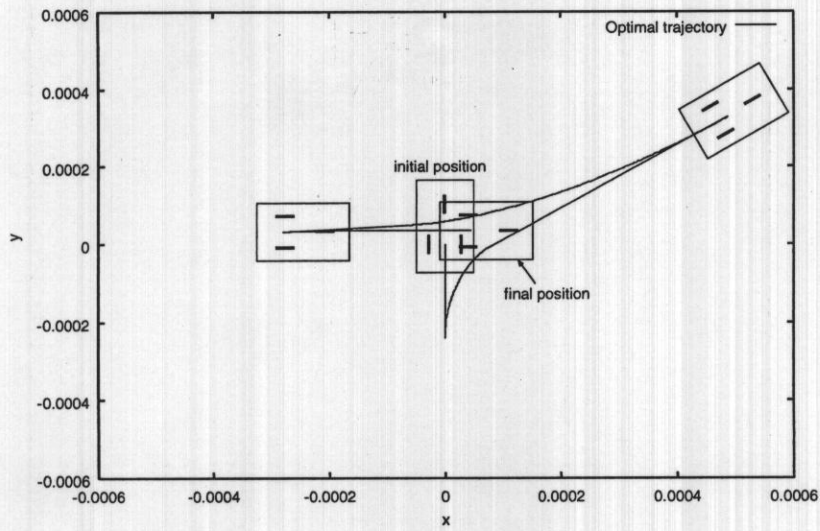
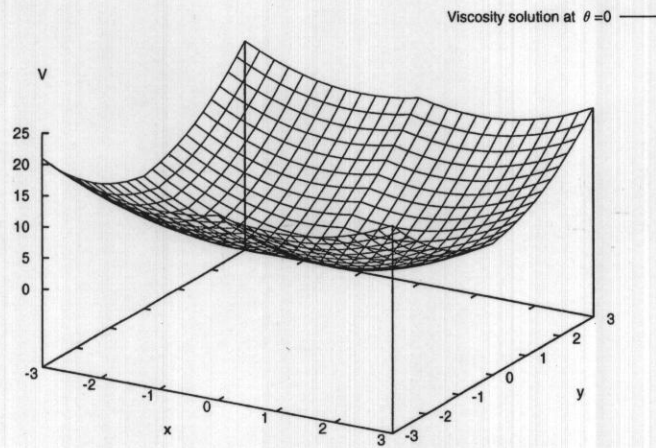
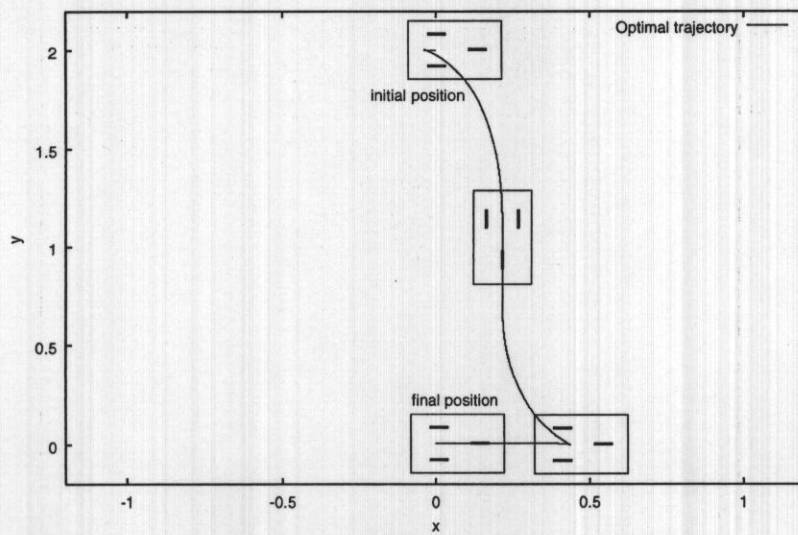


图 16 Optimal trajectory from  $(0, 0, \pi/2)$



⊠ 17 Viscosity solution at  $\theta = 0$  (searched 3 steps forward)



⊠ 18 Optimal trajectory from  $(0, 2, 0)$  (searched 3 steps forward)

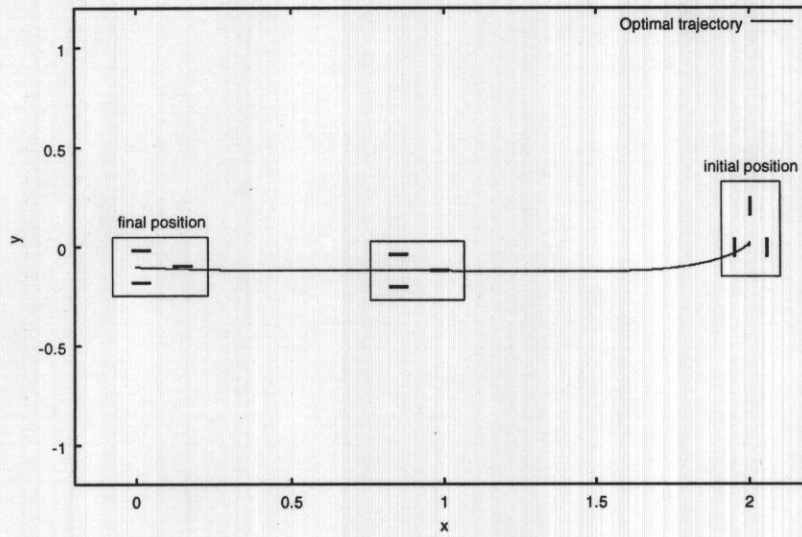


图 19 Optimal trajectory from  $(2, 0, \pi/2)$  (searched 3 steps forward)

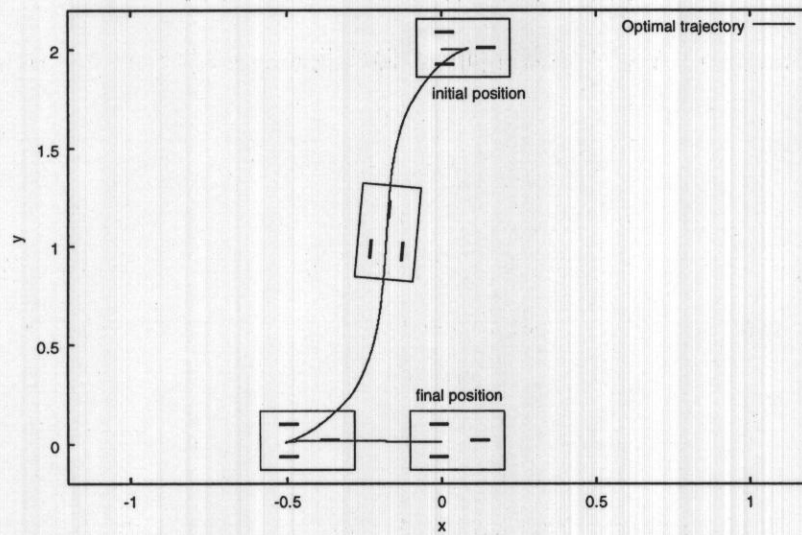


图 20 Optimal trajectory from  $(0, 2, 0)$  (searched 3 steps forward)

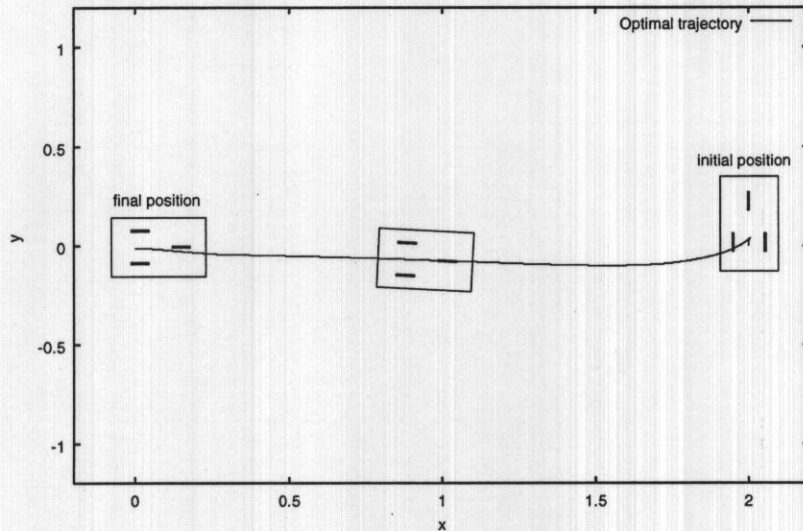


図 21 Optimal trajectory from  $(2, 0, \pi/2)$  (searched 3 steps forward)

### 4.3 障害物がある場合の粘性解を用いた最適制御

ここでは、3.6節の、解を求める範囲内に障害物がある場合の粘性解の計算法を用いて粘性解を計算するシミュレーションをおこなった。シミュレーションに使用したパラメータは、表5のとおりである。なお、4.2節と同様に、計算開始時の  $k_1$  を  $k_1 = 0$  とし、 $k_1 > 10$  となったところで、 $l_{times}$  を  $l_{times}'$  で置きかえた。

図 22は、3.6節における手法を用いて求めた  $\theta = 0$  における粘性解である。 $x \in [-0.5, 0.5] \cap y \in [0.5, 1.0]$  の範囲には障害物があることから、この範囲における粘性解は定義されておらず、 $V$  の値が 0 となっている。 $y < 0$  においては、 $x$  軸上に微分不可能点が存在することが見てとれるが、 $y \geq 1.0$  においては微分不可能点が  $x$  軸上にあるかどうかは明確に見てとることができない。そこで、本節では最適軌道の計算法として 3.5.1節の一次近似の方法のみを用いることとする。

初期値を  $(0, 2, 0)$  としたときの最適軌道は、図 23のようになった。式(153)(154)の制御則のみで障害物を回避し、漸近安定となっていることがわかる。これは、3.6節における手法で求められた粘性解が、障害物を回避できたということを意味



している。

また、初期値を  $(0, 1, \pi/2)$  としたときの最適軌道は、図 24 のようになった。このとき、三輪移動体が障害物に接触しているように見えるが、これは障害物との衝突判定の際に三輪移動体の車幅を考慮せずに、三輪移動体の位置  $x, y$  が式 (229) であらわされる範囲内にあるかどうかのみを判定しているためである。

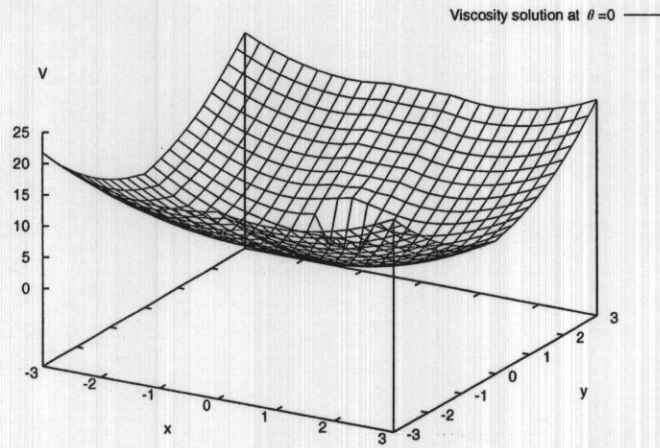
初期値が  $(0, 1.5, \pi/2)$  のときの最適軌道は、図 25 のようになった。この場合は、障害物の中を通過するような軌道となってしまった。これは、粘性解  $V$  は障害物を避けるように計算されているが、3.5.1 節のように粘性解  $V$  の偏微分値を一次近似した場合には、部分的に真の偏微分値とは大きく異なってしまう場合があるということと、微分不可能点が格子点間に存在するためではないかということが考えられる。そこで、軌道が障害物を通過してしまうことをさけるためには

- 障害物内における粘性解の値として、そのまわりの粘性解の値よりも大きい値を仮想的に設定する。これによって、障害物の内部から外部に向かう方向の軌道を得ることができる。
- 最適軌道を計算する際に必要な粘性解の偏微分値を計算する際に、入力  $u_1$  の符号が変化する前の粘性解の値のみを用いて構成したスプライン関数と、符号が変化した後の粘性解の値のみを用いて構成したスプライン関数の交点を微分不可能点として、格子点間の微分不可能点を厳密に求める。

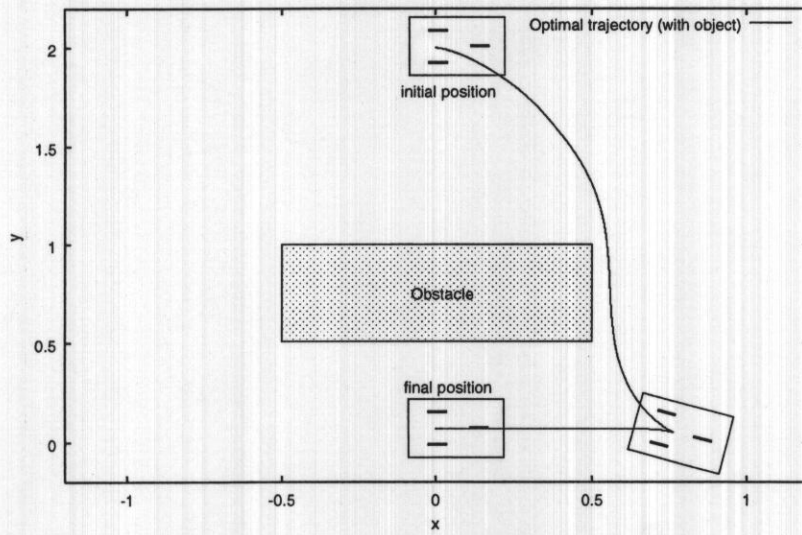
という手法が考えられる。

表 5 Parameters with obstacle

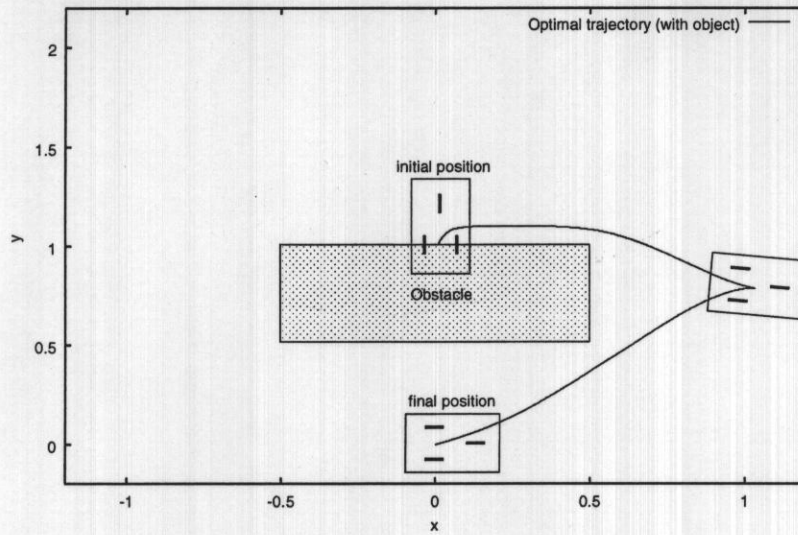
parameter	value
$L$	0.5[m]
$[x_{\min}, x_{\max}]$	[-3.0[m],3.0[m]]
$[y_{\min}, y_{\max}]$	[-3.0[m],3.0[m]]
$[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$	$[-\pi[\text{rad}], \pi[\text{rad}]]$
$\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$	24,24,24
$[u_{1 \min}, u_{1 \max}]$	[-6.0[m/sec],6,0[m/sec]]
$[u_{2 \min}, u_{2 \max}]$	[-6.0[m/sec],6,0[m/sec]]
$[x_{obj \min}, x_{obj \max}]$	[-0.5[m],0.5[m]]
$[y_{obj \min}, y_{obj \max}]$	[0.5[m],1.0[m]]
$\Delta T$	0.1[sec]
$k_n$	1
$l_{times}$	300
$l_{times}'$	30



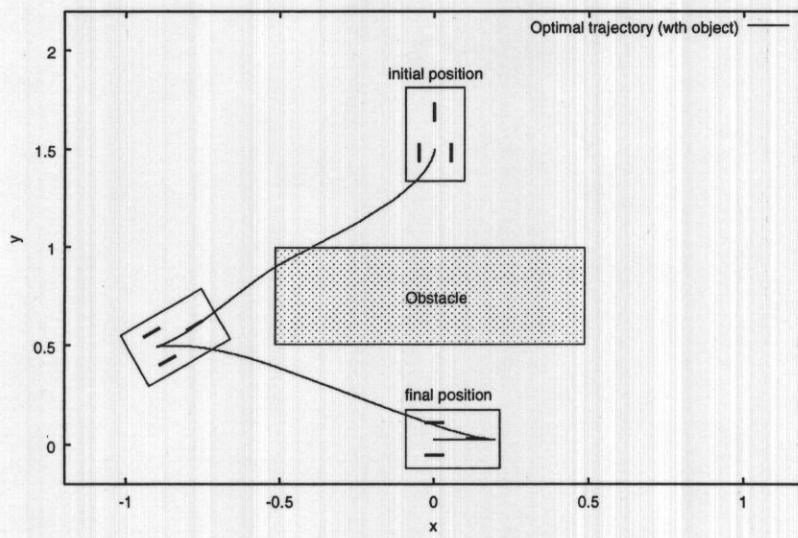
☒ 22 Viscosity solution at  $\theta = 0$



☒ 23 Optimal trajectory from  $(0, 2, 0)$



☒ 24 Optimal trajectory from  $(0, 1, \pi/2)$



☒ 25 Optimal trajectory from  $(0, 1.5, \pi/2)$

#### 4.4 計算時間の比較およびシミュレーション結果の考察

粘性解の計算にかかった時間を表6にまとめた。表1,2の動的計画法による粘性解の計算法では、計算が終了するまでに6日以上かかっている。これは、各格子点において、解を求めるすべての範囲内にたいして移動するためのコストを計算しているからである。あきらかに最適解がないと思われる部分にかんしても、最適解があると思われる部分の探索とまったく同じに探索をおこなうことから、その分計算にかかる時間も多くなるということである。

それにたいし、表3,4のランダム探索を用いた動的計画法による粘性解の計算法では、それぞれ2時間を切る計算時間となり、大幅に計算時間が短縮されている。これは、最適解に近い値が得られた後は、最適解がない部分まで無駄に探索することはないので、動的計画法による計算法にくらべて大きく減少するからである。また、この計算方法では、現在の最適解よりも値が大きくなる方向にすすむことはなく、解は収束する。ただし、入力をランダムに発生させることから、発生した入力完全にランダムではなくある種の規則性をもっているような精度の悪いものである場合には、探索範囲がある特定の領域に限られ、得られる粘性解の精度が悪くなる可能性がある。できるだけ完全な乱数に近い乱数発生関数を用いることが望ましい。

また、表5の障害物がある場合の粘性解の計算においては、表3の計算時間に障害物との衝突判定にかかる時間が加わっていることから若干計算時間が延びているが、それでも2時間19分と、動的計画法を用いた計算法にくらべて、はるかに短い時間で粘性解を求めることが可能となっている。3.4.2節の手法では3.4.1節の動的計画法による計算法にくらべて計算時間が非常に短いことから、複数の障害物がある場合など、粘性解を計算する際にさらに多くの条件を考慮する必要がある場合に利用できる。

本論文で提案した、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を求める手法の特徴をまとめると、以下のようなになる。

##### 動的計画法による粘性解の計算法 (3.4.1節)

- 解を求める範囲内に構成した格子点のそれぞれにおいて、解を求める範囲

内のすべてにたいして最適解の探索をおこなうことから、求めた粘性解は厳密なものであるが、計算時間がかかる。

#### ランダム探索を用いた動的計画法による粘性解の計算法 (3.4.2節)

- 最適解の探索の際に、最適解がない部分の探索を何度もくりかえしおこなうことがないので、計算時間が短い。得られた粘性解の精度も、シミュレーションの結果により、動的計画法により求めた粘性解と同様の、精度の良いものとなることがわかった。
- 探索の際にランダムに発生した入力を用いて探索をおこなうことから、乱数発生関数が周期性をもつような精度の悪いものである場合、得られる粘性解の精度が悪いものとなる可能性がある。

#### 障害物がある場合の粘性解の計算法 (3.6節)

- 3.4.2節の最適解の探索に、障害物との衝突判定を加えることによって得られた粘性解を用いて最適制御則を計算することにより、障害物を回避するような最適軌道を得ることができる。

表 6 Calculation time

used parameter	time[hour:min]
Table 1	(over 6 days)
Table 2	(over 6 days)
Table 3	1:40
Table 4	1:00
Table 5	2:19

## 5. おわりに

本論文では、非線形系における2つの特異性について扱った。第一が、Hamiltonian を入力にかんして最小化することのできない非線形非標準  $H_\infty$  制御問題であり、第二が Hamilton-Jacobi 偏微分方程式がなめらかな解をもたない、ノンホロノミックシステムの制御問題である。

2章では、 $w$  から  $z$  までの直達項  $j_{12}(x)$  と、 $u$  から  $y$  までの直達項  $j_{21}(x)$  がフルランクではないという非標準  $H_\infty$  制御問題を考え、この問題が可解となるための十分条件を導いた。

3章では、ノンホロノミックシステムの最適制御問題についてあつかった。ノンホロノミックシステムのひとつとして具体的に三輪移動体を取りあげ、最適レギュレータを構成することを目的として、その際に必要な Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解として、微分不可能点をもつことを許した大域的な唯一の解である粘性解を求める手法について提案した。まず動的計画法により粘性解を求める手法を提案し、次にランダム探索を用いて計算速度を短縮させる手法について提案した。

続いて、このようにして得られた粘性解を用いて最適制御則を計算する二つの手法を提案した。まず、粘性解の偏微分値を一次近似により計算する手法を提案した。そして、粘性解の偏微分値が不連続となるように、粘性解の微分不可能点を考慮してスプライン関数を構成して最適制御則を構成する手法を提案した。

また、これらの手法を応用し、三輪移動体の移動できる範囲内に障害物がある場合の粘性解の計算法を提案した。そして、不確かさを含んだ三輪移動体のモデルにたいして非線形  $H_\infty$  制御を適用し、最適制御則を計算する際に必要な Hamilton-Jacobi-Isaacs 偏微分方程式の粘性解を計算する手法についても提案した。

4章では、提案した手法を用いて三輪移動体の最適制御のシミュレーションをおこない、それぞれの手法の特徴についての考察をおこなった。そして得られた結果から、本論文で提案する手法の有効性を確認した。

本論文で提案した Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解の計算法は、計算時間および得られた粘性解を記憶する容量が、粘性解を求める範囲や格子点の数に依存するという問題点はあるが、さまざまなノンホロノミックシステムにたいし

て最適レギュレータを構成することに応用できる。特に、リンクの数よりもアクチュエータの数が少ない Under Actuated Manipulator とよばれる系は、ドリフト項をもつことから入力が0のときにも状態が変化し制御が困難であるが、最適レギュレータを構成し、粘性解を用いて不連続フィードバック則を計算することで漸近安定とすることが期待できる。このような系における Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解の計算および最適レギュレータの構成を、今後の課題のひとつであると考えている。



## 謝辞

指導教官としてご指導をいただくとともに、多くの有用な助言をいただいた、奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科 西谷紘一教授に厚く御礼を申し上げます。

また、研究の細部にわたる丁寧なご指導および助言をいただいた、奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科 山下裕助教授に厚く御礼を申し上げます。

そして、本論文の論文審査委員であります、奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科 高橋豊教授、奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科 小笠原司教授に厚く御礼を申し上げます。

## 参考文献

- [1] A. J. van der Schaft:  $L_2$  gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback  $H_\infty$  control, IEEE Trans. Autom. Contr., 37, pp.770-784, 1992.
- [2] A. Isidori and A. Astolfi: Disturbance attenuation and  $H_\infty$ -control via measurement feedback in nonlinear systems, IEEE Trans. Autom. Contr., 37, pp.1283-1293, 1992.
- [3] K. Zhou and P. P. Khargonekar: An algebraic Riccati equation approach to  $H^\infty$  optimization, Syst. Contr. Lett., vol.11, pp.85-91, 1988.
- [4] M. Sampei, T. Mita and M. Nakamichi: An algebraic Riccati equation approach to  $H^\infty$  optimization, Syst. Contr. Lett., vol.14, pp.13-24, 1990.
- [5] J. C. Willems: Dissipative dynamical systems, part I: general theory, Arch. Rat. Mech. Anal., 45, pp.321-351, 1992.
- [6] A. Isidori:  $H_\infty$  control via measurement feedback for affine nonlinear systems, Int. J. of Robust and Control, vol. 4, pp.553-574, 1994.
- [7] W. C. Maas and A. J. van der Schaft: Singular nonlinear  $H_\infty$  optimal control problem, Int. J. of Robust and Control, vol. 6, pp.669-689, 1996.
- [8] 島公脩、石動善久、山下裕、渡邊昭義、川村武、横道政裕：非線形システム制御論，コロナ社，1997.
- [9] 今福啓、山下裕、西谷紘一：非線形非標準  $H_\infty$  制御問題，計測自動制御学会論文集，vol.35, no.1, pp.59-65, 1999.
- [10] 今福啓：非線形非標準  $H_\infty$  制御問題に対する解法，奈良先端科学技術大学院大学修士論文，1997.

- [11] M. G. Crandall and P. L. Lions: Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Amer. Math. Soc., vol.277, no.1, pp.1-42, 1983.
- [12] 石井仁司: 非線形偏微分方程式の粘性解について, 数学, 46, pp.144-157, 1994.
- [13] 石井仁司: 粘性解とその応用, 数学, 47, pp.97-110, 1995.
- [14] Brockett, R. W.: Asymptotic stability and feedback stabilization, in differential geometric control theory, (R. Brockett, R. Millman, and H. Sussman, eds.), vol.27 of Progress in Mathematics, pp.181-208, 1983.
- [15] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta: Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations, Birkhäuser, Boston, 1997.
- [16] 中村仁彦: 非ホロノミックロボットシステム, 講座全5回, 日本ロボット学会誌, 11-4 ~ 7, 12-2, 1993 ~ 1994.
- [17] 三平満司: 非ホロノミック系のフィードバック制御, 計測と制御, vol.36, no.6, pp.396-403, 1997.
- [18] 三平満司、伊藤毅: 非線形制御理論を用いた車両の経路追従と移動計画, システム制御情報学会論文誌, vol.6, no.1, pp.37-47, 1993.
- [19] A. Astolfi: Discontinuous control of nonholonomic systems, Syst. Contr. Lett., 27, pp.37-45, 1996.
- [20] 成清辰生、杉田澄雄: Chained Form で記述された非ホロノミック系の指数安定化, 計測自動制御学会論文誌, vol.32, no.8, pp.1310-1312, 1996.
- [21] 今福啓、山下裕、西谷紘一: Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を用いた三輪移動体の制御, 日本ロボット学会誌, vol.17, no.4, 1999(掲載予定).
- [22] H. J. Kushner and P. Dupuis: Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time, Springer-Verlag, New York, 1992.

- [23] W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [24] 市田浩三、吉本富士市：スプライン関数とその応用, 教育出版, 1979.

## 付録

### A. 有限差分近似法

Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を求める別の手法として、有限差分近似法とよばれる手法がある [22][23]。ここでは、三輪移動体にたいして最適レギュレータを構成する際に必要となる Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を、有限差分近似法により求める手法をまとめる。

#### A.1 有限差分近似法を用いた三輪移動体におけるハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解の計算法

式 (146) であらわされる三輪移動体にたいして、次の評価関数を最小化することを考える。

$$J = \int_0^{t_f} (\phi^T \phi + u^T u) dt + L_f(\phi(t_f)) \quad (283)$$

ここで、 $L_f(\phi(t_f))$  は、最終時刻における状態の関数であり、 $L_f(0) = 0$  とする。すなわち、この評価関数は、 $t_f \rightarrow \infty$  とすることによって式 (151) の評価関数と一致する。

また、式 (283) の最小値を、次のように定義する。

$$V(t, \phi) = \min_u J \quad (284)$$

式 (283) の評価関数が、有限の区間  $t \in [0, t_f]$  における状態  $\phi$  と入力  $u$  を評価していることから、この最小値は時間の関数となる。 $t_f \rightarrow \infty$  とすることによって、これは  $\phi$  のみの関数となる。

式 (284) を、初期時刻を  $t_0$  として、次のように変形する。

$$V(t_0, \phi) = \min_u \left( V(t_1, \phi) + \int_{t_0}^{t_1} (\phi^T \phi + u^T u) dt \right) \quad (285)$$

ここで、 $V$  が  $t$  と  $\phi$  の関数であることを考慮して  $t_1 \rightarrow t_0$  とすることによって

$$H(t_0, \phi, \frac{\partial V}{\partial \phi}, u) = \min_u \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \dot{x} + \phi^T \phi + u^T u \right) = 0 \quad (286)$$

となる。これを  $u$  にかんして偏微分して整理することにより、式(153)(154)の最適制御則が計算できる。このとき、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式は

$$\begin{aligned} H(t_0, \phi, \frac{\partial V}{\partial \phi}) &= \min_u \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta u_1 + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta u_1 + \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{L} u_2 \right. \\ &\quad \left. + x^2 + y^2 + \theta^2 + u_1^2 + u_2^2 \right) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta \sin \theta + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{L^2} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 \right\} + x^2 + y^2 + \theta^2 = 0 \end{aligned} \quad (287)$$

となることから、有限差分近似法を用いてこの粘性解  $V(t_0, \phi) (\geq 0, V(t_0, 0) = 0)$  を求める。

有限差分近似法を適用するにあたり、まずは粘性解を求める範囲を、原点と原点に可到達な範囲を含むように式(158)(159)(160)のように決定し、この範囲内に式(164)(165)(166)のように格子を構成する。また、入力  $u_1, u_2$  の範囲を、それぞれ式(179)(175)のように決定する。

次に、格子点  $(x_i, y_m, \theta_n)$  において、有限差分近似法を用いて粘性解を計算する。有限差分近似法では、式(287)の  $V$  に関する偏微分項を一次近似する。まずは離散化時間を  $\Delta T$  として、以下のような近似をおこなう。

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_d(t_0, \phi) - V_d(t_0 - \Delta T, \phi)}{\Delta T} \quad (288)$$

$V_d$  は、 $V$  を離散化した値である。次に、状態にかんする偏微分項を一次近似する。このとき、偏微分項にかかる関数の符号におうじて、次のように近似をおこなう。

$$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \begin{cases} \frac{V_d(t_0, x_i + \Delta x, y_m, \theta_n) - V_d(t_0, x_i, y_m, \theta_n)}{\Delta x} & (\cos \theta u_1 \geq 0) \\ \frac{V_d(t_0, x_i, y_m, \theta_n) - V_d(t_0, x_i - \Delta x, y_m, \theta_n)}{\Delta x} & (\cos \theta u_1 < 0) \end{cases} \quad (289)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \approx \begin{cases} \frac{V_d(t_0, x_i, y_m + \Delta y, \theta_n) - V_d(t_0, x_i, y_m, \theta_n)}{\Delta y} & (\sin \theta u_1 \geq 0) \\ \frac{V_d(t_0, x_i, y_m, \theta_n) - V_d(t_0, x_i, y_m, -\Delta y, \theta_n)}{\Delta y} & (\sin \theta u_1 < 0) \end{cases} \quad (290)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} \approx \begin{cases} \frac{V_d(t_0, x_i, y_m, \theta_n + \Delta \theta) - V_d(t_0, x_i, y_m, \theta_n)}{\Delta \theta} & (\frac{1}{L} u_2 \geq 0) \\ \frac{V_d(t_0, x_i, y_m, \theta_n) - V_d(t_0, x_i, y_m, \theta_n - \Delta \theta)}{\Delta \theta} & (\frac{1}{L} u_2 < 0) \end{cases} \quad (291)$$

なお、有限差分近似法による計算が収束するためには、次の条件を満たしている必要がある。

$$\Delta T(\Delta x |\cos \theta \cdot u_1| + \Delta y |\sin \theta \cdot u_1| + \Delta \theta \left| \frac{1}{L} u_2 \right|) \Delta x \leq \Delta x^2 \quad (292)$$

このとき、式(287)を整理することにより、点 $(x_l, y_m, \theta_n)$ における $V_d$ は、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} & V_d(t_0 - \Delta T, \phi) \\ &= \min_u \left\{ V_d(t_0, \phi) \right. \\ & \quad + \left( \frac{V_d(t_0, x_l + \Delta x, y_m, \theta_n)}{\Delta x} (\cos \theta u_1)_+ + \frac{V_d(t_0, x_l, y_m + \Delta y, \theta_n)}{\Delta y} (\sin \theta u_1)_+ \right. \\ & \quad + \frac{V_d(t_0, x_l, y_m, \theta + \Delta \theta)}{\Delta \theta} \left( \frac{1}{L} u_2 \right)_+ \\ & \quad + \frac{V_d(t_0, x_l - \Delta x, y_m, \theta_n)}{\Delta x} (\cos \theta u_1)_- + \frac{V_d(t_0, x_l, y_m - \Delta y, \theta_n)}{\Delta y} (\sin \theta u_1)_- \\ & \quad + \frac{V_d(t_0, x_l, y_m, \theta - \Delta \theta)}{\Delta \theta} \left( \frac{1}{L} u_2 \right)_- \\ & \quad - \frac{V_d(t_0, x_l, y_m, \theta_n)}{\Delta x} |\cos \theta u_1| + \frac{V_d(t_0, x_l, y_m, \theta_n)}{\Delta y} |\sin \theta u_1| \\ & \quad \left. - \frac{V_d(t_0, x_l, y_m, \theta)}{\Delta \theta} \left| \frac{1}{L} u_2 \right| \right. \\ & \quad \left. + x^2 + y^2 + \theta^2 + u_1^2 + u_2^2 \right) \Delta T \left. \right\} \quad (293) \end{aligned}$$

ここで、 $(\cdot)_+$ ,  $(\cdot)_-$  は

$$(\cdot)_+ = \begin{cases} \cdot & (\cdot \geq 0) \\ 0 & (\cdot < 0) \end{cases} \quad (294)$$

$$(\cdot)_- = \begin{cases} \cdot & (\cdot \leq 0) \\ 0 & (\cdot > 0) \end{cases} \quad (295)$$

である。

式(293)を満たす入力 $u_1, u_2$ の探索は、式(179)(175)の範囲をそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2$

分割して範囲内の入力を

$$u_{1i} = u_{1\min} + \frac{u_{1\max} - u_{1\min}}{\lambda_1} i, \quad (i = 0, \dots, \lambda_1) \quad (296)$$

$$u_{2j} = u_{2\min} + \frac{u_{2\max} - u_{2\min}}{\lambda_2} j, \quad (j = 0, \dots, \lambda_2) \quad (297)$$

とあらわし、 $u_{1i}, u_{2j}$  を式(293)に代入して右辺を計算する。これを  $i = 0, \dots, \lambda_1$ ,  $j = 0, \dots, \lambda_2$  にかんしてくりかえし、式(293)の右辺を最小とするものを、点  $(x_l, y_m, \theta_n)$  における  $V_d(t_0 - \Delta T, \phi)$  として記憶する。

これを粘性解を求める範囲内のすべての格子点においておこない、すべての格子点における  $V_d(t_0 - \Delta T, \phi)$  と  $V_d(t_0, \phi)$  の値の差が十分小さくなるまでくりかえす。この差が十分に小さくなったならば、 $V_d(t_0 - \Delta T, \phi)$  を求める粘性解として終了する。

以上をまとめると、有限差分近似法による粘性解の計算法は、次のようになる。

**Step 1** 粘性解を求める  $(x, y, \theta)$  の範囲を、式(158)(159)(160)のように原点と原点に可到達な領域を含むように決定する。そしてこの  $(x, y, \theta)$  の範囲をそれぞれ  $\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$  分割し、式(164)(165)(166)のように格子を構成する。

**Step 2** 入力  $u_1, u_2$  の範囲を、それぞれ式(179)(175)のように決定する。

**Step 3**  $u_1, u_2$  にそれぞれ式(296)(297)であらわされる  $u_{1i}, u_{2j}$  を代入し、式(293)の右辺を計算する。これを  $i = 0, \dots, \lambda_1, j = 0, \dots, \lambda_2$  にかんしてくりかえし、式(293)を満たす値を、点  $(x_l, y_m, \theta_n)$  における  $V_d$  として記憶する。

**Step 4** **Step 3** を粘性解を求めるすべての範囲内の格子点においておこなう。そして  $V_d(t_0 - \Delta T, \phi)$  と  $V_d(t_0, \phi)$  の値の差が十分に小さくなったならば、 $V_d(t_0 - \Delta T, \phi)$  を求める粘性解として計算を終了する。そうでなければ、**Step 3** にもどる。

式(292)の収束条件を満たすような時間間隔  $\Delta T$  および格子間隔  $\Delta x, \Delta y, \Delta \theta$  を考える際には、入力の上限、下限も収束条件に関係してくることから、この値も含めて収束条件を満たすように決定する必要がある。



## A.2 シミュレーション結果

三輪移動体に最適レギュレータを構成する際に必要な Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を、有限差分近似法により計算するシミュレーションをおこなった。使用したコンピュータは AlphaServer8400 であり、C 言語によるプログラムを用いた。

シミュレーションに使用したパラメータは表 7 のとおりである。なお、ここでは  $\Delta T = 0.01[\text{sec}]$  とした。これは 4 節において用いた  $\Delta T = 0.1[\text{sec}]$  では

$$\Delta x = 2.5, \Delta y = 2.5, \Delta \theta = 2.62 \quad (298)$$

$$|\cos \theta u_1| \leq 6.0, |\sin \theta u_1| \leq 6.0, \left| \frac{1}{L} u_2 \right| \leq 12.0 \quad (299)$$

であることから

$$\Delta T (\Delta x |\cos \theta \cdot u_1| + \Delta y |\sin \theta \cdot u_1| + \Delta \theta \left| \frac{1}{L} u_2 \right|) \Delta x \leq 0.6144 \quad (300)$$

$$\Delta x^2 = 0.0625 \quad (301)$$

となり、式 (292) の収束条件を満たさないからである。なお、表 7 において用いた  $\Delta T = 0.01[\text{sec}]$  の場合には

$$\Delta T (\Delta x |\cos \theta \cdot u_1| + \Delta y |\sin \theta \cdot u_1| + \Delta \theta \left| \frac{1}{L} u_2 \right|) \Delta x \leq 0.06144 \quad (302)$$

となることから、式 (292) の収束条件を満たす。

図 26 は、有限差分近似法により求められた Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解である。図 3,10 と同様に、 $x$  軸および  $y$  軸上に微分不可能点を見てとることができ、これが粘性解となっていることがわかる。

有限差分近似法を用いた粘性解の計算にかかった時間は、29 時間 56 分であった。表 6 より、この計算時間は 3.4.1 節の動的計画法による粘性解の計算にかかった時間よりは早いですが、3.4.2 節のランダム探索を用いた動的計画法による粘性解の計算時間よりもだいぶ長くなっている。この結果によっても、3.4.2 節の手法が有効であることがわかる。

得られた粘性解を用いて、最適軌道を計算した。ここでは、3.5.1 節における最適制御則の計算法を用いてシミュレーションをおこなった。初期値を  $(0, 2, 0)$  と

した場合の最適軌道は、図 27 のようになった。原点近傍において  $y$  方向にオフセットが生じていることがわかる。これは、 $\Delta T = 0.01$  としたことにより、表 7 で設定した入力範囲が、 $\Delta T = 0.1$  である表 1,3 で設定した入力範囲よりもせまくなってしまふからである。すなわち、厳密にはより遠い状態に移動するのが最適であるとしても、探索範囲がせまいことにより、現在の状態の近傍においては最適であるような解を最適解としてしまうためであると考えられる。

また、初期値が  $(2, 0, \pi/2)$  の場合の最適軌道は、図 28 のようになった。図 5,12 と同様に、 $y$  にオフセットが生じている。これは、4.1 節および 4.2 節において、初期値を  $(2, 0, \pi/2)$  としておこなったシミュレーション結果の考察において述べた理由によるものと考えられる。

表 7 Parameters for finite difference numerical approximation

parameter	value
$L$	0.5[m]
$[x_{\min}, x_{\max}]$	[-3.0[m], 3.0[m]]
$[y_{\min}, y_{\max}]$	[-3.0[m], 3.0[m]]
$[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$	$[-\pi[\text{rad}], \pi[\text{rad}]]$
$\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$	24, 24, 24
$[u_{1 \min}, u_{1 \max}]$	[-6.0[m/sec], 6.0[m/sec]]
$[u_{2 \min}, u_{2 \max}]$	[-6.0[m/sec], 6.0[m/sec]]
$\Delta T$	0.01[sec]

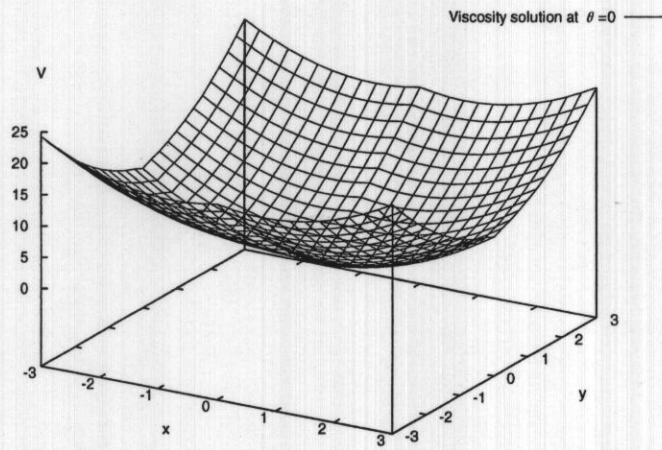


图 26 Viscosity solution at  $\theta = 0$

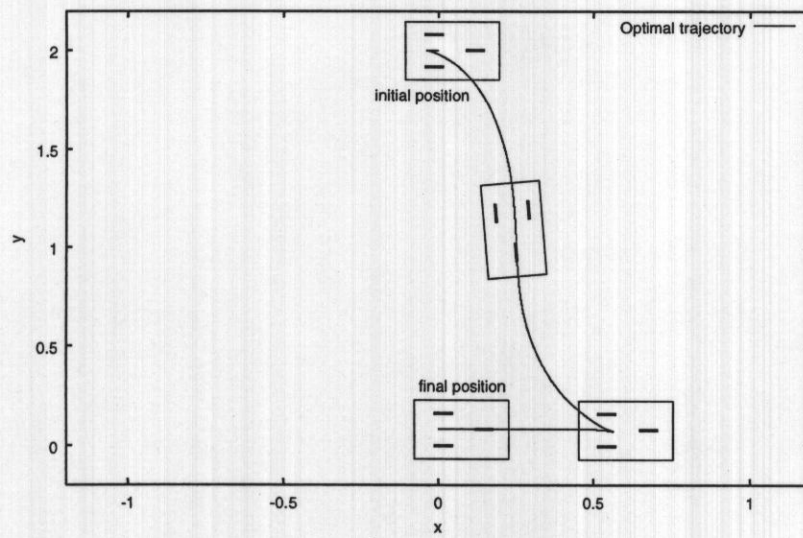
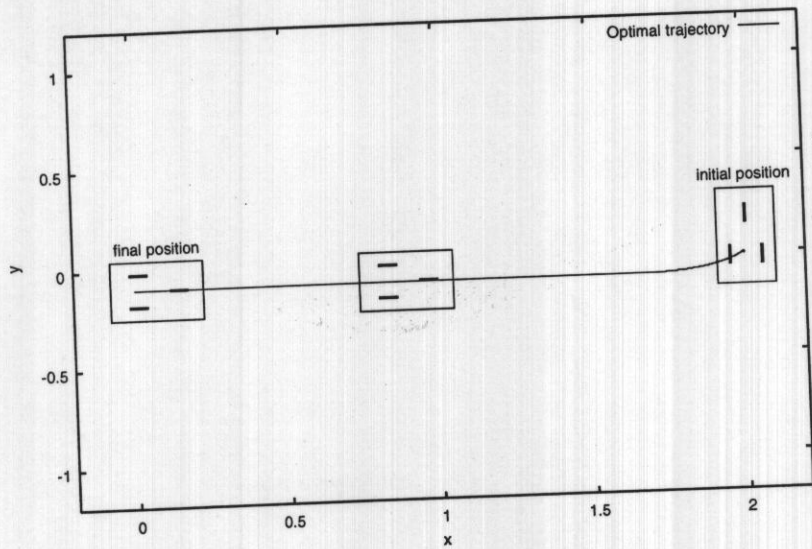


图 27 Optimal trajectory from  $(0, 2, 0)$



☒ 28 Optimal trajectory from  $(2, 0, \pi/2)$