

NAIST-IS-DD0361010

博士論文

入力制約付き非線形システムに対する  
制御則設計および解析

喜種 奈美

2006年3月17日

奈良先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科 情報システム学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に  
博士(工学) 授与の要件として提出した博士論文である。

喜種 奈美

審査委員：

西谷 紘一 教授 (主指導教員)

山下 裕 教授 (副指導教員, 北海道大学)

杉本 謙二 教授 (副指導教員)

# 入力制約付き非線形システムに対する 制御則設計および解析\*

喜種 奈美

## 内容梗概

実際のシステムの多くは非線形であり，アクチュエータの性能限界や制御対象保護のため入力に制約が存在する．PID 制御器やスライディングモード制御器は入力制約を考慮せずに設計されているため，パラメータチューニングに大変な労力がかかる．制御則の構築を容易にするためには，非線形性や入力制約を陽に取り扱う必要がある．また，制御則はモデル化誤差や外乱に対してロバストであることが求められる．本論文では，滑らかな局所制御 Lyapunov 関数を用いて，入力制約付き非線形システムに対するロバスト制御則を提案する．

制御 Lyapunov 関数を用いた設計法は，<Step 1> 制御 Lyapunov 関数の設計，および <Step 2> 原点以外で制御 Lyapunov 関数を減少させることによる安定化制御則の設計の二段階からなる．制御 Lyapunov 関数の設計は非常に難しい問題であるが，厳密な線形化やバックステッピングなどの手法が知られている．本論文では，局所制御 Lyapunov 関数はこれらの手法によって得られていると仮定して，Step 2 の制御則設計問題に焦点をあてる．まず，漸近安定化可能領域を明らかにし，局所制御 Lyapunov 関数の微分の下限を与える入力を求める．つぎに，Malisoff の制御則の一般化を行う．入力の拘束される空間が超多面体でない場合，一般化された制御則は原点以外で連続になる．しかし，入力空間が超多面体の場合，制御則は不連続になる恐れがある．そこで，どんな場合も原点以外で連続になるように制御則を改良する．

---

\*奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報システム学専攻 博士論文, NAIST-IS-DD0361010, 2006年3月17日.

逆最適問題はロバスト制御則設計において重要な役割を果たす．逆最適制御則のセクタ余裕の下限は入力方向ベクトルによって決まることを明らかにし，セクタ余裕によってロバスト性を保証するため逆最適制御則を設計する．入力制約がある場合，セクタ余裕が大きいとき吸引領域は狭くなり，セクタ余裕が小さいとき吸引領域は広がる．すなわち，入力制約のもとでは，セクタ余裕と吸引領域はトレードオフの関係にある．そのため，逆最適制御則が十分なセクタ余裕を持たなかったり，逆最適制御則の存在する領域が狭くなることがある．そこで，セクタ余裕と吸引領域を適切に調節するため，ロバスト制御則を設計する．

連続な漸近安定化制御則の存在は，小入力特性を満たす制御 Lyapunov 関数の存在に依存する．小入力特性を満たす制御 Lyapunov 関数が存在するための条件を最後に示す．

## キーワード

非線形システム，入力制約，制御 Lyapunov 関数，小入力特性，制御則設計

# Controller Design and Analysis for Nonlinear Systems with Input Constraints\*

Nami Kidane

## Abstract

Most of actual systems are nonlinear and have input constraints due to the performance limits of actuators and for protection of the systems. Parameter tuning for PID or sliding-mode controllers is hard work because input constraints are not considered in the design schemes. Easy construction of controllers demands consideration of nonlinearity and input constraints. Moreover, controllers must be robust against modeling errors and disturbances. In this dissertation, robust controllers for nonlinear systems with input constraints are proposed by using smooth local control Lyapunov functions.

Control-Lyapunov-based design scheme consists of two steps: In Step 1, we construct a control Lyapunov function, then in Step 2, we design a stabilizing controller by decreasing the control Lyapunov function everywhere except the origin. Although the first issue is very difficult, we can employ several methods; e.g. exact linearization and backstepping. In this dissertation, the second issue is focused under the assumption that a local control Lyapunov function is obtained by these methods. First, an asymptotical stabilizable domain is clarified, and an input that gives the infimum of the derivative of a local control Lyapunov function is obtained. Second, generalized Malisoff's controller is provided. If the input space is not a hyper-polyhedron, the generalized controller is continuous except

---

\*Doctoral Dissertation, Department of Information Systems, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, NAIST-IS-DD0361010, March 17, 2006.

the origin. If a hyper-polyhedron, however, the controller may be discontinuous. Then, an improved controller is proposed. It is continuous except the origin in any case.

Inverse optimal problem plays an important role in robust controller design. It is discovered that directional vectors of inverse optimal controllers determine the lower limits of sector margins, and inverse optimal controllers are provided to guarantee the robustness by the sector margin. In case of input constraints, domains of attraction become small if controllers achieve large sector margins, and become large if small sector margins. Namely, sector margins and domains of attraction have trade-off relations under input constraints. Hence, inverse optimal controllers may not hold enough sector margins, or domains of inverse optimal controllers may be small. Then, robust controllers are composed in order to adjust sector margins and domains of attraction.

The existence of continuous asymptotic stabilizers depends on the existence of control Lyapunov functions with the small control property. Conditions for the existence of control Lyapunov functions with the small control property are clarified, finally.

**Keywords:**

nonlinear system, input constraint, control Lyapunov function, small control property, controller design

# 目次

|  |    |
|--|----|
| 1. はじめに  | 1  |
| 2. 準備  | 5  |
| 2.1 数学的準備  | 5  |
| 2.2 制御 Lyapunov 関数と安定性                                   | 7  |
| 2.3 (準) 普遍制御則とセクタ余裕                                      | 11 |
| 2.4 最適制御と逆最適制御   | 13 |
| 2.5 同次システムと同次制御 Lyapunov 関数                              | 17 |
| 3. 準普遍制御則の設計   | 19 |
| 3.1 入力制約 $u \in U_k^1$ のもとでの漸近安定化可能領域                    | 19 |
| 3.2 入力空間の閉包内で微分 $\dot{V}(x, u)$ を最小化する入力                 | 20 |
| 3.3 定数 $1 < k < \infty$ に対する準普遍制御則                       | 24 |
| 3.4 Malisoff の普遍制御則との比較                                  | 28 |
| 3.5 任意の定数 $k \geq 1$ に対する準普遍制御則                          | 29 |
| 3.6 シミュレーション   | 36 |
| 3.7 まとめ  | 42 |
| 4. 逆最適制御則の設計   | 45 |
| 4.1 定数 $1 < k < \infty$ に対する準普遍制御則と同じ方向ベクトルを持つ<br>逆最適制御則 | 45 |
| 4.1.1 評価関数とセクタ余裕   | 45 |
| 4.1.2 入力制約 $u \in U_k^1$ のもとで逆最適制御則が存在する領域               | 49 |
| 4.1.3 逆最適制御則   | 50 |
| 4.2 任意の定数 $k \geq 1$ に対する準普遍制御則と同じ方向ベクトルを持つ<br>逆最適制御則    | 52 |
| 4.2.1 評価関数とセクタ余裕   | 52 |
| 4.2.2 入力制約 $u \in U_k^1$ のもとで逆最適制御則が存在する領域               | 53 |
| 4.2.3 逆最適制御則   | 54 |

|     |                                      |    |
|-----|--------------------------------------|----|
| 4.3 | セクタ余裕と吸引領域の関係                        | 56 |
| 4.4 | シミュレーション                             | 58 |
| 4.5 | まとめ                                  | 60 |
| 5.  | ロバスト制御則の設計                           | 62 |
| 5.1 | ロバスト制御則                              | 62 |
| 5.2 | まとめ                                  | 64 |
| 6.  | 制御則設計の指針                             | 65 |
| 7.  | 入力が入れ子にされた Minkowski ball に拘束される場合   | 66 |
| 7.1 | 漸近安定化可能領域                            | 66 |
| 7.2 | 入力空間の閉包内で微分 $\dot{V}(x, u)$ を最小化する入力 | 67 |
| 7.3 | 制御則設計                                | 69 |
| 7.4 | シミュレーション                             | 75 |
| 7.5 | まとめ                                  | 76 |
| 8.  | 小入力特性の解析                             | 78 |
| 8.1 | 小入力特性を持つための必要十分条件                    | 78 |
| 8.2 | 同次システムに対する小入力特性                      | 80 |
| 8.3 | まとめ                                  | 82 |
| 9.  | おわりに                                 | 84 |
|     | 謝辞                                   | 85 |
|     | 付録                                   | 86 |
|     | A. 研究業績                              | 86 |
|     | 参考文献                                 | 89 |



## 目 次

|    |   |    |
|----|---|----|
| 1  | Linearizing controller (29) and optimal controller (35) . . . . .         | 15 |
| 2  | Input that minimizes $\dot{V}(x, u)$ in $\bar{U}_k^1$ . . . . .           | 21 |
| 3  | Input that minimizes $\dot{V}(x, u)$ in $\bar{U}_k^*$ . . . . .           | 25 |
| 4  | Input that minimizes $\dot{V}(x, u)$ in $\bar{U}_k^*$ . . . . .           | 31 |
| 5  | Input that minimizes $\dot{V}(x, u)$ in $\bar{U}_k^*$ . . . . .           | 32 |
| 6  | Comparison of norms ( $1 \leq k_1 < k_2 < k_3$ ) . . . . .                | 33 |
| 7  | Response with semi-universal controller (89) in case of $k = 3$ . . .     | 38 |
| 8  | Response with semi-universal controller (90) in case of $k = 3$ . . .     | 39 |
| 9  | Response with stabilizing controller (92) in case of $k = \infty$ . . . . | 40 |
| 10 | Response with semi-universal controller (93) in case of $k = \infty$ . .  | 41 |
| 11 | Response with stabilizing controller (72) in case of $k = \infty$ . . . . | 42 |
| 12 | Response with semi-universal controller (84) in case of $k = \infty$ . .  | 43 |
| 13 | $U_k^1$ and $U_p^s$ . . . . .   | 57 |
| 14 | Response with semi-universal controller (135) in case of $k = 3$ . .      | 59 |
| 15 | Response with inverse optimal controller (136) in case of $k = 3$ . .     | 60 |
| 16 | Response with semi-universal controller (173) . . . . .                   | 77 |

## 1. はじめに

実際のシステムの多くは非線形であり，アクチュエータの性能限界や制御対象保護のため入力に拘束されている．また，モデル化誤差や外乱が存在する．そのため，非線形性や入力制約を無視して制御則を設計したり，制御則が十分なロバスト性を持っていない場合，制御性能が劣化したり閉ループ系が不安定化する恐れがある．入力制約問題は近年盛んに研究されており，Anti-windup 制御やリファレンスガバナ，制御 Lyapunov 関数を用いた手法などが提案されている [1, 2, 3, 4, 5, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34] ．

Anti-windup 制御は，入力制約を考慮せずに設計された制御則に対して，補償器を付加して windup 現象を抑制する手法であり，リファレンスガバナは，目標値を再形成することによって入力制約を破らないようにする手法である．これらの手法のほとんどは線形システムを対象としている．また，制御則の性能はあらかじめ設計された制御則の性能に大きく依存するため，入力制約のもとで望ましい制御則性能を得ることは困難である．制御 Lyapunov 関数を用いた制御則設計は，入力制約のもとで原点以外で制御 Lyapunov 関数を減少させるように制御則を構築する手法である．この手法の利点としては，対象として非線形システムを取り扱えること，システムのよい非線形性を生かせること，入力制約を陽に考慮できること，ロバスト性を保証できることなどが挙げられる．

制御 Lyapunov 関数を用いた制御則設計に関する過去の研究を簡単に紹介する．Clarke らは，入力が部分空間  $U$  に拘束された非線形システムに対して，Lipschitz 連続な局所制御 Lyapunov 関数が既知であるという仮定のもとで，安定化制御則になるような入力の選び方を明らかにし，その入力が十分小さい誤差と外乱に対してロバストであることを示した [5] ．しかし，具体的な制御則設計法や吸引領域，どのくらいの大きさの誤差や外乱に対して有効なのかは不明であった．

一方，Sontag は，入力制約を持たない入力アファインな非線形システムに対して，大域的な漸近安定化可能性を保證する滑らかな制御 Lyapunov 関数が与えられているという仮定のもとで，普遍制御則を設計した [4] ．Sontag の普遍制御則はある評価関数を最小化する逆最適レギュレータになっており，ロバスト性はセクタ余裕によって保證されている [9, 8, 11] ． $k$ -ノルムが 1 より小さくなるような

部分空間  $U_k^1$  ( $k \geq 1$ ) を半径 1 の Minkowski ball というが, Lin らは Sontag の普遍制御則を拡張して, 入力 が Minkowski ball  $U_2^1$  に拘束されているときの普遍制御則を示した [2]. さらに Malisoff らは, Lin の普遍制御則を改良して,  $1 < k \leq 2$  の場合にも適用できる普遍制御則を構築した [1]. しかし, Sontag, Lin, Malisoff の手法では大域的漸近安定化可能性を保証する制御 Lyapunov 関数の存在を仮定しており, システムが局所的にしか安定化できない場合を考えていない. また, 入力制約がある場合の逆最適問題は取り扱われておらず, これまでに設計された制御則はロバスト性を保証していない.

制御 Lyapunov 関数は, 非線形システムの安定性解析においても非常に重要な役割を果たしている. システムが入力に関してアファインかつ入力の拘束される空間が凸ならば, 連続な制御則によって原点を漸近安定化できるための必要十分条件は, 小入力特性を満たす滑らかな制御 Lyapunov 関数が存在することである. しかし, どのようなシステムに対して小入力特性を満たす制御 Lyapunov 関数が存在するかは, ほとんど研究されていない.

本論文では, 入力制約を持つ入力アファインな非線形システムに対して, 滑らかな局所制御 Lyapunov 関数を用いて, ロバストな準普遍制御則を提案する. さらに, 小入力特性を満たす制御 Lyapunov 関数が存在するための条件を明らかにする.

第 2 章では, 本論文で使用する記号や用語の定義を示し, 制御 Lyapunov 関数と安定性の関係について説明する. また, 逆最適問題の背景を紹介する.

第 3 章では, 入力 が Minkowski ball  $U_k^1$  に拘束された非線形システムに対して, 任意の  $k \geq 1$  に適用できる準普遍制御則を提案する. まず, 局所制御 Lyapunov 関数のある等高線の内側で漸近安定化可能領域が保証されることを明らかにする. つぎに, 入力空間  $U_k^1$  の閉包  $\bar{U}_k^1$  内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力を求め, 漸近安定化可能領域で満たされる条件を導出する. さらに, 部分空間  $\bar{U}_k^1$  内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力と同じ方向ベクトルを持つ漸近安定化制御則を設計する. この制御則は Malisoff の普遍制御則の一般化になっており,  $1 < k < \infty$  の場合, 入力は原点以外で連続になる. しかし,  $k = \infty$  あるいは  $k = 1$  の場合, 入力は原点以外でも不連続になる恐れがある. そ

ここで、任意の  $k \geq 1$  に対して入力が入力が原点以外で連続になるように制御則を改良する．最後に、提案した制御則の有効性を確認するためシミュレーションを示し、入力に生じるチャタリングの影響について考察する．

第3章で提案した制御則は広い領域で原点を漸近安定化するが、ロバスト性を保証していない．第4章では、制御則にロバスト性を持たせるため、第3章で提案した制御則と同じ方向ベクトルを持つ逆最適制御則を設計し、セクタ余裕を用いてロバスト性を評価する．まず、入力が部分空間  $U$  に拘束された非線形システムに対して、第3章で提案した制御則と同じ方向ベクトルを持つ入力によって最小化される評価関数を導出し、セクタ余裕の下限を明らかにする．つぎに、入力が Minkowski ball  $U_k^1$  に拘束された非線形システムに対して、このような逆最適制御則が存在する領域を求める．さらに、求めた領域で原点を漸近安定化する逆最適制御則を設計する．最後に、提案した逆最適制御則のロバスト性を確認するため、シミュレーションを行う．

第4章の結果から、逆最適制御則のセクタ余裕の下限は入力の方向ベクトルによって決まることが明らかになる．また、吸引領域はセクタ余裕と入力制約によって決定される．入力制約のもとでは、セクタ余裕と吸引領域はトレードオフの関係にあり、これらを同時に大きくすることはできない．そのため、逆最適制御則が十分なセクタ余裕を持たなかったり、逆最適制御則の存在する領域が狭くなることがある．第5章では、逆最適性を無視することによってセクタ余裕と吸引領域が適切に調節できることを示すため、任意のセクタ余裕を持つ準普遍制御則や漸近安定化可能領域全域でセクタ余裕を保証する準普遍制御則を設計する．

第6章では、実際のシステムに対して制御則を設計する際の注意点を述べる．

第7章では、入力が入れ子にされた Minkowski ball に拘束される非線形システムに対して、準普遍制御則を設計する．まず、局所制御 Lyapunov 関数のある等高線の内側で漸近安定化可能領域が保証されることを明らかにする．つぎに、入力空間の閉包内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力を求め、漸近安定化可能領域で満たされる条件を導出する．さらに、局所制御 Lyapunov 関数の微分をいくつかの項に分割し、分割された各項が非正になるように準普遍制御則を構築する．最後に、提案した制御則の有効性を確認するため、シミュレーショ

ンを示す．

第 8 章では，小入力特性の解析を行う．まず，入力アファインな非線形システムに対して，小入力特性を満たす局所制御 Lyapunov 関数が存在するための条件を示す．つぎに，同次システムが原点以外で連続な制御則によって漸近安定化できるための必要十分条件は滑らかな同次制御 Lyapunov 関数が存在することであることを明らかにする．さらに，入力アファインな同次システムに対する同次制御 Lyapunov 関数は小入力特性を満たすことを示す．

第 9 章では，本論文の結言を述べる．

## 2. 準備

2.1 節では，準備として本論文で使用する記号の説明を行い，ノルムに関する補題を与える．2.2 節では，制御 Lyapunov 関数や小入力特性の定義を示し，安定性との関係について説明する．2.3 節では，(準) 普遍制御則やセクタ余裕の定義を与える．2.4 節では，逆最適問題の背景を紹介する．2.5 節では，同次システムや同次制御 Lyapunov 関数の定義を示し，同次近似について説明する．

### 2.1 数学的準備

$\mathbb{R}$  は実数全体の集合， $\mathbb{R}_{>0} := (0, \infty)$ ， $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$  とする．

定義 1.  $y \in \mathbb{R}$  に対して， $\text{sgn}(y)$  は以下のように定義される．

$$\text{sgn}(y) = \begin{cases} -1 & (y < 0) \\ 0 & (y = 0) \\ 1 & (y > 0) \end{cases} \quad (1)$$

□

定義 2.  $y \in \mathbb{R}$  に対して， $\text{sat}(y)$  は以下のように定義される．

$$\text{sat}(y) = \begin{cases} y & (|y| < 1) \\ \text{sgn}(y) & (|y| \geq 1) \end{cases} \quad (2)$$

□

定義 3.  $x \in \mathbb{R}^n$ ， $k \geq 1$  に対して， $k$ -ノルム  $\|x\|_k$  は以下のように定義される．

$$\|x\|_k = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^k \right)^{\frac{1}{k}} \quad (3)$$

□

ノルムに関して，つぎの補題が成立する．

補題 1.  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq k_1 < k_2$  とすると, 次式が成立する.

$$\|x\|_{k_1} \geq \|x\|_{k_2} \quad (4)$$

□

*Proof.* 任意のベクトル  $x \in \mathbb{R}^n$  は,

$$x = \|x\|_{k_1} \cdot \frac{x}{\|x\|_{k_1}} := \|x\|_{k_1} e \quad (5)$$

と書き直すことができる. ここで,  $e \in \mathbb{R}^n$  は

$$\|e\|_{k_1} = 1 \quad (6)$$

を満たすベクトルであることに注意する. (5) 式より,  $\|x\|_{k_2}$  は

$$\|x\|_{k_2} = \|x\|_{k_1} \|e\|_{k_2} \quad (7)$$

となる.  $\|e\|_{k_2}$  は以下のように変形できる.

$$\|e\|_{k_2} = \left( \sum_{i=1}^n |e_i|^{k_2} \right)^{\frac{1}{k_2}} = \left( \sum_{i=1}^n |e_i|^{k_1} |e_i|^{k_2-k_1} \right)^{\frac{1}{k_2}}$$

(6) 式より明らかに  $|e_i| \leq 1$  であるから,  $|e_i|^{k_2-k_1} \leq 1$  となる. よって,

$$\|e\|_{k_2} \leq \left( \sum_{i=1}^n |e_i|^{k_1} \right)^{\frac{1}{k_2}}$$

を得る. さらに (6) 式を考慮すると,

$$\|e\|_{k_2} \leq 1 \quad (8)$$

となる. (7) および (8) 式より, (4) 式を得る. 等号が成立するのは, ベクトル  $x$  の一つの成分だけが値を持つときに限られる. □

定義 4. 任意の  $a > 0$  に対して  $\{x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq a\}$  がコンパクトであるとき, 関数  $V : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  はプロパーであるという. □

定義 5.  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  とする . 以下を満たす関数  $V : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  を正定関数という .

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ V(x) &> 0, \quad \forall x \neq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

また ,  $V(0) = 0$  を満たす関数  $V : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  を準正定関数という .  $\square$

定義 6.  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ,  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  は滑らかな関数 ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  とすると , 関数  $V(x)$  の  $f(x)$  に沿った *Lie* 微分は以下のように定義される .

$$L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} f \tag{10}$$

$\square$

定義 7.  $B_\varepsilon(x)$  は中心を  $x \in \mathbb{R}^n$  とする半径  $\varepsilon > 0$  の開球である .

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_2 < \varepsilon\} \tag{11}$$

$\square$

定義 8.  $\overline{\text{co}}(A)$  は集合  $A$  の凸閉包である .  $\square$

定義 9.  $\mu_n(A)$  は集合  $A$  の  $\mathbb{R}^n$  上の *Lebesgue* 測度である .  $\square$

定義 10. ある  $\varepsilon > 0$  に対して以下を満たす  $\ell \geq 0$  が存在するとき , 関数  $f(x)$  は  $x$  に関して局所 *Lipschitz* 連続という .

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \ell |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in B_\varepsilon \tag{12}$$

$\square$

## 2.2 制御 Lyapunov 関数と安定性

以下のような非線形システムを考える .

$$\dot{x} = \bar{f}(x, u) \tag{13}$$



ここで,  $x \in \mathbb{R}^n$  は状態変数,  $u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$  は入力,  $U$  は  $0 \in U$  を満たす計量空間,  $\bar{f}: \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $(x, u)$  に関して局所 Lipschitz 連続,  $\bar{f}(0, 0) = 0$  とする. また,  $d$  は  $U$  における距離,  $\tilde{U}_\rho$  と  $\|u\|_{\text{sup}}$  は次式で定義されるものとする.

$$\tilde{U}_\rho = \{u \in U \mid d(u, 0) \leq \rho\} \quad (14)$$

$$\|u\|_{\text{sup}} = \inf\{\rho \mid u(t) \in \tilde{U}_\rho \text{ for almost all } t \geq 0\} \quad (15)$$

システム (13) に対して, 安定性は以下のように定義される.

**定義 11.**  $X \subset \mathbb{R}^n$  は原点の十分近傍とする. 以下の条件を満たす非減少関数  $\theta, \tilde{\theta}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  が存在するとき, 非線形システム (13) は局所漸近安定化可能という.

$$(1) \lim_{r \rightarrow +0} \tilde{\theta}(r) = 0$$

(2) 各  $x(0) \in X$  に対して,  $t \rightarrow \infty$  のとき  $x(t) \rightarrow 0$ ,  $\|u\|_{\text{sup}} \leq \theta(\|x(0)\|)$ , かつ  $\sup\{\|x(t)\| : 0 \leq t < \infty\} \leq \tilde{\theta}(\|x(0)\|)$  となるような制御則  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow U$  と対応する軌道  $x: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$  が存在する.

さらに  $X$  が全領域に取れるとき ( $X = \mathbb{R}^n$ ), システム (13) は大域漸近安定化可能という. □

また, 制御 Lyapunov 関数はつぎのように定義される.

**定義 12 (連続な制御 Lyapunov 関数).**  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $W: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\nu: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  はそれぞれ以下の条件を満たす原点の近傍, プロパーで連続な正定関数, 連続な正定関数, 非減少関数とする.

$$\forall x \in X \quad \exists v \in \overline{\text{co}}(\bar{f}(x, \tilde{U}_{\nu(|x|)})) \quad \text{s.t.} \quad D_v^- V(x) \leq -W(x) \quad (16)$$

ただし,  $D_v^- V(x)$  は次式で定義される  $V$  の方向微分とする.

$$D_v^- V(x) = \liminf_{t \rightarrow +0, w \rightarrow v} \frac{1}{t} \{V(x + tw) - V(x)\} \quad (17)$$

このとき,  $V(x)$  を入力制約付き非線形システム (13) の局所制御 Lyapunov 関数という. さらに  $V(x)$  および  $W(x)$  が全領域  $\mathbb{R}^n$  で定義されるとき,  $V(x)$  をシステム (13) の制御 Lyapunov 関数という. □

定理 1. 非線形システム (13) が大域的 (局所的) に漸近安定化できるための必要十分条件は, 連続な (局所) 制御 *Lyapunov* 関数が存在することである.  $\square$

本論文では, 制御対象として, 以下のような入力アファインな非線形システムを考える.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (18)$$

ここで,  $x \in \mathbb{R}^n$  は状態変数,  $u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$  は入力,  $U$  は  $0 \in U$  を満たす凸部分空間,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  と  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  は連続,  $f(0) = 0$  とする. システム (18) に対する滑らかな制御 *Lyapunov* 関数はつぎのように定義される.

定義 13 (滑らかな制御 *Lyapunov* 関数). 原点の近傍  $X \subset \mathbb{R}^n$  で定義され, すべての  $x \in X \setminus \{0\}$  に対して

$$\inf_{u \in U} \{L_f V + L_g V \cdot u\} < 0 \quad (19)$$

を満たすプロパーで滑らかな正定関数  $V: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  を入力制約付き非線形システム (18) の局所制御 *Lyapunov* 関数という. さらに  $V(x)$  が全領域  $\mathbb{R}^n$  で定義され, かつ, すべての  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  に対して条件 (19) が満たされるとき,  $V(x)$  をシステム (18) の制御 *Lyapunov* 関数という.  $\square$

ただし,  $L_f V, L_g V$  はそれぞれ  $f(x), g(x)$  に関する  $V(x)$  の Lie 微分である. 以下では, 特に断りのない限り, 滑らかな制御 *Lyapunov* 関数を考えるものとする. システムが入力を持たない場合 ( $\dot{x} = f(x)$ ), 制御 *Lyapunov* 関数を単に *Lyapunov* 関数という. 入力制約がない場合 ( $U \equiv \mathbb{R}^m$ ), プロパーで滑らかな正定関数  $V(x)$  が制御 *Lyapunov* 関数であるための必要十分条件は,

$$L_g V = 0 \implies L_f V < 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (20)$$

を満たすことである. 制御 *Lyapunov* 関数を求める手法としては, 厳密な線形化やバックステッピングなどが知られている [7, 8, 18]. 制御 *Lyapunov* 関数の重要な性質として, 小入力特性がある.

定義 14 (小入力特性). 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$0 \neq \|x\| < \delta \implies \exists \|u\| < \varepsilon \text{ s.t. } L_f V + L_g V \cdot u < 0 \quad (21)$$

を満たす  $\delta > 0$  が存在するとき, システム (18) の (局所) 制御 *Lyapunov* 関数  $V(x)$  は小入力特性 (*small control property*) を満たすという.  $\square$

定理 2. 非線形システム (18) が原点以外で連続な制御則  $u(x)$  によって大域的 (局所的) に漸近安定化できるための必要十分条件は, 滑らかな (局所) 制御 *Lyapunov* 関数が存在することである.  $\square$

定理 3. 非線形システム (18) が連続な制御則  $u(x)$  によって大域的 (局所的) に漸近安定化できるための必要十分条件は, 小入力特性を満たす滑らかな (局所) 制御 *Lyapunov* 関数が存在することである.  $\square$

非線形システム (18) に状態フィードバック則  $u(x)$  を与えたときの閉ループ系の右辺を  $h(x)$  とおく.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x) := h(x) \quad (22)$$

制御則  $u(x)$  が原点以外で連続ならば, 閉ループ系は任意の初期状態に対して Carathéodory の解を持つ. Carathéodory の解とは, ある区間  $I \subseteq [0, \infty)$  で定義され,  $I$  の各コンパクト部分区間上で絶対連続, かつ, ほとんどすべての  $t \in I$  に対して (22) 式を満たす関数  $x(t)$  のことである. 本論文の制御則設計においては原点以外で連続な制御則を設計することを目的とするが, いくつかの制御則は原点以外でも不連続になることを許容して設計する. このとき閉ループ系も不連続になり, Carathéodory の解は存在しない. しかし, 閉ループ系をディファレンシャル・インクルージョンで置き換えることによって, 安定性を保証できることが知られている [20, 27]. (22) 式をディファレンシャル・インクルージョン

$$\dot{x} \in F(x) \quad (23)$$

で置き換える. ここで, 集合値写像  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は Fillippov の定義

$$F(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\mu_n(N)=0} \overline{\text{co}}\{h(B_\varepsilon(x) \setminus N)\} \quad (24)$$

を用いる. ディファレンシャル・インクルージョン (23) の解とは, ある区間  $I \subseteq [0, \infty)$  で定義され,  $I$  の各コンパクト部分区間上で絶対連続, かつ, ほとんどす

すべての  $t \in I$  に対して (23) 式を満たす関数  $x(t)$  のことである。ディファレンシャル・インクルージョン (23) に対する Lyapunov 関数は以下のように定義される。

定義 15 (Lyapunov 関数). 原点の近傍  $X \subset \mathbb{R}^n$  で定義され, すべての  $x \in X \setminus \{0\}$  とすべての  $v \in F(x)$  に対して

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot v < 0 \quad (25)$$

を満たすプロパーで滑らかな正定関数  $V : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  をディファレンシャル・インクルージョン (23) の局所 Lyapunov 関数という。さらに  $V(x)$  が全領域  $\mathbb{R}^n$  で定義され, かつ, すべての  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  とすべての  $v \in F(x)$  に対して条件 (25) が満たされるとき,  $V(x)$  をディファレンシャル・インクルージョン (23) の Lyapunov 関数という。□

ディファレンシャル・インクルージョン (23) に対する安定性はつぎの定理によって保証される。

定理 4. ディファレンシャル・インクルージョン (23) の解の存在が局所的に保証されているものとする。(局所) Lyapunov 関数が存在するならば, 原点は大域的 (局所的) に漸近安定である。□

## 2.3 (準) 普遍制御則とセクタ余裕

Sontag らは, 制御 Lyapunov 関数を与えられているという仮定のもとで, 普遍制御則を設計した [1, 2, 3, 4]。普遍制御則の定義を以下に示す。

定義 16 (普遍制御則).  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  とする。(局所) 制御 Lyapunov 関数の微分を負にとれる  $L_f V$  と  $L_g V$  の値の直積集合を  $D(U) = \{(L_f V, L_g V) \mid L_f V + L_g V \cdot u < 0, \text{ for some } u \in U\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  と表す。実解析関数  $\alpha : D(U) \rightarrow U$  が以下の条件を満たすとき,  $\alpha$  を入力空間  $U$  に対する普遍制御則という。

(1) 任意の  $(L_f V, L_g V) \in D(U)$  に対して,  $L_f V + L_g V \cdot \alpha(L_f V, L_g V) < 0$  が成立する。

(2) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $(L_f V, L_g V) \in D(U)$ ,  $L_f V < \delta \|L_g V\|$ ,  $|L_f V| < \delta$ ,  
 かつ  $\|L_g V\| < \delta$  であれば  $\|\alpha(L_f V, L_g V)\| < \varepsilon$  となるような  $\delta > 0$  が存在する.

□

しかし, 普遍制御則における実解析性は非常に厳しい条件であり, また本質的ではない. そこで, 本論文では以下のように準普遍制御則を定義する.

定義 17 (準普遍制御則).  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  とする. (局所) 制御 Lyapunov 関数の微分を負にとれる  $L_f V$  と  $L_g V$  の値の直積集合を  $D(U) = \{(L_f V, L_g V) \mid L_f V + L_g V \cdot u < 0, \text{ for some } u \in U\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  と表す. 連続関数  $\alpha : D(U) \rightarrow U$  が以下の条件を満たすとき,  $\alpha$  を入力空間  $U$  に対する準普遍制御則という.

(1) 任意の  $(L_f V, L_g V) \in D(U)$  に対して,  $L_f V + L_g V \cdot \alpha(L_f V, L_g V) < 0$  が成立する.

(2) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $(L_f V, L_g V) \in D(U)$ ,  $L_f V < \delta \|L_g V\|$ ,  $|L_f V| < \delta$ ,  
 かつ  $\|L_g V\| < \delta$  であれば  $\|\alpha(L_f V, L_g V)\| < \varepsilon$  となるような  $\delta > 0$  が存在する.

□

(準) 普遍制御則であるための二つ目の条件は, 制御 Lyapunov 関数が小入力特性を満たすならば, 制御則  $\beta(x) = \alpha(L_f V(x), L_g V(x))$  は原点でも連続になることを示している. 本論文の制御則設計においては, ロバストな準普遍制御則を設計することを目的とする. ロバスト性を評価する指標として, セクタ余裕, ゲイン余裕, 位相余裕, ディスク余裕などがあるが [21], 本論文ではセクタ余裕を用いる. このとき, 状態変数  $x$  に依存してセクタ余裕を変化させることも考える.

定義 18 (セクタ型非線形要素).  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$  とする.

$$\begin{aligned} \gamma_1 u^T u < u^T \phi(u) < \gamma_2 u^T u, \quad u \neq 0 \\ \phi(0) = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

を満たす連続な  $\phi(u) \in \mathbb{R}^m$  を  $u \in \mathbb{R}^m$  に関する  $(\gamma_1, \gamma_2)$  のセクタ型非線形要素という.

□

定義 19 (セクタ余裕).  $u \in \mathbb{R}^m$  に関する  $(\gamma_1, \gamma_2)$  の任意のセクタ型非線形要素  $\phi(u)$  に対して,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(u) \quad (27)$$

の原点が漸近安定になるならば, システム (18) は制御入力  $u$  に対してセクタ余裕  $(\gamma_1, \gamma_2)$  を持つという.  $\square$

## 2.4 最適制御と逆最適制御

例として, 非線形システム

$$\dot{x} = -x^3 + x + u \quad (28)$$

を漸近安定化する問題を考える. ただし, 入力制約はないものと仮定する. システム (28) に対して, いろいろな漸近安定化制御則が設計できる. たとえば,

$$u = x^3 - 2x \quad (29)$$

はフィードバック線形化によって原点を漸近安定化する制御則である. しかし, システム (28) の右辺第一項  $-x^3$  は常に状態  $x$  が原点に収束するように作用しているにもかかわらず, 制御則 (29) は  $x^3$  の項によってシステムの非線形性を打ち消しており, その上,  $x \rightarrow \pm\infty$  のとき  $u \rightarrow \pm\infty$  となっている. そのため, 外乱に対してロバストではなく, 好ましい制御則とはいえない. システムの持つよい非線形性を生かして所望の性能を持つ制御則を設計するためには, 最適制御問題が取り扱われる.

最適制御問題とは, システムに対して評価関数

$$J = \int_0^T L(x, u) dt \quad (30)$$

を最小にする制御則  $u(x)$  を求めることである. 特に  $T = \infty$  の場合, 最適レギュレータ問題という. 目的に応じて評価関数を与えることによって, 最短時間制御や最小エネルギー制御を達成することができる. よく用いられるのは, 積分の中が入力に関して 2 次の関数である評価関数

$$J = \int_0^\infty \left( \ell(x) + \frac{1}{2} u^T R(x) u \right) dt \quad (31)$$

を最小にする最適レギュレータ問題である．ただし， $\ell(x) \geq 0$  は準正定関数， $R(x) > 0$  である．この問題を解くためには，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式

$$L_f V + \ell(x) - \frac{1}{2} L_g V \frac{1}{R(x)} L_g V^T = 0 \quad (32)$$

を満たす正定関数  $V(x)$  を求めなければならない．このような関数  $V(x)$  が存在するならば，制御入力

$$u = -\frac{1}{R(x)} L_g V^T \quad (33)$$

は評価関数 (31) を最小化し，そのときの値は  $J = V(x(0))$  となることが知られている．

たとえば，システム (28) に対して評価関数

$$J = \int_0^\infty (x^2 + u^2) dt \quad (34)$$

を最小化する最適制御則は，

$$u = x^3 - x - x\sqrt{x^4 - 2x^2 + 2} \quad (35)$$

となる．最適制御則 (35) はシステムの持つよい非線形性を生かす制御則であり，大きな  $|x|$  に対して入力は小さくなっている．しかし，評価関数を適当に与えると，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式 (32) の解が存在しないことがある．また，解が存在したとしても，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を解析的に解くことは，一般に困難である．

これに対して，はじめにシステムを漸近安定化する制御則を設計し，それからその制御則がある評価関数を最小化することを示すことを逆最適制御問題という．逆最適制御則は Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を解かずに設計できる．その上，最適制御則と同様に，逆最適制御則もシステムの特性を生かす制御則であり，意味のある評価関数を最小化する．入力制約がない場合については，以下の結果が得られている [9, 8, 11] ．

系 1. 入力制約のないシステム (18) を考える． $V(x)$  はシステムの制御 Lyapunov 関数， $R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  は正値をとる関数， $\gamma \geq 2$  とする．また，

$$u = -\frac{1}{R(x)} L_g V^T \quad (36)$$

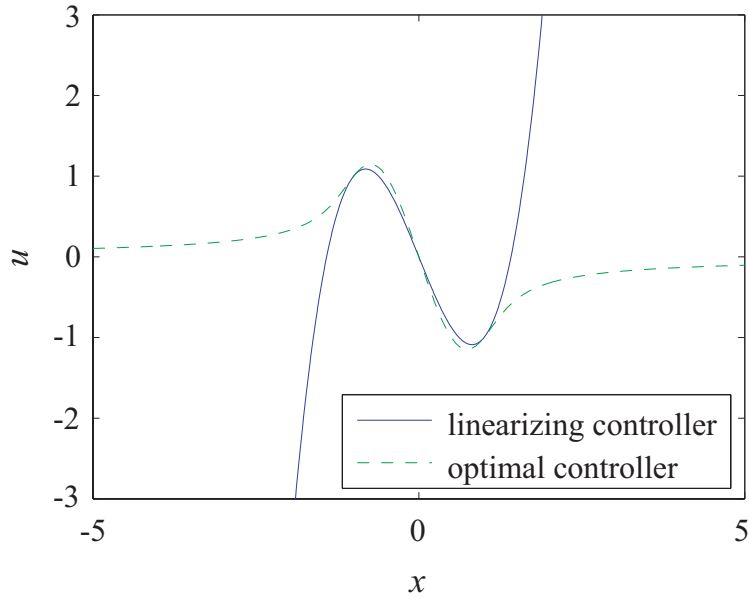


図 1 Linearizing controller (29) and optimal controller (35)

は原点を大域的に漸近安定化する制御則とする．このとき，制御入力

$$\bar{u} = \gamma u \tag{37}$$

は原点を大域的に漸近安定化し，かつ評価関数 (31) を最小化する．ただし， $\ell(x)$  は次式で定義される関数である．

$$\ell(x) = \gamma \left( \gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R(x)} \|L_g V\|_2^2 - L_f V \right) \tag{38}$$

また，少なくとも  $(\frac{1}{\gamma}, \infty)$  のセクタ余裕を保証する． □

逆最適制御則の代表的なものとしては，入力制約のないシステム (18) に対して提案された Sontag の普遍制御則がある [9, 8, 11] ．



定理 5. 入力制約のないシステム (18) を考える .  $V(x)$  はシステムの制御 Lyapunov 関数 , 関数  $\ell(x)$  と  $R(x)$  は次式で定義される関数とする .

$$\ell(x) = \frac{1}{2R(x)} \|L_g V\|_2^2 - L_f V \quad (39)$$

$$R(x) = \begin{cases} \frac{\|L_g V\|_2^2}{L_f V + \sqrt{L_f V^2 + \|L_g V\|_2^4}} & (L_g V \neq 0) \\ 1 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (40)$$

このとき , 制御入力

$$u = -\frac{1}{R(x)} L_g V^T \quad (41)$$

は原点を大域的に漸近安定化し , かつ評価関数 (31) を最小化する . セクタ余裕は  $(\frac{1}{2}, \infty)$  である . 入力は  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  で連続である . さらに制御 Lyapunov 関数が小入力特性を満たすならば , 入力は原点でも連続である .  $\square$

たとえば , システム (28) に対する制御 Lyapunov 関数として  $V(x) = x^2/2$  を選ぶと , 定理 5 より逆最適制御則

$$u = x^3 - x - x\sqrt{x^4 - 2x^2 + 2} \quad (42)$$

を得る . 逆最適制御則は , Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を解いたり評価関数を求めることなく設計できる .

評価関数 (34) を最小化する最適制御則 (35) と評価関数 (31) を最小化する逆最適制御則 (42) が一致することに注意する . このように , 最適制御問題においては評価関数を最小化する入力は存在するならば一意に決まるが , ある入力が最小化する評価関数は一つとは限らない . また , 逆最適制御則の最小化する評価関数はある程度意味のある関数であることがわかる .

従来の研究では , 入力制約付き非線形システムに対する逆最適問題は取り扱われていない . また , 入力制約がない場合でも , Sontag の普遍制御則と同じ方向ベクトルを持つ入力の逆最適問題しか考えられていない . 第 4 章では , 入力制約を陽に考慮し , Sontag の普遍制御則と異なる方向ベクトルを持つ入力の逆最適問題に取り組む . ただし , 本論文で提案するすべての制御則は局所制御 Lyapunov 関数の微分を常に減少させるように作用しており , システムの特性を生かすという点では最適制御則や逆最適制御則と同じ効果を持っている .

## 2.5 同次システムと同次制御 Lyapunov 関数

同次システムの定義を以下に示す。

定義 20 (拡大).  $0 < r_i < \infty$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を満たす  $r = (r_1, \dots, r_n)^T$  に対して, 次式で表される写像を  $\mathbb{R}^n$  上の拡大という。

$$\delta_\varepsilon^r x = (\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n)^T \quad (43)$$

□

定義 21 (同次システム). 次式を満たすシステム (13) を拡大  $\delta_\varepsilon^r x$ ,  $\delta_\varepsilon^s u$  に関する  $\tau$  次の同次システムという。

$$\bar{f}(\delta_\varepsilon^r x, \delta_\varepsilon^s u) = \varepsilon^\tau \delta_\varepsilon^r \bar{f}(x, u) \quad (44)$$

□

同次システムは線形システムを拡張したものであり, 線形システムと同様に, 同次システムの局所的な性質と大域的な性質は一致する。一般に, 同次システムに対しては同次制御 Lyapunov 関数を考える。

定義 22 (同次関数). 次式を満たす関数  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\tau$  次の同次関数という。

$$f(\delta_\varepsilon^r x) = \varepsilon^\tau f(x) \quad (45)$$

□

定義 23 (同次制御 Lyapunov 関数). 拡大  $\delta_\varepsilon^r x$  に関して  $\tau_v$  次の同次である, すなわち

$$V(\delta_\varepsilon^r x) = \varepsilon^{\tau_v} V(x) \quad (46)$$

を満たす (局所) 制御 Lyapunov 関数を (局所) 同次制御 Lyapunov 関数という。□

同次制御 Lyapunov 関数が滑らかな場合, 各  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対して

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(\delta_\varepsilon^r x) = \varepsilon^{\tau_v - r_i} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \quad (47)$$

が成立する。

定理 6. 同次システム (13) が大域的 (局所的) に漸近安定化できるための必要十分条件は, 原点以外で Lipschitz 連続な (局所) 同次制御 Lyapunov 関数が存在することである.  $\square$

定理 7. 入力がない場合 ( $\dot{x} = f(x)$ ), 同次システムが大域的に漸近安定であるための必要十分条件は, 滑らかな同次 Lyapunov 関数が存在することである.  $\square$

非線形システムが原点の近傍で線形近似可能ならば, もとのシステムの局所的な性質は近似後のシステムにも受け継がれる. 同様のことが, 同次近似についてもいえる. 同次近似は以下のように定義される.

定義 24 (同次近似).

$$f(x, u) = f_h(x, u) + g(x, u) \quad (48)$$

を満たし, かつ各  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対して球  $S^{n+m-1}$  上で一様に

$$\frac{g_i(\delta_\varepsilon^r x, \delta_\varepsilon^s u)}{\varepsilon^{\tau+r_i}} \rightarrow 0 \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (49)$$

となるような連続写像  $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  が存在するならば,  $f_h(x, u)$  は  $f(x, u)$  の同次近似である.  $\square$

この定義は, 同次の次数がより高次の項は無視できることを示している. 線形近似システムはシステムの右边をテーラー展開して一次の項だけを考えることによって得られるが, 同次近似システムはテーラー展開して 0 でない最も低次の項だけを考えることによって得られる. このように, 同次近似は線形近似の拡張である. 同次近似を考えることによって, より広いクラスのシステムの解析を行うことができる. 同次ベクトル場に対しては, 同次ノルムを考えると便利である.

定義 25 (同次ノルム). 拡大  $\delta_\varepsilon^r x$  に関する 1 次の同次関数

$$\|x\|_{\{r,k\}} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{k}{r_i}} \right)^{\frac{1}{k}} \quad (50)$$

を同次  $k$ -ノルムという.  $\square$

### 3. 準普遍制御則の設計

$k$ -ノルムが1より小さい部分空間

$$U_k^1 = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\|_k < 1, k \geq 1\} \quad (51)$$

を半径1のMinkowski ballという。本章の目的は、入力がMinkowski ball  $U_k^1$  に拘束されている入力アファインな非線形システム (18) に対して、局所制御 Lyapunov 関数が既知であるという仮定のもとで、できるだけ広い領域で原点を漸近安定化する準普遍制御則を設計することである。ただし、簡単のため、与えられた局所制御 Lyapunov 関数は条件 (20) を満たすものとする。

3.1 節では、局所制御 Lyapunov 関数のある等高線の内側で漸近安定化可能領域が保証されることを明らかにする。3.2 節では、入力空間  $U_k^1$  の閉包  $\bar{U}_k^1$  内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力を探し、3.1 節で得られた漸近安定化可能領域内で満たされる条件を導出する。3.3 節では、部分空間  $\bar{U}_k^1$  内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力と同じ方向ベクトルを持つ漸近安定化制御則を設計する。3.4 節では、3.3 節で提案した制御則が Malisoff の普遍制御則の一般化になっていることを示す。  $1 < k < \infty$  の場合、提案した制御則は原点以外で連続になるが、  $k = \infty$  あるいは  $k = 1$  の場合、原点以外でも不連続になる恐れがある。3.5 節では、任意の  $k \geq 1$  に対して準普遍制御則になるように制御則を改良する。3.6 節では、提案した制御則の有効性を確認するためシミュレーションを行い、入力に生じるチャタリングの影響について考察する。

#### 3.1 入力制約 $u \in U_k^1$ のもとでの漸近安定化可能領域

局所制御 Lyapunov 関数が与えられたときの漸近安定化可能領域は、つぎのように保証することができる。

補題 2. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える。  $V(x)$  はシステムの局所制御 Lyapunov 関数、  $a_1 > 0$  はすべての  $x \in W_1 \setminus \{0\} := \{x \mid V(x) < a_1\} \setminus \{0\}$  に対して

$$\inf_{u \in U_k^1} \{L_f V + L_g V \cdot u\} < 0 \quad (52)$$

を満たす最大の定数とすると， $W_1$  は漸近安定化可能領域である．  $\square$

$V(x)$  が大域的漸近安定化可能性を保証する制御 Lyapunov 関数ならば， $a_1 = \infty$  となり漸近安定化可能領域は全領域  $\mathbb{R}^n$  となる．領域  $W_1$  ではすべての  $x \neq 0$  に対して条件 (52) が満たされるから，原点以外では適当な入力  $u \in U_k^1$  を選ぶことによって局所制御 Lyapunov 関数の微分を負にすることができる．また，そのとき状態変数の軌道は局所制御 Lyapunov 関数の等高線の内側に入り，領域  $W_1$  を飛び出さない．よって， $W_1$  は漸近安定化可能領域である．補題 2 の証明は後で与える．

### 3.2 入力空間の閉包内で微分 $\dot{V}(x, u)$ を最小化する入力

入力空間  $U_k^1$  の閉包  $\bar{U}_k^1$  内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力を求める．ただし，局所制御 Lyapunov 関数の微分を次式で定義する．

$$\dot{V}(x, u) = L_f V + L_g V \cdot u \quad (53)$$

入力を含む項が  $L_g V \cdot u$  だけであることに注意すると，以下の命題が成立する．

命題 1. 入力制約  $u \in \bar{U}_k^1$  を持つシステム (18) を考える． $V(x)$  はシステムの局所制御 Lyapunov 関数とする．このとき，制御入力

$$u_i = \begin{cases} -\frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|^{\frac{1}{k-1}}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (54)$$

$(i = 1, \dots, m)$

は各  $x$  に対して局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する．  $\square$

*Proof.* 以下では状態変数  $x$  を固定して考える．局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力は，内積  $L_g V \cdot u$  を最小にする入力と等しい． $L_g V = 0$  の場合，どのような入力を選んでも  $L_g V \cdot u = 0$  となる． $L_g V \neq 0$  の場合，空間  $\mathbb{R}^m$  において，部分空間  $\bar{U}_k^1$  との共通部分が空ではなく ( $\bar{U}_k^1 \cap Q \neq \emptyset$ )，かつ  $c_1 \in \mathbb{R}$  を最小

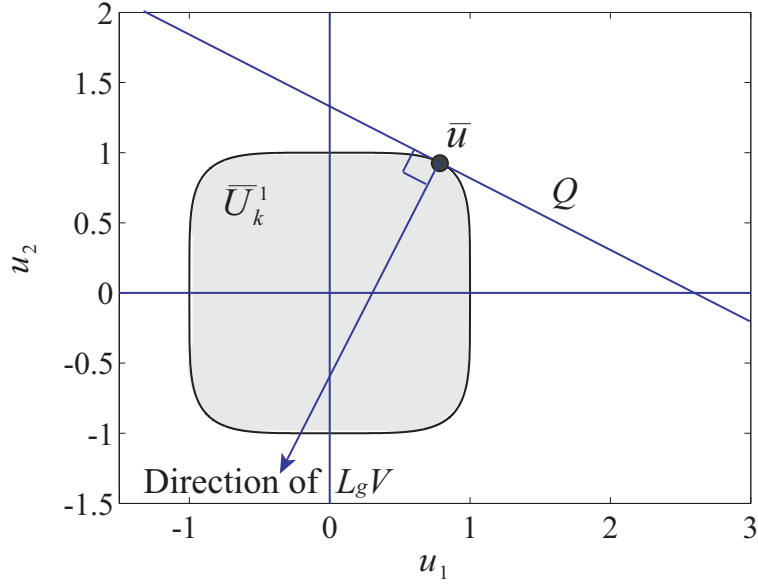


図 2 Input that minimizes  $\dot{V}(x, u)$  in  $\bar{U}_k^1$

にする超平面  $Q : L_g V \cdot u = c_1$  を考える． $\bar{U}_k^1$  はコンパクトな凸部分空間なので，超平面  $Q$  はある点  $\bar{u}$  で部分空間  $\bar{U}_k^1$  に接し，入力  $u = \bar{u}$  は部分空間  $\bar{U}_k^1$  内で内積  $L_g V \cdot u$  を最小にする (図 2 参照)．

そこで，超平面  $Q$  と部分空間  $\bar{U}_k^1$  との接点  $\bar{u}$  を求める．部分空間  $\bar{U}_k^1$  の境界  $\partial \bar{U}_k^1$  は次式で表される．

$$\sum_{i=1}^m |u_i|^k - 1 = 0 \quad (55)$$

(55) 式の左辺を  $S(u)$  とおく．

- (i)  $1 < k < \infty$  の場合，関数  $S(u)$  は  $u$  で微分可能である．接点  $\bar{u}$  における部分空間  $\bar{U}_k^1$  の接平面を求める．(55) 式より，境界上の点  $\bar{u} \in \partial \bar{U}_k^1$  における部分空間  $\bar{U}_k^1$  の法線ベクトルは

$$\left( \frac{dS}{du}(\bar{u}) \right)^T = k \left( |\bar{u}_1|^{k-1} \text{sgn}(\bar{u}_1), \dots, |\bar{u}_m|^{k-1} \text{sgn}(\bar{u}_m) \right)^T \quad (56)$$

となる．法線ベクトル (56) を持つ超平面は

$$\sum_{i=1}^m |\bar{u}_i|^{k-1} \operatorname{sgn}(\bar{u}_i) u_i = \text{const.} \quad (57)$$

と書ける．さらに  $\|\bar{u}\|_k = 1$  であることを考慮すると，接点  $\bar{u}$  における部分空間  $\bar{U}_k^1$  の接平面は

$$\sum_{i=1}^m |\bar{u}_i|^{k-1} \operatorname{sgn}(\bar{u}_i) u_i = 1 \quad (58)$$

となる．ところで，法線ベクトル  $L_g V$  を持つ超平面  $Q$  も接点  $\bar{u}$  で部分空間  $\bar{U}_k^1$  に接しているので，

$$\left( |\bar{u}_1|^{k-1} \operatorname{sgn}(\bar{u}_1), \dots, |\bar{u}_m|^{k-1} \operatorname{sgn}(\bar{u}_m) \right) = c_2 \cdot L_g V \quad (59)$$

を得る．ここで， $c_2 \in \mathbb{R}$  である．(59) 式の両辺に右側から  $\bar{u}$  をかけると，

$$\sum_{i=1}^m |\bar{u}_i|^k = c_2 \cdot L_g V \cdot \bar{u} > 0 \quad (60)$$

となる．また，入力  $u = \bar{u}$  が部分空間  $\bar{U}_k^1$  内で内積  $L_g V \cdot u$  を最小にすることより， $L_g V \cdot \bar{u}$  は負であることがわかる．(60) 式と  $L_g V \cdot \bar{u} < 0$  より， $c_2 < 0$  を得る．(59) 式および条件  $\|\bar{u}\|_k = 1$ ， $c_2 < 0$  より，局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力 (54) を得る．

(ii)  $k = \infty$  の場合，部分空間  $\bar{U}_\infty^1$  は

$$\bar{U}_\infty^1 = \left\{ u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} |u_i| \leq 1 \right\} \quad (61)$$

となるから，

$$L_g V \cdot u \geq - \sum_{i=1}^m |L_{g_i} V| \cdot |u_i| \geq - \|L_g V\|_1 \quad (62)$$

を得る．(54) 式に  $k = \infty$  を代入すると， $u_i = -\operatorname{sgn}(L_{g_i} V)$  となる．この入力によって内積は  $L_g V \cdot u = -\|L_g V\|_1$  となるが，この値は入力制約  $u \in \bar{U}_\infty^1$  のもとでの内積  $L_g V \cdot u$  の最小値に一致する．

(iii)  $k = 1$  の場合 , 部分空間  $\bar{U}_1^1$  は

$$\bar{U}_1^1 = \left\{ u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\|_1 = \sum_{i=1}^m |u_i| \leq 1 \right\} \quad (63)$$

となるから ,

$$L_g V \cdot u \geq - \sum_{i=1}^m |L_{g_i} V| \cdot |u_i| \geq - \|L_g V\|_\infty \quad (64)$$

を得る . (54) 式に  $k = 1$  を代入すると ,

$$u_i = \begin{cases} -\frac{|L_{g_i} V|^\infty}{m} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) & (|L_{g_i} V| = \|L_g V\|_\infty) \\ \sum_{i=1}^m |L_{g_i} V|^\infty & (|L_{g_i} V| \neq \|L_g V\|_\infty) \\ 0 & (i = 1, \dots, m) \end{cases} \quad (65)$$

となる . この入力によって内積は  $L_g V \cdot u = -\|L_g V\|_\infty$  となるが , この値は入力制約  $u \in \bar{U}_1^1$  のもとでの内積  $L_g V \cdot u$  の最小値に一致する .

以上で , 命題 1 の証明を終了する . □

制御入力 (54) は , 入力制約 (51) のもとでの局所制御 Lyapunov 関数の微分の下限

$$\inf_{u \in U_k^1} \dot{V}(x, u) = L_f V - \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}$$

を与える .  $L_g V \neq 0$  のとき , 関数  $P : \{x \in \mathbb{R}^n \mid L_g V \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$P(x) = \frac{L_f V}{\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}} \quad (66)$$

と定義すると , 条件 (52) が満たされるのは  $P(x) < 1$  となる領域に限られる .  $P(x) \geq 1$  となる領域では , どのような入力を選んでも  $\dot{V}(x, u) \geq 0$  となり , 条件 (52) は成立しない . すなわち , 漸近安定化可能領域  $W_1$  は  $P(x) < 1$  となる領域に含まれる . これより , つぎの補題を得る .



補題 3. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える． $V(x)$  はシステムの局所制御 Lyapunov 関数， $W_1$  は補題 2 の漸近安定化可能領域， $P(x)$  は (66) 式で定義される関数とすると，次式が成立する．

$$\sup_{x \in \{x \in W_1 \mid L_g V \neq 0\}} P(x) = 1 \quad (67)$$

□

次節以降では，(67) 式を利用して制御則を設計する．

### 3.3 定数 $1 < k < \infty$ に対する準普遍制御則

制御入力 (54) は，入力制約  $u \in \bar{U}_k^1$  を満たし，すべての  $x \in W_1 \setminus \{0\}$  に対して局所制御 Lyapunov 関数の微分を負にする安定化制御則になっている．しかし， $L_g V = 0$  となる領域で入力は不連続になる．また， $L_g V \neq 0$  となる領域では常に境界  $\partial \bar{U}_k^1$  上の値をとるため，原点の十分近傍でも入力は大きくなる．そのため，(54) 式を制御則として用いるのは好ましくない．

本節では，漸近安定化可能領域  $W_1$  内で，(54) 式を方向ベクトルとして持ち， $1 < k < \infty$  ならば準普遍制御則になるような漸近安定化制御則を設計する．まず，図 3 に示すように，入力空間  $\bar{U}_k^1$  に相似な部分空間  $\bar{U}_k^* \subset \bar{U}_k^1$  を考える．ただし，部分空間  $\bar{U}_k^*$  は状態変数  $x$  に依存して連続的に変化させる．つぎに，制約  $u \in \bar{U}_k^*$  を満たし，局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力を制御則として選ぶ．

部分空間  $\bar{U}_k^*$  は入力空間  $\bar{U}_k^1$  に相似なので，このように設計した入力の方向ベクトルは (54) 式に一致する．また， $u \in \bar{U}_k^* \subset \bar{U}_k^1$  より，入力制約 (51) は満たされる．ここで，部分空間  $\bar{U}_k^*$  は，制約  $u \in \bar{U}_k^*$  内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力が条件  $\dot{V}(x, u) < 0$  ( $\forall x \in W_1 \setminus \{0\}$ ) を満たし，かつ  $1 < k < \infty$  ならば準普遍制御則の連続性の条件を満たすように選ばなければならないことに注意する．そこで，(66) 式で定義された連続関数  $P : \{x \in W_1 \mid L_g V \neq 0\} \rightarrow (-\infty, 1)$  によって，部分空間  $\bar{U}_k^*$  を以下のように変化させる．

1.  $P(x) \rightarrow 1$  のとき  $\bar{U}_k^* \rightarrow \bar{U}_k^1$  .
2.  $P(x)$  が小さくなると  $\bar{U}_k^*$  も小さくなる .

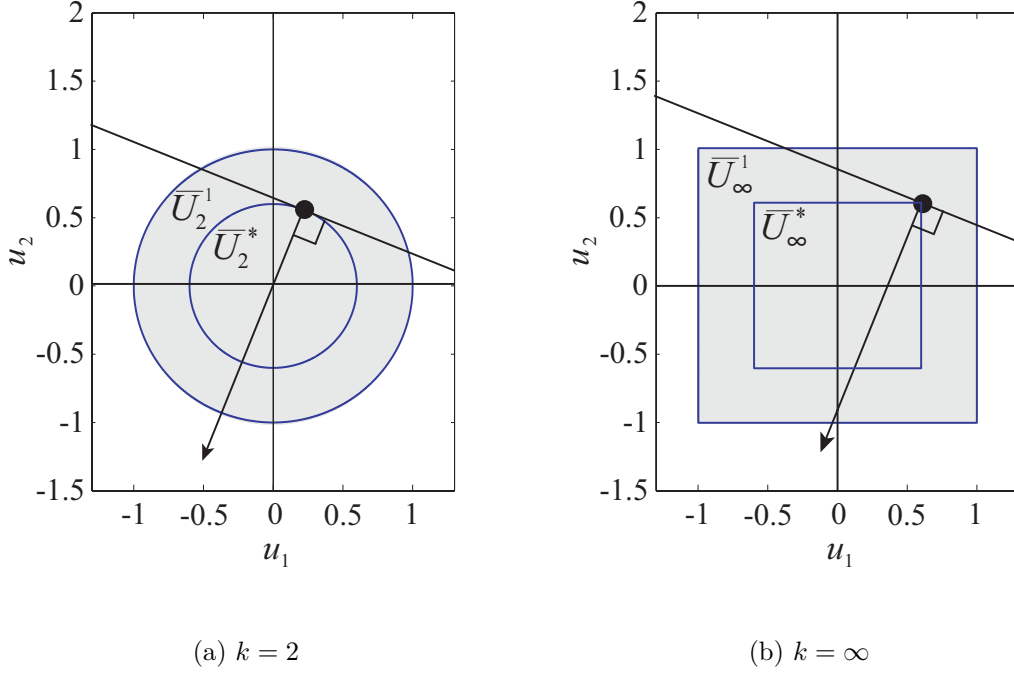


図 3 Input that minimizes  $\dot{V}(x, u)$  in  $\bar{U}_k^*$

制約  $u \in \bar{U}_k^*$  内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力は,

$$u_i = \begin{cases} -b_1(x) \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) & (L_{g_i} V \neq 0) \\ 0 & (L_{g_i} V = 0) \end{cases} \quad (68)$$

$(i = 1, \dots, m)$

と書ける．ただし,  $b_1 : \{x \in W_1 \mid L_g V \neq 0\} \rightarrow (0, 1)$  は連続関数である．入力 (68) を与えると,  $L_g V = 0$  の場合, 条件 (20) より  $\dot{V}(x) < 0$  ( $\forall x \neq 0$ ) となる． $L_g V \neq 0$  の場合, 局所制御 Lyapunov 関数の微分は

$$\dot{V}(x) = L_f V - b_1(x) \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}} \quad (69)$$

となる．条件  $\dot{V}(x) < 0$  ( $\forall x \in W_1 \setminus \{0\}$ ) を満たすようにするためには, 関数  $b_1(x)$

を以下のように選べばよい．

$$b_1(x) = \frac{1}{2}(P + |P|) + b_2(x) \quad (70)$$

ただし， $b_2 : \{x \in W_1 \mid L_g V \neq 0\} \rightarrow (0, 1 - \frac{1}{2}(P + |P|))$  は連続関数である．このとき，(66)，(69) および (70) 式より

$$\dot{V}(x) = \begin{cases} -b_2(x) \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}} < 0 & (0 < P < 1) \\ L_f V - b_1(x) \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}} < 0 & (P \leq 0) \end{cases} \quad (71)$$

となるので，条件  $\dot{V}(x) < 0$  ( $\forall x \in W_1 \setminus \{0\}$ ) は満たされる．関数  $b_2(x)$  の選び方の一例を以下に示す．

定理 8. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える． $V(x)$  はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数， $W_1$  は補題 2 の漸近安定化可能領域， $P(x)$  は (66) 式で定義される関数， $c > 0$  と  $q \geq 1$  は定数とする．このとき，制御入力

$$u_i = \begin{cases} -\frac{P + |P| + c \|L_g V\|_q}{2 + c \|L_g V\|_q} \cdot \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (72)$$

$(i = 1, \dots, m)$

は領域  $W_1$  で原点を漸近安定化する． $m = 1$  あるいは  $1 < k < \infty$  ならば，入力は  $W_1 \setminus \{0\}$  で連続である．さらに局所制御 *Lyapunov* 関数が小入力特性を満たすならば，入力は原点でも連続である．  $\square$

*Proof.* (20)，(66) および (72) 式より， $m = 1$  あるいは  $1 < k < \infty$  ならば，入力は  $W_1 \setminus \{0\}$  で連続である．よって，閉ループ系は Carathéodory の解を持つ． $k = \infty$  ならば  $L_{g_i} V = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) となる領域で， $k = 1$  ならば  $|L_{g_i} V| = \|L_g V\|_\infty$  ( $i = 1, \dots, m$ ) となる領域で入力は不連続になるが，入力が不連続になる領域の  $\mathbb{R}^n$  上の Lebesgue 測度は 0 となるので，ディファレンシャル・インクルージョンの解が存在する．

$L_g V = 0$  の場合，明らかに入力制約 (51) は満たされる． $L_g V \neq 0$  の場合，領域  $W_1$  では  $P(x) < 1$  となることより，

$$\|u\|_k = \frac{P + |P| + c\|L_g V\|_q}{2 + c\|L_g V\|_q} < 1$$

を得る．よって，入力制約 (51) は満たされる． $\delta < 1$ ， $\|L_g V\|_q < \delta$ ，かつ  $L_f V < \delta\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}$  ならば， $\|u\|_k < (2+c)\delta$  となる． $\delta$  を十分小さくとると  $\|u\|_k$  は任意に小さくできる．よって， $m = 1$  あるいは  $1 < k < \infty$  の場合，局所制御 Lyapunov 関数が小入力特性を満たすならば，入力は原点でも連続である．

$P(x) \leq 0$  の場合，すべての  $x \neq 0$  に対して  $\dot{V}(x) < 0$  となることは明らかである． $0 < P(x) < 1$  の場合，制御入力 (72) は

$$u_i = - \left\{ P + \frac{c(1-P)\|L_g V\|_q}{2 + c\|L_g V\|_q} \right\} \cdot \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V)$$

と書ける．よって，局所制御 Lyapunov 関数の微分は

$$\dot{V}(x) = \frac{c(P-1)\|L_g V\|_q\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}}{2 + c\|L_g V\|_q} < 0$$

となる．条件 (20) も考慮すると，領域  $W_1$  内のすべての  $x \neq 0$  に対して  $\dot{V}(x) < 0$  となる．このとき，状態変数の軌道は局所制御 Lyapunov 関数の等高線の内側に入り，領域  $W_1$  を飛び出さない．よって，制御入力 (72) は領域  $W_1$  で原点を漸近安定化する．  $\square$

定理 8 において， $\|L_g V\|_q$  は，ある  $c_0 > 0$  に対して  $h(x) \leq c_0\|L_g V\|$  を満たす連続な関数  $h : W_1 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  で置き換えることができる．また，状態が収束するまでの時間はパラメータ  $c$  を大きくすると短くなり，パラメータ  $c$  を小さくすると長くなる．

*Proof.* 補題 2 を証明する．制御入力 (72) は領域  $W_1$  内で入力制約 (51) 付きシステム (18) を漸近安定化する制御則である．よって，補題 2 を得る．  $\square$

### 3.4 Malisoff の普遍制御則との比較

提案した安定化制御則 (72) と Malisoff の普遍制御則の比較を行う．Malisoff の提案した普遍制御則を以下に示す [1] ．

定理 9. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える． $f(x)$  と  $g(x)$  は滑らか， $V(x)$  はシステムの大域的制御 *Lyapunov* 関数， $r \geq 1$  は整数， $k = \frac{2r}{2r-1}$  とする．このとき，制御入力

$$u_i = \begin{cases} -\frac{L_f V + \left(L_f V^{2r} + \|L_g V\|_{2r}^{4r^2}\right)^{\frac{1}{2r}}}{1 + \left(1 + \|L_g V\|_{2r}^{2r(2r-1)}\right)^{\frac{1}{2r}}} \cdot \frac{L_{g_i} V^{2r-1}}{\|L_g V\|_{2r}^{2r}} & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (73)$$

$(i = 1, \dots, m)$

は  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  で滑らか，かつ原点を大域的に漸近安定化する．制御 *Lyapunov* 関数が小入力特性を満たすならば，入力は原点でも連続である．さらにシステムの右辺が  $x$  に関して実解析的かつ制御 *Lyapunov* 関数も実解析的ならば，入力は  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  で実解析的である．  $\square$

ただし，定理 9 では  $k$  が  $1 < k \leq 2$  の場合に限られていることに注意する．Malisoff の普遍制御則は，

$$u_i = \begin{cases} -b_3(x) \frac{L_{g_i} V^{2r-1}}{\|L_g V\|_{2r}^{2r-1}} = -b_3(x) \frac{L_{g_i} V^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}}} & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (74)$$

$(i = 1, \dots, m)$

と書ける．(72) および (74) 式より，提案した安定化制御則 (72) の方向ベクトルと Malisoff の普遍制御則 (73) の方向ベクトルは一致していることがわかる．よって，制御則 (72) は Malisoff の制御則を任意の  $k \geq 1$  の場合に拡張したものである

といえる．Malisoff の制御則に  $2r = \frac{k}{k-1}$  を代入すると，

$$u_i = \begin{cases} -\frac{L_f V + \left( |L_f V|^{\frac{k}{k-1}} + \|L_g V\|^{\frac{(k-1)^2}{k-1}} \right)^{\frac{k-1}{k}}}{1 + \left( 1 + \|L_g V\|^{\frac{(k-1)^2}{k-1}} \right)^{\frac{k-1}{k}}} \cdot \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|^{\frac{k}{k-1}}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (75)$$

( $i = 1, \dots, m$ )

となる．制御入力 (75) も領域  $W_1$  で原点を漸近安定化し，任意の  $k \geq 1$  に対して入力制約 (51) を満たす．定理 9 で  $r \geq 1$  を整数に限定し，(73) 式中で  $2r$  乗根を用いているのは，システムの右辺が  $x$  に関して実解析的かつ制御 Lyapunov 関数も実解析的ならば入力が原点以外で実解析的になるようにするためである．しかし，実際のシステムに適用する際には実解析性はあまり重要ではなく，連続性のみ要求されることが多い．そこで，本論文では計算の簡単化のため連続性だけを要求し， $\frac{k}{k-1}$  乗根の代わりに絶対値を用いた．

提案した制御則 (72) や Malisoff の制御則 (73) は，入力空間  $\bar{U}_k^1$  内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する入力 (54) と同じ方向ベクトルを持ち，どちらも (68) 式で表される． $k > 2$  の場合，関数  $b_1(x)$  をどのように選んでも制御入力 (68) を原点以外で滑らかにすることはできない．これは， $\frac{1}{k-1} < 1$  となるので， $L_{g_i} V = 0$  となる領域で  $|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V)$  が微分不可能になるためである．一方， $1 < k \leq 2$  の場合， $\frac{1}{k-1} \geq 1$  となるので，(75) 式のように  $b_1(x)$  が  $C^1$  級関数になるように選べば，制御入力 (68) も  $C^1$  級関数になる．

### 3.5 任意の定数 $k \geq 1$ に対する準普遍制御則

$k = \infty$  あるいは  $k = 1$  の場合，関数  $b_1(x)$  をどのように選んでも制御入力 (68) は不連続になる恐れがある．たとえば， $k = \infty$  のとき，制御入力は  $u_i = -b_1(x) \operatorname{sgn}(L_{g_i} V)$  となるので， $L_{g_i} V = 0$  となる領域で不連続になる．また， $k = 1$  のとき，制御入力  $u_i$  は  $|L_{g_i} V| = \|L_{g_j} V\|_\infty$  のときのみ値をとり，それ以外のとき

は0になってしまう．そのため，前節ではディファレンシャル・インクルージョンを考えて安定性を保証しなければならなかった．制御則の不連続性は，入力にチャタリングを発生させる． $k \simeq 2$ の場合，制御則(72)は原点以外で連続になりチャタリングは生じないが， $k \simeq \infty$ あるいは $k \simeq 1$ の場合，制御則(72)は不連続な制御則に近くなるので，入力にチャタリングが生じる恐れがある．そこで，本節では，任意の定数 $k \geq 1$ に対して準普遍制御則になるように，制御則を改良する．

入力が不連続になる原因を，図4から考察する． $k = 2$ の場合，入力空間 $\bar{U}_2^1$ は半径1の球であり，制御則(72)は $u = -b_1(x)L_g V^T / \|L_g V\|_2$ となる．この入力は，入力空間 $\bar{U}_2^1$ に相似な部分空間 $\bar{U}_2^*$ 内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力，すなわち，部分空間 $\bar{U}_2^*$ と超平面 $Q : L_g V \cdot u = a_2$ との接点によって表される．図4より， $L_g V$ の方向が連続的に変化すると接点は境界 $\partial\bar{U}_2^*$ 上で連続的に移動することがわかる．一方， $k = \infty$ の場合，入力空間 $\bar{U}_\infty^1$ は超多面体であり，制御入力(72)は $u_i = -b_1(x) \operatorname{sgn}(L_{g_i} V)$ となる．この入力は部分空間 $\bar{U}_\infty^*$ と超平面 $Q : L_g V \cdot u = a_2$ との接点によって表される．図4より， $L_g V$ の方向が連続的に変化したとしても， $L_{g_i} V$ の符号が変わるとき，接点は超多面体のある点から別の点へジャンプしてしまうことがわかる． $k = 1$ の場合も入力空間 $\bar{U}_1^1$ は超多面体になるので， $k = \infty$ の場合と同様である．以上のように， $k = \infty$ あるいは $k = 1$ の場合は， $L_g V$ の方向が連続的に変化したとしても，部分空間 $\bar{U}_k^*$ と超平面 $Q : L_g V \cdot u = a_2$ との接点がジャンプするため，制御入力(72)が不連続になると捉えることができる．

本節では， $L_g V$ の方向が連続的に変化するとき，部分空間と超平面 $Q : L_g V \cdot u = a_2$ との接点も連続的に移動するように部分空間を選ぶことによって，任意の定数 $k \geq 1$ に対する準普遍制御則を設計する．まず，図5に示すように，状態変数 $x$ に依存して連続的に変化する部分空間 $\bar{U}_{\hat{k}}^* \subset \bar{U}_{\hat{k}}^1$ を考える．ただし， $1 < \hat{k}(x) < \infty$ は連続な関数， $\bar{U}_{\hat{k}}^*$ は $\bar{U}_{\hat{k}}^1$ に相似な部分空間である．つぎに，制約 $u \in \bar{U}_{\hat{k}}^*$ を満たし，局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力を制御則として選ぶ．ここで，部分空間 $\bar{U}_{\hat{k}}^*$ は，制約 $u \in \bar{U}_{\hat{k}}^*$ 内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力が入力制約(51)と条件 $\dot{V}(x, u) < 0$  ( $\forall x \in W_1 \setminus \{0\}$ )を満たし，かつ任意の定数 $k \geq 1$ に対

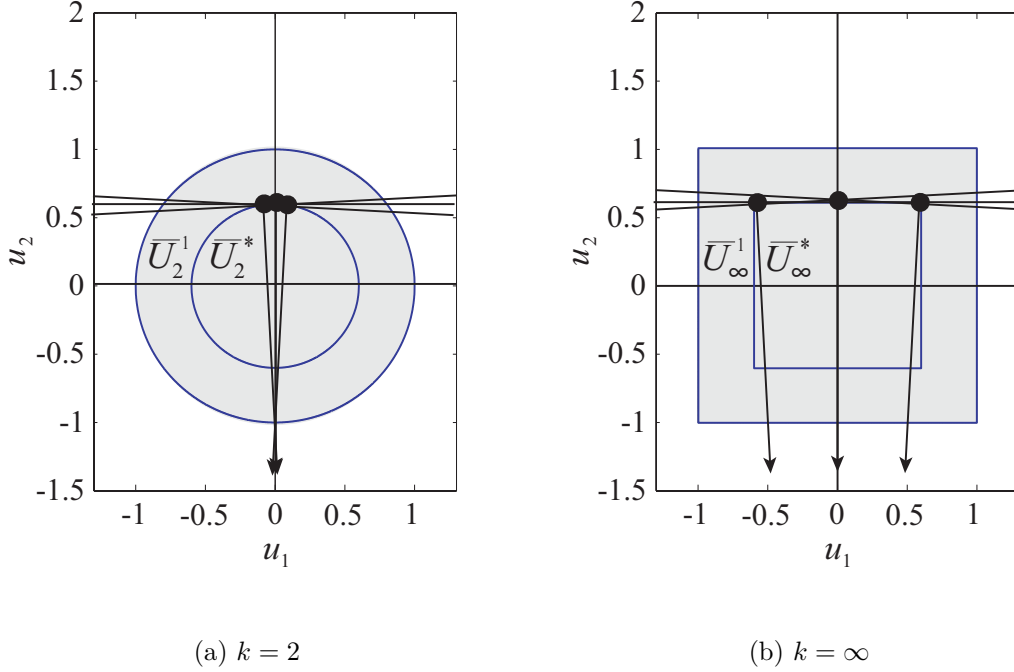


図 4 Input that minimizes  $\dot{V}(x, u)$  in  $\bar{U}_k^*$

して準普遍制御則の連続性の条件を満たすように選ばなければならないことに注意する．そこで，(66)式で定義された連続関数  $P : \{x \in W_1 \mid L_g V \neq 0\} \rightarrow (-\infty, 1)$  によって，部分空間  $\bar{U}_{\hat{k}}^*$  を以下のように変化させる．

1.  $P(x) \rightarrow 1$  のとき  $\bar{U}_{\hat{k}}^* \rightarrow \bar{U}_k^1$  .
2.  $P(x) \leq 0$  のとき  $\bar{U}_{\hat{k}}^*$  は小さい球  $\bar{U}_2^*$  になる .

制約  $u \in \bar{U}_{\hat{k}}^*$  内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力は，

$$u_i = \begin{cases} -b_4(x) |L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}} \text{sgn}(L_{g_i} V) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (76)$$

$(i = 1, \dots, m)$

と書ける．ただし， $b_4 : \{x \in W_1 \mid L_g V \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  は連続関数である．あとは，3.3節の場合と同様にして制御則を設計すればよい．以下では，関数  $\hat{k}(x)$  の選び方について考察する．



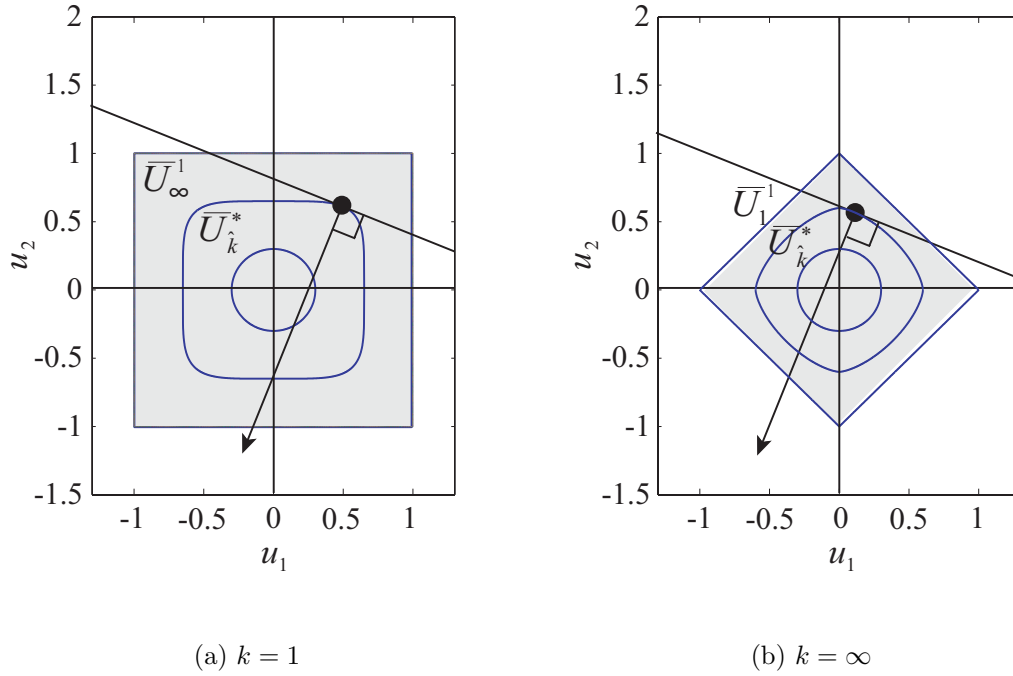


図 5 Input that minimizes  $\dot{V}(x, u)$  in  $\bar{U}_k^*$

関数  $\hat{k}(x)$  は連続かつ  $1 < \hat{k}(x) < \infty$  を満たすので,  $L_g V$  の方向が連続的に変化する時, 部分空間  $\bar{U}_k^*$  と超平面  $Q : L_g V \cdot u = a_2$  との接点は連続的に移動する. しかし,  $\hat{k}(x) \simeq \infty$  あるいは  $\hat{k}(x) \simeq 1$  の場合, 部分空間  $\bar{U}_k^*$  は超多面体に近い形になるため, 関数  $\hat{k}(x)$  が  $\hat{k}(x) \simeq \infty$  あるいは  $\hat{k}(x) \simeq 1$  に長く停留すると, 入力にチャタリングが生じる恐れがある. チャタリングを回避するためには, できるだけ広い領域で  $\hat{k}(x) \simeq 2$  となるように関数  $\hat{k}(x)$  を設計すればよい. ただし, 制約  $u \in \bar{U}_k^*$  内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を負にできなければならないため,  $P(x) > 0$  のとき関数  $\hat{k}(x)$  の値は制限される. 以下では, 関数  $\hat{k}(x)$  が満たすべき条件を導出する.

制約  $u \in \bar{U}_k^*$  内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力と同じ方向

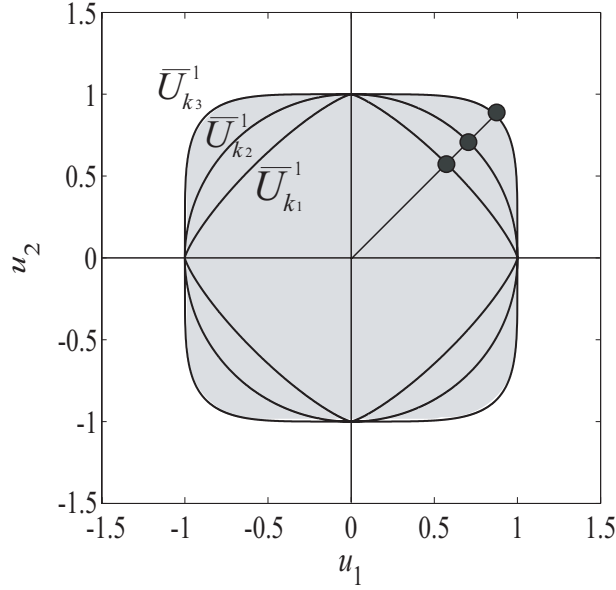


図 6 Comparison of norms ( $1 \leq k_1 < k_2 < k_3$ )

ベクトルを持ち，かつ入力空間  $U_k^1$  の境界上に値をとる入力は，

$$u_i = \begin{cases} -\frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (77)$$

$(i = 1, \dots, m)$

と書ける．関数  $\hat{k}(x)$  は，この入力 (77) によって条件  $\dot{V}(x, u) < 0$  ( $\forall x \in W_1 \setminus \{0\}$ ) を満たすように選ばなければならない． $L_g V = 0$  あるいは  $\hat{k}(x) = k$  の場合，明らかにこの条件は満たされる．

- (i)  $\hat{k}(x) < k$  の場合について考える．補題 1 より，入力 (77) を与えると，局所制御 Lyapunov 関数の微分は

$$\dot{V}(x) \leq P \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}} - \|L_g V\|_{\frac{\hat{k}}{k-1}} \quad (78)$$

となる．等号が成立するのは，ベクトル  $L_g V$  の一つの成分だけが値を持つときに限られる．図 6 に示すように，右辺が最大値をとるのは  $|L_{g_1} V| = \dots = |L_{g_m} V|$  のときである．この値を (78) 式に代入すると， $\dot{V}(x) < 0$  を満たすためには

$$\hat{k}(x) \geq \frac{k}{1 - k \log_m P} \quad (79)$$

となるように関数  $\hat{k}(x)$  を選ばなければならないことがわかる．

- (ii)  $\hat{k}(x) > k$  の場合について考える．補題 1 より，入力 (77) を与えると，局所制御 Lyapunov 関数の微分は

$$\dot{V}(x) \leq \frac{\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}}{\|L_g V\|_{\frac{1}{k-1}}} \left( P \|L_g V\|_{\frac{1}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}} - \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}} \right) \quad (80)$$

となる．等号が成立するのは，ベクトル  $L_g V$  の一つの成分だけが値を持つときに限られる．図 6 に示すように，右辺の  $(\cdot)$  が最大値をとるのは  $|L_{g_1} V| = \dots = |L_{g_m} V|$  のときである．この値を (80) 式に代入すると， $\dot{V}(x) < 0$  を満たすためには

$$\hat{k}(x) \leq \frac{k}{1 + k \log_m P} \quad (81)$$

となるように関数  $\hat{k}(x)$  を選ばなければならないことがわかる．

チャタリングを回避するためには，条件 (79) および (81) を満たし，かつ，できるだけ広い領域で  $k(x) \simeq 2$  となるように関数  $\hat{k}(x)$  を設計すればよい．関数  $b_4(x)$  および  $\hat{k}(x)$  の選び方の一例を以下に示す．

定理 10. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える．ただし， $m \geq 2$  とする． $V(x)$  はシステムの局所制御 Lyapunov 関数， $W_1$  は補題 2 の漸近安定化可能領域， $P(x)$  は (66) 式で定義される関数， $c > 0$  と  $q \geq 1$  は定数とする．関数  $\hat{k}(x)$  および  $\bar{k}(x)$  を以下のように選ぶ．

$$\hat{k}(x) = \begin{cases} \frac{k}{1 - k \log_m \left\{ P + (1 - P) m^{-\frac{|k-2|}{2k}} \right\} \operatorname{sgn}(k-2)} & (0 < P < 1) \\ 2 & (P \leq 0) \end{cases} \quad (82)$$

$$\bar{k}(x) = \begin{cases} \hat{k}(x) & (k \geq 2) \\ k & (1 \leq k < 2) \end{cases} \quad (83)$$

このとき，制御入力

$$u_i = \begin{cases} \frac{-(P + |P| + c\|L_g V\|_q)}{(P + |P|) \left(1 - m^{-\frac{|k-2|}{2k}}\right) + 2m^{-\frac{|k-2|}{2k}} + c\|L_g V\|_q} \cdot \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|^{\frac{1}{k-1}}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (84)$$

は領域  $W_1$  で原点を漸近安定化し， $W_1 \setminus \{0\}$  で連続である．さらに局所制御 *Lyapunov* 関数が小入力特性を満たすならば，入力は原点でも連続である．  $\square$

*Proof.* (20)，(66)，(82)，(83) および (84) 式より，入力は  $W_1 \setminus \{0\}$  で連続である．(82) 式より， $k \geq 2$  のとき  $\hat{k}(x) \leq k$ ， $1 \leq k < 2$  のとき  $\hat{k}(x) > k$  となっていることがわかる．

$L_g V = 0$  の場合，明らかに入力制約 (51) は満たされる． $L_g V \neq 0$  の場合，領域  $W_1$  では  $P(x) < 1$  となること，および，補題 1 より  $\hat{k}(x) \leq k$  のとき  $\|\cdot\|_{\hat{k}} \geq \|\cdot\|_k$  となることを用いると，

$$\|u\|_k \leq \frac{P + |P| + c\|L_g V\|_q}{P + |P| + (2 - P - |P|) m^{-\frac{|k-2|}{2k}} + c\|L_g V\|_q} < 1$$

を得る．よって，入力制約 (51) は満たされる． $\delta < 1$ ， $\|L_g V\|_q < \delta$ ，かつ  $L_f V < \delta \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}$  ならば， $\|u\|_k < (2 + c) m^{\frac{|k-2|}{2k}} \delta$  となる． $\delta$  を十分小さくとると  $\|u\|_k$  は任意に小さくできる．

$P(x) \leq 0$  の場合，すべての  $x \neq 0$  に対して  $\dot{V}(x) < 0$  となることは明らかである．以下では  $0 < P(x) < 1$  の場合について考える．

(i)  $k \geq 2$  のとき， $\hat{k}(x) \leq k$  より，局所制御 *Lyapunov* 関数の微分は

$$\dot{V}(x) < \frac{(2P + c\|L_g V\|_q) y_1(x)}{2 \left\{ P + (1 - P) m^{\frac{2-k}{2k}} \right\} + \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}}$$

となる．ここで，

$$y_1(x) = \left\{ P + (1 - P)m^{\frac{2-k}{2k}} \right\} \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}} - \|L_g V\|_{\frac{\hat{k}}{k-1}} \quad (85)$$

である． $y_1(x)$  が最大値をとるのは  $|L_{g_1} V| = \dots = |L_{g_m} V|$  のときである．この値を (85) 式に代入し，(82) 式を用いると， $y_1(x) < 0$  を得る．よって  $\dot{V}(x) < 0$  となる．

(ii)  $1 \leq k < 2$  のとき， $\hat{k}(x) > k$  より，局所制御 Lyapunov 関数の微分は

$$\dot{V}(x) < \frac{(2P + c\|L_g V\|_q)\|L_g V\|_{\frac{\hat{k}}{k-1}} y_2(x)}{\|L_g V\|_{\frac{1}{k-1}} \left[ 2 \left\{ P + (1 - P)m^{\frac{k-2}{2k}} \right\} + \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}} \right]}$$

となる．ここで，

$$y_2(x) = \left\{ P + (1 - P)m^{\frac{k-2}{2k}} \right\} \|L_g V\|_{\frac{1}{k-1}} - \|L_g V\|_{\frac{\hat{k}}{k-1}} \quad (86)$$

である． $y_2(x)$  が最大値をとるのは  $|L_{g_1} V| = \dots = |L_{g_m} V|$  のときである．この値を (86) 式に代入し，(82) 式を用いると， $y_2(x) < 0$  を得る．よって  $\dot{V}(x) < 0$  となる．

条件 (20) も考慮すると，領域  $W_1$  内のすべての  $x \neq 0$  に対して  $\dot{V}(x) < 0$  となるので，制御入力 (84) は領域  $W_1$  で原点を漸近安定化する．  $\square$

### 3.6 シミュレーション

入力制約  $\|u\|_k < 1$  を持つ線形システム

$$\Sigma_\ell \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 4x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2 \end{cases} \quad (87)$$

を考える．ここで，局所制御 Lyapunov 関数として  $V(x) = (x_1^2 + x_2^2)/2$  を選ぶ．まず， $k = 3$  の場合について考える．(66) 式より，

$$P(x) = \frac{x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2}{\|x\|_{\frac{3}{2}}} \quad (88)$$

となる．定理 8, 10 において  $c = 1, q = 1$  とおくと，準普遍制御則

$$u_i = \begin{cases} -\frac{P + |P| + \|x\|_1}{2 + \|x\|_1} \cdot \frac{|x_i|^{\frac{1}{2}}}{\|x\|^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sgn}(x_i) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (89)$$

$(i = 1, 2)$

および

$$u_i = \begin{cases} -\frac{P + |P| + \|x\|_1}{\left(1 - 2^{-\frac{1}{6}}\right)(P + |P|) + 2^{\frac{5}{6}} + \|x\|_1} \cdot \frac{|x_i|^{\frac{1}{k-1}}}{\|x\|^{\frac{1}{k-1}}} \operatorname{sgn}(x_i) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (90)$$

$(i = 1, 2)$

は領域  $W_1 = \{x | x_1^2 + x_2^2 < \sqrt[3]{2}/9\}$  で原点を漸近安定化する．ここで，

$$\hat{k}(x) = -\frac{3}{1 - 3 \log_2 \left\{ P + (1 - P)2^{-\frac{1}{6}} \right\}}$$

である．システム  $\Sigma_\ell$  に制御則 (89) および (90) を適用して比較する．初期状態を  $x = (-0.26, 0.26)^T$  としたときの状態変数の応答，入力とノルム  $\|u\|_3$  の変化，状態変数の軌道を図 7 および図 8 に示す．図 7 (d) および図 8 (d) の原点を中心とする実線円は，吸引  $W_1$  を表している．どちらの場合も状態変数は 0 に収束し，入力制約は満たされていることがわかる．また，どちらの入力にもチャタリングは生じていない．

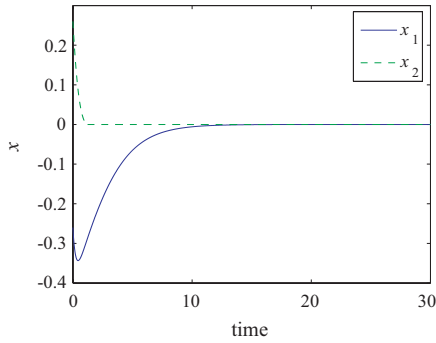
つぎに， $k = \infty$  の場合について考える．(66) 式より，

$$P(x) = \frac{x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2}{\|x\|_1} \quad (91)$$

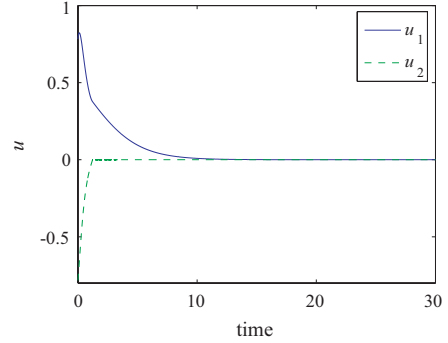
となる．定理 8, 10 において  $c = 1, q = 1$  とおくと，漸近安定化制御則

$$u_i = \begin{cases} -\frac{P + |P| + \|x\|_1}{2 + \|x\|_1} \operatorname{sgn}(x_i) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (92)$$

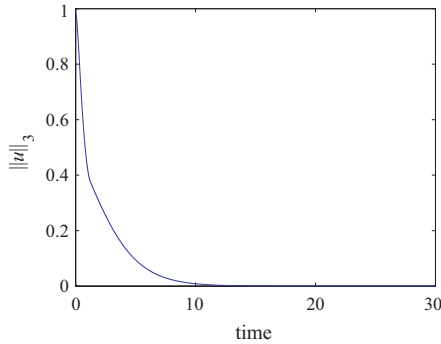
$(i = 1, 2)$



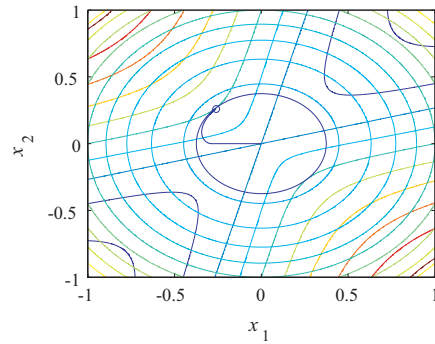
(a) Response of state



(b) Change in input



(c) Change in norm  $\|u\|_3$



(d) Trajectory of state

図 7 Response with semi-universal controller (89) in case of  $k = 3$

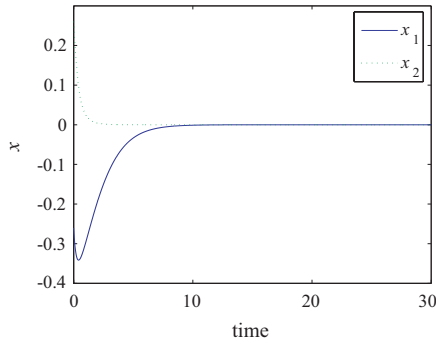
および準普遍制御則

$$u_i = \begin{cases} -\frac{P + |P| + \|x\|_1}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(P + |P|) + \sqrt{2} + \|x\|_1} \cdot \frac{|x_i|^{\frac{1}{k-1}} \operatorname{sgn}(x_i)}{\|x\|^{\frac{1}{k-1}}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (93)$$

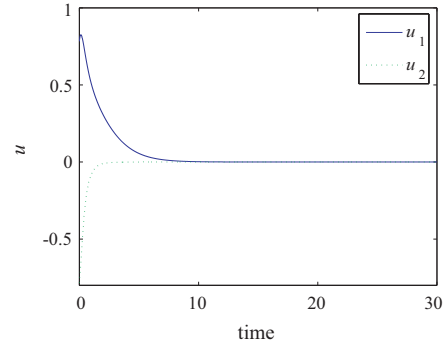
$(i = 1, 2)$

は領域  $W_1 = \{x | x_1^2 + x_2^2 < 2/9\}$  で原点を漸近安定化する．ここで，

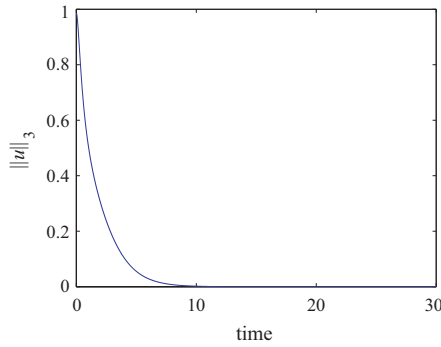
$$\hat{k}(x) = -\frac{1}{\log_2 \left\{ P + (1 - P) \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}}$$



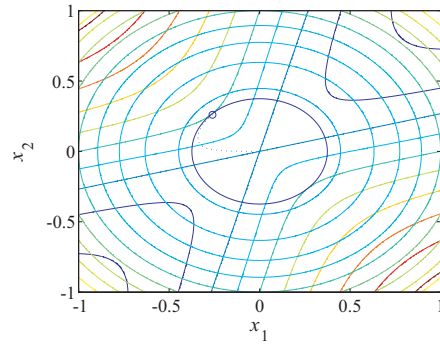
(a) Response of state



(b) Change in input



(c) Change in norm  $\|u\|_3$

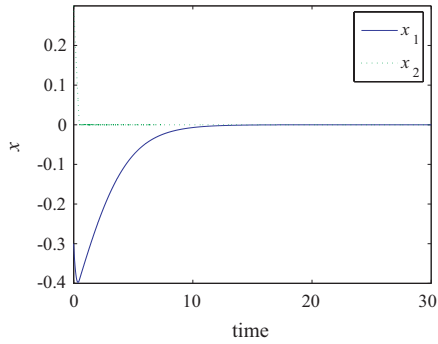


(d) Trajectory of state

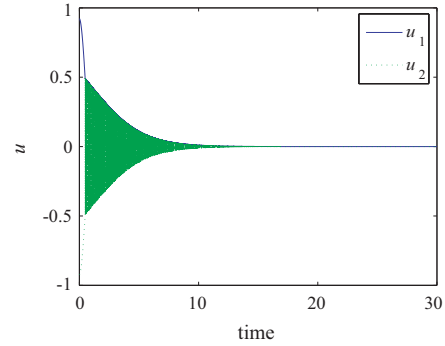
図 8 Response with semi-universal controller (90) in case of  $k = 3$

である．システム  $\Sigma_\ell$  に制御則 (92) および (93) を適用して比較する．初期状態を  $x = (-0.3, 0.3)^T$  としたときの状態変数と入力の変化，状態変数の軌道を図 9 および図 10 に示す．どちらの場合も状態変数は 0 に収束し，入力制約は満たされている．安定化制御則 (92) を適用したときは入力  $u_2$  にチャタリングが生じているのに対して，準普遍制御則 (93) を適用したときはチャタリングが生じていない．また，図 10 (a) では図 9 (a) に比べて小さなエネルギーを与えているにもかかわらず，状態変数が収束するまでの時間は短くなっている．これは，チャタリング入力が無駄に消費されているためと考えられる．

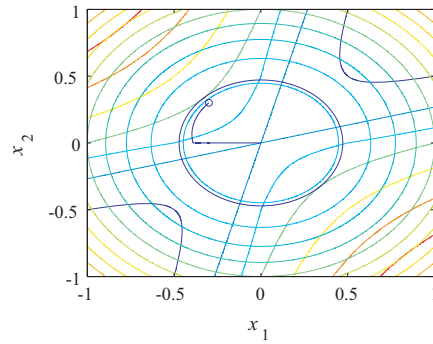




(a) Response of state



(b) Change in input



(c) Trajectory of state

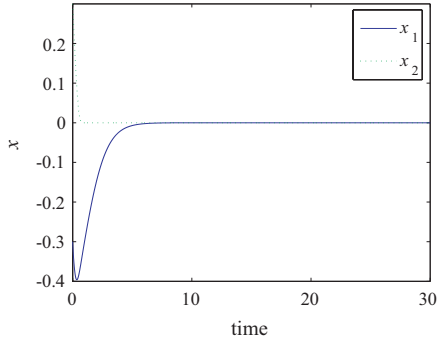
図 9 Response with stabilizing controller (92) in case of  $k = \infty$

入力制約  $\|u\|_k < 1$  を持つ非線形システム

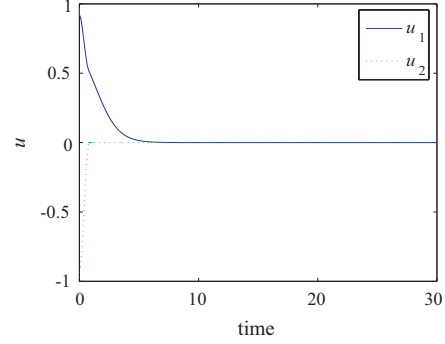
$$\Sigma_{nl} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + 3u_1 \cos x_3 - u_2 \sin x_3 \\ \dot{x}_3 = 2x_2 + u_1 \sin x_3 + u_2 \cos x_3 \end{cases} \quad (94)$$

を考える．局所制御 Lyapunov 関数として

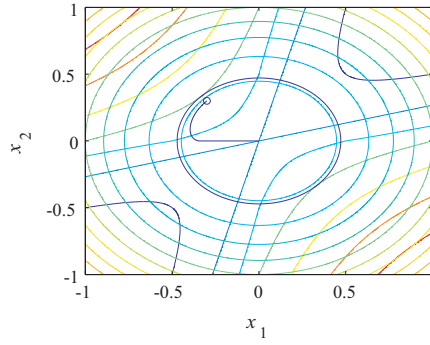
$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 \quad (95)$$



(a) Response of state



(b) Change in input



(c) Trajectory of state

図 10 Response with semi-universal controller (93) in case of  $k = \infty$

を選ぶと,

$$\begin{aligned}
 L_f V &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_2 + x_3) \\
 &\quad + (x_1 + 2x_2 + x_3)x_1^3 + 2(x_1 + x_2 + 2x_3)x_2 \\
 L_{g_1} V &= 3(x_1 + 2x_2 + x_3) \cos x_3 + (x_1 + x_2 + 2x_3) \sin x_3 \\
 L_{g_2} V &= -(x_1 + 2x_2 + x_3) \sin x_3 + (x_1 + x_2 + 2x_3) \cos x_3
 \end{aligned} \tag{96}$$

となる.  $L_g V = 0$  となるのは  $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$  かつ  $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$  を満たすときだけであるが, このとき  $L_f V = -2x_2^2 < 0$  ( $\forall x \neq 0$ ) となるので,  $V(x)$  はシステム  $\Sigma$  の局所制御 Lyapunov 関数である.

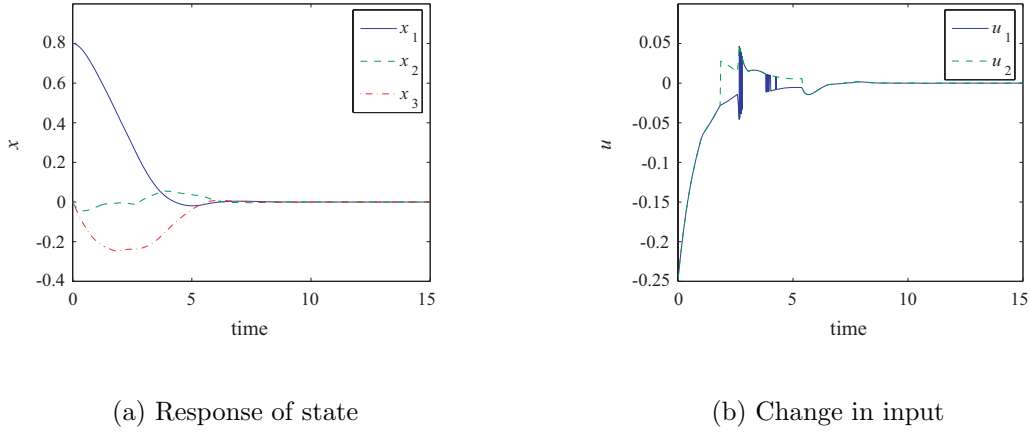


図 11 Response with stabilizing controller (72) in case of  $k = \infty$

以下では,  $k = \infty$  の場合について考える. (96) 式を (66) 式に代入すると,  $P(x)$  が得られる. システム  $\Sigma_{n\ell}$  に定理 8 および 10 の制御則を適用して比較する. 定理 8 および 10 において,  $c = 0.1$ ,  $q = 1$  とおき, 初期状態を  $x(0) = (0.8, 0.5, 0.3)^T$  としたときの状態変数と入力の変化を図 11 および 12 に示す. どちらの場合も状態変数は 0 に収束し, 入力制約は満たされている. また, 安定化制御則 (72) を用いたときは入力  $u_2$  にチャタリングが生じているのに対して, 準普遍制御則 (84) を用いたときはチャタリングが生じていない.

### 3.7 まとめ

本章では, 入力の  $k$ -ノルムが 1 より小さいという制約を持つ非線形システムに対して, 局所制御 Lyapunov 関数を用いて, できるだけ広い領域で原点を漸近安定化する準普遍制御則を提案した.

3.1 節では, 局所制御 Lyapunov 関数  $V(x)$  のある等高線の内側で微分  $\dot{V}(x, u)$  が負にできるならば, その領域で漸近安定化可能であることを示した. 3.2 節では, 入力空間  $U_k^1$  の閉包  $\bar{U}_k^1$  内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する入力を求め, 微分  $\dot{V}(x, u)$  を負にできる領域では  $P(x) < 1$  となることを明らかにした. 3.3 節では,  $\bar{U}_k^1$  内で  $\dot{V}(x, u)$  を最小にする入力と同じ方向ベクトルを持つ制御則

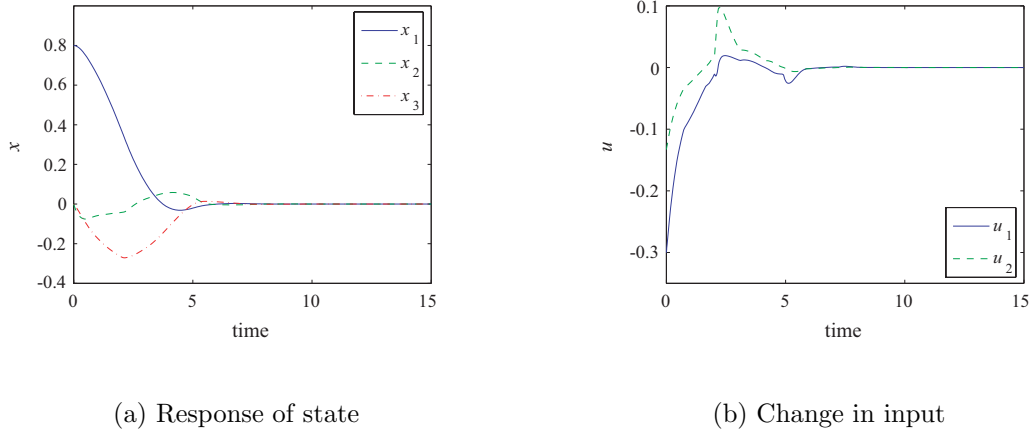


図 12 Response with semi-universal controller (84) in case of  $k = \infty$

を提案した．ここでは， $P(x) \rightarrow 1$  のとき  $\bar{U}_k^* \rightarrow \bar{U}_k^1$  となり， $P(x)$  が小さくなると  $\bar{U}_k^*$  も小さくなるような相似部分空間  $\bar{U}_k^* \subset \bar{U}_k^1$  を考え，部分空間  $\bar{U}_k^*$  内で  $\dot{V}(x, u)$  を最小にする入力を選ぶことによって，これを達成した．3.4 節では，提案した制御則が Malisoff の普遍制御則の一般化になっていることを示した．提案した制御則は  $1 < k < \infty$  のとき準普遍制御則になるが， $k = \infty$  あるいは  $k = 1$  のとき入力は不連続になる恐れがある．3.5 節では，任意の定数  $k \geq 1$  に対して原点以外で連続になるように制御則を改良した．ここでは， $P(x) \rightarrow 1$  のとき  $\bar{U}_k^* \rightarrow \bar{U}_k^1$  となり， $P(x) \leq 0$  のとき小さい球  $\bar{U}_2^*$  になるような相似部分空間  $\bar{U}_k^* \subset \bar{U}_k^1$  を考え，部分空間  $\bar{U}_k^*$  内で  $\dot{V}(x, u)$  を最小にする入力を選ぶことによって，これを達成した．さらに，関数  $\hat{k}(x)$  の満たすべき条件を導出した．3.6 節では，シミュレーションによって提案した制御則の有効性を確認した．

$k = 3$  の場合，どちらの制御則を用いても入力にチャタリングは生じないが， $k = \infty$  の場合，入力空間の閉包内で局所制御 Lyapunov 関数を最小化する入力と同じ方向ベクトルを持つ制御則を用いると，入力にチャタリングが生じた．このとき，大きなエネルギーを与えているにもかかわらず，状態変数が収束するまでの時間は長くなった．これは，チャタリング入力が無駄に消費されているためと考えられる．一般にチャタリング入力はシステムに負荷がかかるという理由で嫌われるが，小さいエネルギーで制御するためにも，チャタリングが発生しないよ

うに制御則を設計したほうがよいことがわかる．

ところで，本章で提案した制御則はロバスト性を保証していない．次章では，逆最適問題を解くことによってロバスト準普遍制御則を設計する．

## 4. 逆最適制御則の設計

2.4 節で紹介したように，入力制約のないシステムに対して提案された Sontag の制御則 (41) は逆最適レギュレータになっており，セクタ余裕  $(\frac{1}{2}, \infty)$  を持つ．しかし，入力制約がある場合の逆最適問題は取り扱われておらず，これまでに設計された制御則はロバスト性を保証していない．また，従来の研究では，Sontag の制御則 (41) のように方向ベクトル  $-L_g V$  を持つ逆最適制御則しか考えられていない [7, 8]．

そこで，本章では，入力制約 (51) を持つ入力アファインな非線形システム (18) に対して，制御則 (72) あるいは (84) と同じ方向ベクトルを持つ逆最適制御則を設計する．従来の逆最適制御則の方向ベクトルが  $-L_g V$  であるのに対して，制御則 (72) および (84) では， $-L_g V$  の次数が拡張されている．そのため，最小化される評価関数の形も変わるはずである．

4.1 節では，制御則 (72) と同じ方向ベクトルを持つ逆最適制御則を設計する．まず，入力制約  $u \in U$  を持つシステム (18) に対して，制御則 (72) と同じ方向ベクトルを持つ入力によって最小化される評価関数を導出し，セクタ余裕の下限を明らかにする．つぎに，入力制約 (51) のもとでこのような逆最適制御則が存在する領域を求める．さらに，この領域で原点を漸近安定化する逆最適制御則を設計する．同様にして，4.2 節では，制御則 (84) と同じ方向ベクトルを持つ逆最適制御則を設計する．4.3 節では，セクタ余裕と吸引領域との関係について述べる．4.4 節では，提案した逆最適制御則のロバスト性を確認するため，シミュレーションを行う．

### 4.1 定数 $1 < k < \infty$ に対する準普遍制御則と同じ方向ベクトルを持つ逆最適制御則

#### 4.1.1 評価関数とセクタ余裕

3.3 節では不連続な入力も許容して Fillippov の意味で安定であることを示したが，入力が不連続な場合，逆最適性を示すことは一般に困難である．そこで，逆

最適問題においては原点以外で連続な入力だけを考えるため,  $1 < k < \infty$  と仮定する. 本節では, 入力制約  $u \in U$  のもとで, 制御入力 (72) と同じ方向ベクトルを持つ入力

$$u_i = -\frac{1}{R(x)} |L_{g_i} V|^{k-1} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (97)$$

によって最小化される評価関数を求める. ただし,  $R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  は原点以外で連続な正値をとる関数とする. (97) 式より

$$L_{g_i} V + R^{k-1}(x) |u_i|^{k-1} \operatorname{sgn}(u_i) = 0 \quad (98)$$

を得る. (98) 式の左辺を

$$\frac{\partial K}{\partial u_i}(x, u) := L_{g_i} V + R^{k-1}(x) |u_i|^{k-1} \operatorname{sgn}(u_i) \quad (99)$$

と定義する. (99) 式を  $u_i$  で積分し, すべての  $i$  について足し合わせると,

$$K(x, u) = L(x) + L_g V \cdot u + \frac{R^{k-1}(x)}{k} \|u\|_k^k \quad (100)$$

を得る. 未知の関数  $\ell(x)$  を考え,  $L(x)$  を

$$L(x) = L_f V + \ell(x) \quad (101)$$

と定義すると,  $K(x, u)$  は次式のようになる.

$$K(x, u) = \dot{V}(x, u) + \ell(x) + \frac{R^{k-1}(x)}{k} \|u\|_k^k \quad (102)$$

今,

$$L_0(x, u) = \ell(x) + \frac{R^{k-1}(x)}{k} \|u\|_k^k \quad (103)$$

とおき, 評価関数を

$$J = \int_0^\infty L_0(x, u) dt \quad (104)$$

と定義する. ここで, 関数  $L_0(x, u)$  は  $L_0(x, u) \geq 0$  を満たすと仮定する. (102), (103) および (104) 式より, 評価関数は以下のように書き直される.

$$J = \int_0^\infty K(x, u) dt + V(x(0)) + V(x(\infty)) \quad (105)$$

関数  $\ell(x)$  を

$$\ell(x) = \frac{k-1}{kR(x)} \|L_g V\|^{\frac{k}{k-1}} - L_f V \quad (106)$$

と選ぶと, (97) および (99) 式より  $\partial K / \partial u_i(x, u) = 0$  となり, さらに (97), (102) および (106) 式より

$$K(x, u) = L_f V + \ell(x) - \frac{k-1}{kR(x)} \|L_g V\|^{\frac{k}{k-1}} = 0 \quad (107)$$

となるので, 制御則 (97) は評価関数  $J$  を最小化する. 制御則 (97) を与えたとき, 局所制御 Lyapunov 関数の微分は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= L_f V - \frac{1}{R(x)} \|L_g V\|^{\frac{k}{k-1}} \\ &= -\ell(x) - \frac{1}{kR(x)} \|L_g V\|^{\frac{k}{k-1}} \end{aligned}$$

条件  $L_0(x, u) \geq 0$  より,  $\ell(x) \geq 0$  を満たすように関数  $R(x)$  を選ばなければならないから,  $\dot{V}(x) < 0$  ( $\forall x \neq 0$ ) を得る.  $V(x(\infty)) = 0$  となるので, 制御則 (97) は原点を漸近安定化し, 評価関数  $J$  の最小値は  $\min J = V(x(0))$  となる. 以上より, つぎの補題を得る.

補題 4. 入力制約  $u \in U$  を持つシステム (18) を考える.  $1 < k < \infty$  は定数,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  は原点の近傍,  $V(x)$  はシステムの局所制御 Lyapunov 関数,  $\ell(x)$  は

$$\ell(x) = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{R(x)} \|L_g V\|^{\frac{k}{k-1}} - L_f V \quad (108)$$

で定義される関数,  $R: X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  は以下の条件を満たす原点以外で連続な正値をとる関数とする.

1.  $\ell(x) \geq 0, \quad \forall x$
2. 制御入力

$$u_i = -\frac{1}{R(x)} |L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (109)$$

は入力制約  $u \in U$  を満たす.



このとき，制御入力 (109) は原点を局所的に漸近安定化し，かつ評価関数

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ \ell(x) + \frac{R^{k-1}(x)}{k} \|u\|_k^k \right\} dt \quad (110)$$

を最小化する．また，少なくとも  $(\frac{k-1}{k}, \infty)$  のセクタ余裕を保証する．さらに関数  $R(x)$  が全領域  $\mathbb{R}^n$  で定義されるならば，制御入力 (109) は原点を大域的に漸近安定化する．  $\square$

*Proof.* 制御入力 (109) を与えたとき，局所制御 Lyapunov 関数の微分は以下のようになる．

$$\dot{V}(x) = L_f V - \frac{1}{R(x)} \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{k}{k-1}} = -\ell(x) - \frac{1}{kR(x)} \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{k}{k-1}}$$

$\ell(x) \geq 0$  より  $\dot{V}(x) < 0$  ( $\forall x \neq 0$ ) を得るから，制御入力 (109) は原点を漸近安定化し， $V(x(\infty)) = 0$  となる．これより，評価関数  $J$  は

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ L_f V + L_g V \cdot u + \ell(x) + \frac{R^{k-1}(x)}{k} \|u\|_k^k \right\} dt + V(x(0))$$

と書き直される．pre-Hamiltonian を

$$K(x, u) = L_f V + L_g V \cdot u + \ell(x) + \frac{R^{k-1}(x)}{k} \|u\|_k^k \quad (111)$$

と定義し，両辺を  $u_i$  で偏微分すると，

$$\frac{\partial K}{\partial u_i}(x, u) = L_{g_i} V + R^{k-1}(x) |u_i|^{k-1} \text{sgn}(u_i) \quad (112)$$

を得る．状態  $x$  を固定すると  $K(x, u)$  は  $u$  に関する厳密な凸関数なので，各  $x$  に対して  $K(x, u)$  を最小化する入力  $\bar{u}$  が唯一に決まる．入力  $\bar{u}$  が各  $x$  に対して  $K(x, u)$  を最小化するための必要十分条件は， $\partial K / \partial u(x, \bar{u}) = 0$  を満たすことである． $\partial K / \partial u(x, \bar{u}) = 0$  を満たす  $\bar{u}$  は制御入力 (109) に一致し， $K(x, \bar{u}) = 0$  となるので，制御入力 (109) は評価関数  $J$  を最小化し，最小値は  $\min J = V(x(0))$  となる．関数  $\ell(x)$  は以下のように書き直される．

$$\ell(x) = -\dot{V} \left( x, -\frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{R(x)} |L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}} \text{sgn}(L_{g_i} V) \right) \quad (113)$$

(109)，(113) 式および条件  $\ell(x) \geq 0$  より，セクタ余裕は少なくとも  $(\frac{k-1}{k}, \infty)$  となる．  $\square$

入力制約がない場合 ( $U \equiv \mathbb{R}^m$ ) , 以下の系が得られる .

系 2. 入力制約のないシステム (18) を考える .  $1 < k < \infty$  は定数 ,  $V(x)$  はシステムの制御 Lyapunov 関数 ,  $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  は原点以外で連続な正値をとる関数 , (109) 式は原点を大域的に漸近安定化する制御則 ,  $\gamma \geq \frac{k}{k-1}$  とする . このとき , 制御入力

$$\bar{u}_i = \gamma u_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (114)$$

は原点を大域的に漸近安定化し , かつ評価関数 (110) を最小化する . ただし ,  $\ell(x)$  は次式で定義される関数である .

$$\ell(x) = \gamma^{k-1} \left( \gamma \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{R(x)} \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{k}{k-1}} - L_f V \right) \quad (115)$$

また , 少なくとも  $(\frac{1}{\gamma}, \infty)$  のセクタ余裕を保証する .  $\square$

*Proof.* (109) 式が大域的漸近安定化制御則であること , および  $\gamma \geq \frac{k}{k-1} > 1$  より , 制御入力 (114) は原点を大域的に漸近安定化し , セクタ余裕は少なくとも  $(\frac{1}{\gamma}, \infty)$  となる . また , 関数  $\ell(x)$  は

$$\ell(x) = -\gamma^{k-1} \cdot \dot{V} \left( x, -\gamma \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{R(x)} |L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}} \text{sgn}(L_{g_i} V) \right) \quad (116)$$

と書き直されるので ,  $\gamma \cdot \frac{k-1}{k} \geq 1$  より  $\ell(x) \geq 0$  を得る . 残りの証明は補題 4 と同様である .  $\square$

#### 4.1.2 入力制約 $u \in U_k^1$ のもとで逆最適制御則が存在する領域

本節では , 入力制約 (51) のもとで , 補題 4 の逆最適制御則 (109) が存在する領域を求める . (113) 式より , 関数  $\ell(x)$  を最大化する  $R(x)$  は局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する  $R(x)$  と等しいことがわかる . 条件  $\ell(x) \geq 0$  および入力制約 (51) を満たす関数  $R(x)$  が存在する最大の領域を求めるため , 制御入力 (109) として , 入力制約  $u \in \bar{U}_k^1$  のもとで局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小化する入力 (54) を選ぶ . すなわち ,  $R(x) = \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}}$  とおく . このとき , 入力制約 (51) のもとでの関数  $\ell(x)$  の上限は以下ようになる .

$$\ell(x) = \frac{k-1}{k} \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}} - L_f V \quad (117)$$

$L_g V = 0$  の場合, (20) および (117) 式より  $\ell(x) = -L_f V \geq 0$  を得る.  $L_g V \neq 0$  の場合, (66) 式で定義される関数  $P(x)$  を考える. 入力制約 (51) のもとで  $\ell(x) \geq 0$  とできるための必要十分条件は,  $P(x) < (k-1)/k$  となることである.  $P(x) \geq \frac{k-1}{k}$  となる領域では, 入力制約 (51) 内でどのような入力を選んでも  $\ell(x) < 0$  となってしまう. これより, 逆最適制御則が存在する領域は以下のように得られる.

補題 5. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える. ただし,  $1 < k < \infty$  は定数とする.  $V(x)$  はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数,  $P(x)$  は (66) 式で定義される関数,  $a_2 > 0$  はすべての  $x \in W_2 \setminus \{0\} := \{x \mid V(x) < a_2\} \setminus \{0\}$  に対して

$$\inf_{u \in U_k^1} \left\{ L_f V + \frac{k-1}{k} L_g V \cdot u \right\} < 0 \quad (118)$$

を満たす最大の定数とすると, 領域  $W_2$  では補題 4 の逆最適制御則が存在し, 次式が成立する.

$$\sup_{x \in \{x \in W_2 \mid L_g V \neq 0\}} P(x) = \frac{k-1}{k} \quad (119)$$

□

#### 4.1.3 逆最適制御則

関数  $R(x)$  の選び方は一意に定まらないが,  $W_2$  全域で原点を漸近安定化する逆最適制御則は, 以下のように設計できる.

定理 11. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える. ただし,  $1 < k < \infty$  は定数とする.  $V(x)$  はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数,  $P(x)$  は (66) 式で定義される関数,  $\ell(x)$  は (108) 式で定義される関数,  $W_2$  は補題 5 で定義される領域,  $J$  は (110) 式で定義される評価関数,  $c > 0$  は正の定数とする. 関数  $R(x)$  を以下のように選ぶ.

$$R(x) = \begin{cases} \frac{\left(2 + c \|L_g V\|^{\frac{1}{k-1}}\right) \|L_g V\|^{\frac{1}{k-1}}}{\frac{k}{k-1}(P + |P|) + c \|L_g V\|^{\frac{1}{k-1}}} & (L_g V \neq 0) \\ \frac{2}{c} & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (120)$$

このとき，制御入力 (109) は領域  $W_2$  で原点を漸近安定化し，かつ評価関数  $J$  を最小化する．セクタ余裕は  $(\frac{k-1}{k}, \infty)$  である．入力は  $W_2 \setminus \{0\}$  で連続である．さらに局所制御 *Lyapunov* 関数が小入力特性を満たすならば，入力は原点でも連続である．  $\square$

*Proof.* (20), (66) および (120) 式より，関数  $R(x)$  は  $W_2 \setminus \{0\}$  で連続，かつ  $R(x) > 0$  ( $\forall x \in W_2$ ) である． $L_g V = 0$  の場合，(20) および (108) 式より  $\ell(x) = -L_f V \geq 0$  となる． $L_g V \neq 0$  の場合，補題 5 より領域  $W_2$  では  $P(x) < \frac{k-1}{k}$  となる． $L_g V \neq 0$  かつ  $P(x) \leq 0$  の場合，(66) および (108) 式より  $\ell(x) \geq 0$  となる． $L_g V \neq 0$  かつ  $0 < P(x) < \frac{k-1}{k}$  の場合，

$$\ell(x) = \frac{\left(\frac{k-1}{k} - P\right) c \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}} \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{k}{k-1}}}{2 + c \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}}} > 0$$

となる． $L_g V = 0$  の場合，明らかに入力制約 (51) は満たされる． $L_g V \neq 0$  の場合，領域  $W_2$  では  $P(x) < \frac{k-1}{k}$  となることより，

$$\|u\|_k = \frac{\frac{k}{k-1}(P + |P|) + c \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}}}{2 + c \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}}} < 1$$

を得る．よって，入力制約 (51) は満たされる． $\delta < 1$ ， $\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}^{\frac{1}{k-1}} < \delta$ ，かつ  $L_f V < \delta \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}$  ならば，

$$\|u\|_k < \frac{2k + c(k-1)}{k-1} \delta$$

となる． $\delta$  を十分小さくすると  $\|u\|_k$  は任意に小さくできる．補題 4 のすべての条件が満たされるから，制御入力 (109) は評価関数  $J$  を最小化する．関数  $\gamma_i(x)$  を

$$\gamma_i(x) = \frac{1}{R} |L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V)$$

とおき， $\phi_i(\gamma_i)$  を  $(\frac{k-1}{k}, \infty)$  のセクタ型非線形要素とする．制御入力

$$u_i = -\phi_i(\gamma_i) \quad (i = 1, \dots, m)$$

を与えたとき，局所制御 Lyapunov 関数の微分は

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= L_f V - L_g V \cdot \phi(\gamma) \\
&= -\ell(x) + \frac{k-1}{kR(x)} \|L_g V\|^{\frac{k}{k-1}} - L_g V \cdot \phi(\gamma) \\
&\leq \frac{k-1}{k} L_g V \cdot \gamma - L_g V \cdot \phi(\gamma) \\
&\leq L_g V \left( \frac{k-1}{k} \gamma - \phi(\gamma) \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^m R^{k-1} |\gamma_i|^{k-1} \operatorname{sgn}(\gamma_i) \left( \frac{k-1}{k} \gamma_i - \phi_i(\gamma_i) \right)
\end{aligned}$$

となる．ただし， $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^T$ ， $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)^T$  である． $\phi_i(\gamma_i)$  の定義より  $\dot{V}(x) < 0$  ( $\forall x \in W_2 \setminus \{0\}$ ) となるので，セクタ余裕は  $(\frac{k-1}{k}, \infty)$  である．  $\square$

注意 1. 定理 11 の逆最適制御則に対して，ディスク余裕は一般に保証されない．ただし， $k = 2$  の場合は，Sontag の普遍制御則の場合と同様に，システムを再設計することによって，ディスク余裕  $D(\frac{1}{2})$  を達成することができる [21]．  $\square$

## 4.2 任意の定数 $k \geq 1$ に対する準普遍制御則と同じ方向ベクトルを持つ逆最適制御則

### 4.2.1 評価関数とセクタ余裕

入力制約  $u \in U$  のもとで，制御入力 (84) と同じ方向ベクトルを持つ入力によって最小化される評価関数は以下のように得られる．

補題 6. 入力制約  $u \in U$  を持つシステム (18) を考える． $1 < \hat{k}(x) < \infty$  は連続な関数， $X \subseteq \mathbb{R}^n$  は原点の近傍， $V(x)$  はシステムの局所制御 Lyapunov 関数， $\ell(x)$  は

$$\ell(x) = \frac{\hat{k}-1}{\hat{k}} \cdot \frac{1}{R(x)} \|L_g V\|^{\frac{\hat{k}}{\hat{k}-1}} - L_f V \quad (121)$$

で定義される関数， $R: X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  は以下の条件を満たす原点以外で連続な正値をとる関数とする．

1.  $\ell(x) \geq 0, \quad \forall x$

2. 制御入力

$$u_i = -\frac{1}{R(x)} |L_{g_i} V|^{\frac{1}{\hat{k}-1}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (122)$$

は入力制約  $u \in U$  を満たす .

このとき , 制御入力 (122) は原点を局所的に漸近安定化し , かつ評価関数

$$J = \int_0^\infty \left\{ \ell(x) + \frac{R^{\hat{k}-1}(x)}{\hat{k}} \|u\|_{\hat{k}}^{\hat{k}} \right\} dt \quad (123)$$

を最小化する . また , 少なくとも  $\left(\frac{\hat{k}-1}{\hat{k}}, \infty\right)$  のセクタ余裕を保証する . さらに関数  $R(x)$  が全領域  $\mathbb{R}^n$  で定義されるならば , 制御入力 (122) は原点を大域的に漸近安定化する .  $\square$

証明は補題 4 と同様なので省略する .

#### 4.2.2 入力制約 $u \in U_k^1$ のもとで逆最適制御則が存在する領域

入力制約 (51) のもとで補題 6 の逆最適制御則 (122) が存在する領域は以下のよう  
に得られる .

補題 7. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える .  $1 < \hat{k}(x) < \infty$  は連続な関数 ,  $V(x)$  はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数 ,  $P(x)$  は (66) 式で定義される関数 ,  $a_3 > 0$  はすべての  $x \in W_3 \setminus \{0\} := \{x \mid V(x) < a_3\} \setminus \{0\}$  に対して

$$\inf_{u \in U_k^1} \left\{ L_f V + \inf \left( \frac{\hat{k}-1}{\hat{k}} \right) \cdot L_g V \cdot u \right\} < 0 \quad (124)$$

を満たす最大の定数とすると , 領域  $W_3$  では補題 6 の逆最適制御則が存在し , 次式が成立する .

$$\sup_{x \in \{x \in W_3 \mid L_g V \neq 0\}} P(x) = \inf \left( \frac{\hat{k}-1}{\hat{k}} \right) \quad (125)$$

$\square$

### 4.2.3 逆最適制御則

関数  $R(x)$  および  $\hat{k}(x)$  の選び方は一意に定まらないが、任意の  $k \geq 1$  に対して  $W_3$  全域で原点を漸近安定化する逆最適制御則は、以下のように設計できる。

定理 12. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える。ただし、 $m \geq 2$  とする。 $V(x)$  はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数、 $P(x)$  は (66) 式で定義される関数、 $\ell(x)$  は (121) 式で定義される関数、 $W_3$  は補題 7 で定義される領域、 $J$  は (123) 式で定義される評価関数、 $c > 0$  は正の定数とする。関数  $Q_1(x)$ 、 $\hat{k}(x)$ 、 $\bar{k}(x)$ 、 $Q_2(x)$  および  $R(x)$  を以下のように選ぶ。

$$Q_1(x) = P \max\left(\frac{k}{k-1}, 2\right) + \left\{1 - P \max\left(\frac{k}{k-1}, 2\right)\right\} m^{-\frac{|k-2|}{2k}} \quad (126)$$

$$\hat{k}(x) = \begin{cases} \frac{k}{1 - k \operatorname{sgn}(k-2) \log_m Q_1} & (0 < P < 1) \\ 2 & (P \leq 0) \end{cases} \quad (127)$$

$$\bar{k}(x) = \begin{cases} \hat{k}(x) & (k \geq 2) \\ k & (1 \leq k < 2) \end{cases} \quad (128)$$

$$Q_2(x) = \frac{\hat{k}}{\bar{k}-1} (P + |P|) \left(1 - m^{-\frac{|k-2|}{2k}}\right) + 2m^{-\frac{|k-2|}{2k}} + c \|L_g V\|^{\frac{1}{\bar{k}}}_{\frac{1}{k-1}} \quad (129)$$

$$R(x) = \begin{cases} \frac{Q_2 \|L_g V\|^{\frac{1}{\bar{k}}}_{\frac{1}{k-1}}}{\frac{\hat{k}}{\bar{k}-1} (P + |P|) + c \|L_g V\|^{\frac{1}{\bar{k}}}_{\frac{1}{k-1}}} & (L_g V \neq 0) \\ \frac{2m^{-\frac{|k-2|}{2k}}}{c} & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (130)$$

このとき、制御入力 (122) は領域  $W_3$  で原点を漸近安定化し、かつ評価関数  $J$  を最小化する。セクタ余裕は  $\left(\frac{\hat{k}-1}{\bar{k}}, \infty\right)$  である。入力は  $W_3 \setminus \{0\}$  で連続である。さらに局所制御 *Lyapunov* 関数が小入力特性を満たすならば、入力は原点でも連続である。□

*Proof.* (20), (66) および (130) 式より、関数  $R(x)$  は  $W_3 \setminus \{0\}$  で連続、かつ  $R(x) > 0$  ( $\forall x \in W_3$ ) である。 $L_g V = 0$  の場合、(20) および (121) 式より  $\ell(x) = -L_f V \geq 0$  となる。 $L_g V \neq 0$  の場合、補題 7 より領域  $W_3$  では  $P(x) < \min\left(\frac{k-1}{k}, \frac{1}{2}\right)$  とな

る． $P(x) \leq 0$  の場合，(66) および (121) 式より  $\ell(x) \geq 0$  となる． $0 < P(x) < \min\left(\frac{k-1}{k}, \frac{1}{2}\right)$  かつ  $k \geq 2$  の場合，

$$\ell(x) > \frac{\left(2P + \frac{\hat{k}-1}{\hat{k}}c\|L_gV\|_{\frac{1}{\hat{k}}}\right)y_3(x)}{\frac{2P\hat{k}}{\hat{k}-1}\left(1 - m^{\frac{2-k}{2k}}\right) + 2m^{\frac{2-k}{2k}} + c\|L_gV\|_{\frac{1}{\hat{k}}}}$$

となる．ここで，

$$y_3(x) = \|L_gV\|_{\frac{1}{\hat{k}}} - \left\{ \frac{P\hat{k}}{\hat{k}-1} + \left(1 - \frac{P\hat{k}}{\hat{k}-1}\right)m^{\frac{2-k}{2k}} \right\} \|L_gV\|_{\frac{1}{\hat{k}}} \quad (131)$$

である． $y_3(x)$  が最小値をとるのは  $|L_{g_1}V| = \dots = |L_{g_m}V|$  のときである．この値を (131) 式に代入すると，関数  $\hat{k}(x)$  の定義より  $y_3(x) > 0$  を得る．よって  $\ell(x) > 0$  となる． $0 < P(x) < \min\left(\frac{k-1}{k}, \frac{1}{2}\right)$  かつ  $1 \leq k < 2$  の場合，

$$\ell(x) > \frac{\left(2P + \frac{\hat{k}-1}{\hat{k}}c\|L_gV\|_{\frac{1}{\hat{k}}}\right)y_4(x)}{\frac{2P\hat{k}}{\hat{k}-1}\left(1 - m^{\frac{k-2}{2k}}\right) + 2m^{\frac{k-2}{2k}} + c\|L_gV\|_{\frac{1}{\hat{k}}}} \cdot \frac{\|L_gV\|_{\frac{1}{\hat{k}}}}{\|L_gV\|_{\frac{1}{\hat{k}}}}$$

となる．ここで，

$$y_4(x) = \|L_gV\|_{\frac{1}{\hat{k}}} - \left\{ \frac{P\hat{k}}{\hat{k}-1} + \left(1 - \frac{P\hat{k}}{\hat{k}-1}\right)m^{\frac{k-2}{2k}} \right\} \|L_gV\|_{\frac{1}{\hat{k}}} \quad (132)$$

である． $y_4(x)$  が最小値をとるのは  $|L_{g_1}V| = \dots = |L_{g_m}V|$  のときである．この値を (132) 式に代入すると，関数  $\hat{k}(x)$  の定義より  $y_4(x) > 0$  を得る．よって  $\ell(x) > 0$  となる． $L_gV = 0$  の場合，明らかに入力制約 (51) は満たされる． $L_gV \neq 0$  の場合，領域  $W_3$  では  $P(x) < \min\left(\frac{k-1}{k}, \frac{1}{2}\right)$  となること，および，補題 1 より  $\hat{k}(x) \leq k$  のとき  $\|\cdot\|_{\hat{k}} \geq \|\cdot\|_k$  となることを用いると，

$$\|u\|_k \leq \frac{\frac{\hat{k}}{\hat{k}-1}(P + |P|) + c\|L_gV\|_{\frac{1}{\hat{k}}}}{Q_2} < 1$$

を得る．よって，入力制約 (51) は満たされる． $\delta < 1$ ， $\|L_gV\|_{\frac{1}{\hat{k}}} < \delta$ ，かつ  $L_fV < \delta\|L_gV\|_{\frac{1}{\hat{k}}}$  ならば，

$$\|u\|_k < \frac{\frac{2\hat{k}}{\hat{k}-1} + c}{2m^{-\frac{|k-2|}{2k}}} \delta$$



となる． $\delta$  を十分小さくすると  $\|u\|_k$  は任意に小さくできる．補題 6 の条件はすべて満たされるから，制御入力 (122) は評価関数  $J$  を最小化する．関数  $\gamma_i(x)$  を

$$\gamma_i(x) = \frac{1}{R} |L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V)$$

とおき， $\phi_i(\gamma_i)$  を  $\left(\frac{\hat{k}-1}{\hat{k}}, \infty\right)$  のセクタ型非線形要素とする．制御入力

$$u_i = -\phi_i(\gamma_i) \quad (i = 1, \dots, m)$$

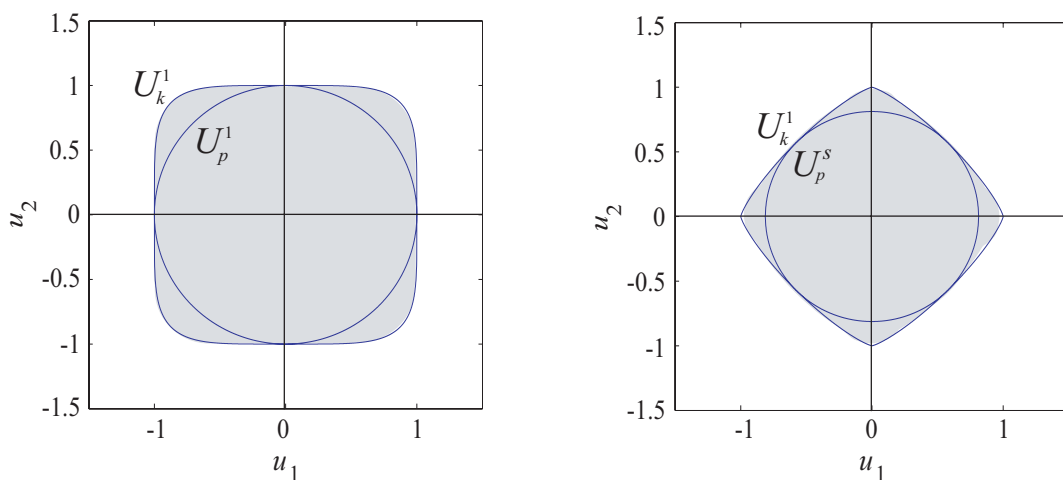
を与えたとき，局所制御 Lyapunov 関数の微分は

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= L_f V - L_g V \cdot \phi(\gamma) \\ &= -\ell(x) + \frac{\hat{k}-1}{\hat{k}R(x)} \|L_g V\|^{\frac{\hat{k}}{k-1}} - L_g V \cdot \phi(\gamma) \\ &\leq \frac{\hat{k}-1}{\hat{k}} L_g V \cdot \gamma - L_g V \cdot \phi(\gamma) \\ &\leq L_g V \left( \frac{\hat{k}-1}{\hat{k}} \gamma - \phi(\gamma) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^m R^{\hat{k}-1} |\gamma_i|^{\hat{k}-1} \operatorname{sgn}(\gamma_i) \left( \frac{\hat{k}-1}{\hat{k}} \gamma_i - \phi_i(\gamma_i) \right) \end{aligned}$$

となる．ただし， $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^T$ ， $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)^T$  である． $\phi_i(\gamma_i)$  の定義より  $\dot{V}(x) < 0$  ( $\forall x \neq 0$ ) となるので，セクタ余裕は  $\left(\frac{\hat{k}-1}{\hat{k}}, \infty\right)$  である．  $\square$

### 4.3 セクタ余裕と吸引領域の関係

簡単のため，逆最適制御則の方向ベクトルが定数  $k$  に依存する場合について考える．補題 4 より，評価関数 (110) は定数  $k$  に依存することがわかる．すなわち，評価関数 (110) は入力 (109) の方向ベクトルに依存する．また，セクタ余裕の下限は定数  $k$  によって決まる．入力制約 (51) のもとでは，セクタ余裕と吸引領域はトレードオフの関係にあり，これらを同時に大きくすることはできない．たとえば， $k \simeq 2$  の場合，定理 11 の逆最適制御則はそこそこ大きなセクタ余裕を保証し，吸引領域もそこそこ広くなる． $k \simeq \infty$  の場合，セクタ余裕は小さくなるが，



(a)  $2 < k < \infty, p < k, s = 1$

(b)  $1 < k < 2, p > k, s < 1$

図 13  $U_k^1$  and  $U_p^s$

吸引領域は広くなる． $k \simeq 1$ の場合，セクタ余裕は大きくなるが，吸引領域は狭くなる．

吸引領域を小さくする代わりに，逆最適制御則 (109) の保証するセクタ余裕を  $(\frac{k-1}{k}, \infty)$  より大きくすることは可能である．しかし，逆最適制御則 (109) のセクタ余裕の下限は  $k$  によって決まっているので，逆最適制御則 (109) によって達成される吸引領域を  $W_2$  より大きくすることはできないことに注意する．

入力の方向ベクトルを変えることによって，セクタ余裕と吸引領域を調節することができる．例として，入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える．入力空間  $U_k^1$  に内接する部分空間

$$U_p^s = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\|_p < s, p > 1, 0 < s \leq 1\} \quad (133)$$

を考え，定理 11 と同様にして入力制約  $u \in U_p^s$  のもとで逆最適制御則を設計すればよい．ここで， $p$  と  $s$  は定数である．セクタ余裕を大きくするためには  $p < k$  を満たす  $p$  を，逆に吸引領域を広くするためには， $p > k$  を満たす  $p$  を選ばばよい (図 13 参照)．このとき，最小化される評価関数は部分空間  $U_p^s$  に依存し，もとの評価関数とは異なることに注意する．しかし，入力空間  $U_k^1$  内のすべての入力

を使うわけではないので，この手法は非効率的である．

#### 4.4 シミュレーション

入力制約  $\|u\|_3 \leq 1$  を持つ非線形システム (94) を考え，局所制御 Lyapunov 関数として (95) 式を採用する．非線形システム (94) の最後の式を

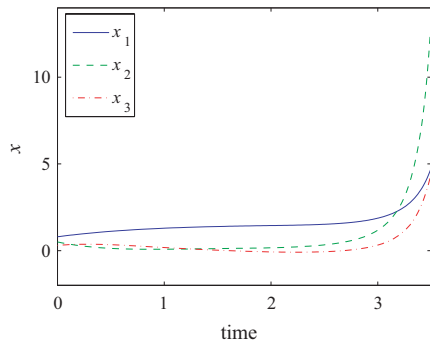
$$\dot{x}_3 = (2 + \omega(t))x_2 + u_1 \sin x_3 + u_2 \cos x_3, \quad (134)$$

で置き換えた摂動システムを  $\Sigma'_{nl}$  とおく．ただし， $\omega(t)$  は  $0.0 \leq \omega(t) \leq 0.1$  を満たす外乱とする．本節では，定理 8 あるいは 11 を用いてノミナルシステム  $\Sigma_{nl}$  に対する制御則を設計し，設計した制御則を摂動システム  $\Sigma'_{nl}$  に適用して，比較する．(96) 式を (66) 式に代入すると， $P(x)$  が得られる．定理 8 において  $c = 0.1$  とおき， $\|L_g V\|_q$  を  $\|L_g V\|_{\frac{3}{2}}$  で置き換えると，準普遍制御則

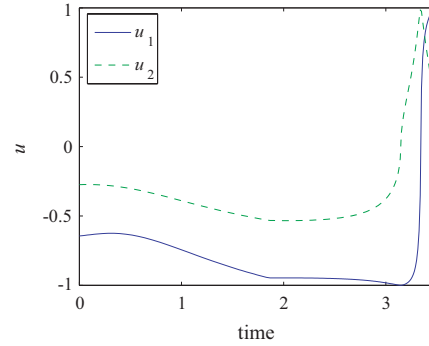
$$u_i = \begin{cases} -\text{sat} \left( \frac{P + |P| + 0.1\|L_g V\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}}{2 + 0.1\|L_g V\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{2}}}{\|L_g V\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}} \text{sgn}(L_{g_i} V) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (135)$$

を得る．ただし，制御則は外乱に対するロバスト性を保証していないため，状態が領域  $W_1$  を飛び出す恐れがあるので，飽和関数を用いた．また，定理 11 において  $c = 0.1$  とおくと，逆最適制御則

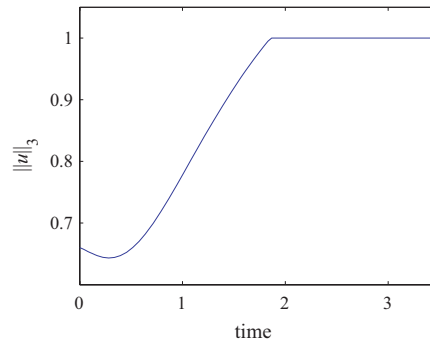
$$u_i = \begin{cases} -\frac{\frac{3}{2}(P + |P|) + 0.1\|L_g V\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}}{2 + 0.1\|L_g V\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{2}}}{\|L_g V\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}} \text{sgn}(L_{g_i} V) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (136)$$



(a) Response of state



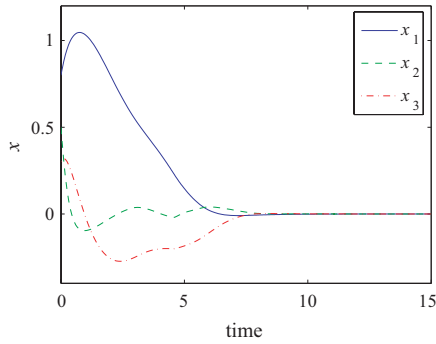
(b) Change in input



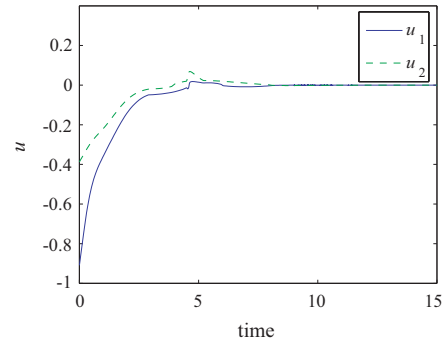
(c) Change in norm  $\|u\|_3$

図 14 Response with semi-universal controller (135) in case of  $k = 3$

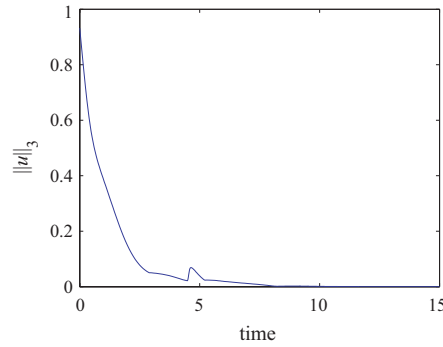
を得る．初期値を  $x(0) = (0.8, 0.5, 0.3)^T$  とおき，摂動システム  $\Sigma'_{nl}$  に制御則 (135) あるいは (136) を適用したときの状態変数の応答，入力とノルム  $\|u\|_3$  の変化を図 14 および図 15 に示す．制御則 (135) はロバスト性を保証していないため，図 14 では状態変数は発散している．一方，逆最適制御則 (136) はロバスト性を持つため，図 15 では状態変数は 0 に収束している．



(a) Response of state



(b) Change in input



(c) Change in norm  $\|u\|_3$

図 15 Response with inverse optimal controller (136) in case of  $k = 3$

## 4.5 まとめ

本章では，入力制約を陽に考慮して，入力が第3章で提案した制御則と同じ方向ベクトルを持つ逆最適問題に取り組んだ．4.1節では，3.3節で提案した制御則と同じ方向ベクトルを持つ入力の逆最適問題を解いた．まず，3.3節で提案した制御則と同じ方向ベクトルを持つ入力によって最小化される評価関数を導出し，セクタ余裕の下限を明らかにした．また，安定化制御則の  $\frac{k}{k-1}$  倍以上の入力は逆最適制御則になっていることを明らかにした．つぎに，入力の  $k$ -ノルムが1より小さいという制約のもとで逆最適制御則が存在する領域を求めた．さらに，その領

域で原点を漸近安定化する逆最適制御則を構築した。同様にして、4.2 節では、3.5 節で提案した制御則と同じ方向ベクトルを持つ入力 of 逆最適問題を解いた。4.3 節では、セクタ余裕と吸引領域の関係について述べ、入力の方向ベクトルを変えることによって逆最適制御則のセクタ余裕と吸引領域を調節できることを示した。4.4 節では、シミュレーションによって提案した逆最適制御則がロバストであることを確認した。 $k \simeq 2$  の場合、提案した逆最適制御則はセクタ余裕を適度に保証し、吸引領域も適度に広がる。しかし、 $k \simeq \infty$  あるいは  $k \simeq 1$  の場合、セクタ余裕が小さくなったり、逆最適制御則の存在する領域が狭くなることもある。次章では、この問題を回避するため、逆最適性を無視してロバスト準普遍制御則を設計する。

## 5. ロバスト制御則の設計

### 5.1 ロバスト制御則

4.1 および 4.2 節では制御則にロバスト性を持たせるために逆最適設計を行ったが、逆最適性にこだわらなければ、セクタ余裕と吸引領域を効率的に調節することができる。このことを示すため、任意のセクタ余裕を持つ準普遍制御則や漸近安定化可能領域  $W_1$  全域でロバスト性を保証する準普遍制御則を設計する。

補題 2 や定理 11 および 12 と同様にして、以下の結果が得られる。

補題 8. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える。  $V(x)$  はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数、  $P(x)$  は (66) 式で定義される関数、  $0 < r \leq 1$  は定数、  $a_4 > 0$  はすべての  $x \in W_4 \setminus \{0\} := \{x \mid V(x) < a_4\} \setminus \{0\}$  に対して

$$\inf_{u \in U_k^1} \{L_f V + r \cdot L_g V \cdot u\} < 0 \quad (137)$$

を満たす最大の定数とすると、領域  $W_4$  ではセクタ余裕  $(r, \infty)$  を持つ漸近安定化制御則が存在し、次式が成立する。

$$\sup_{x \in \{x \in W_4 \mid L_g V \neq 0\}} P(x) = r \quad (138)$$

□

定理 13. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える。  $V(x)$  はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数、  $P(x)$  は (66) 式で定義される関数、  $W_4$  は補題 8 で定義される領域、  $c > 0$ 、  $q \geq 1$  および  $0 < r \leq 1$  は定数とする。このとき、制御入力

$$u_i = \begin{cases} -\frac{\frac{1}{r}(P + |P|) + c \|L_g V\|_q}{2 + c \|L_g V\|_q} \cdot \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|_q^{\frac{1}{k-1}}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (139)$$

$(i = 1, \dots, m)$

は領域  $W_4$  で原点を漸近安定化し、セクタ余裕は  $(r, \infty)$  となる。  $m = 1$  あるいは  $1 < k < \infty$  ならば、入力は  $W_4 \setminus \{0\}$  で連続である。さらに局所制御 *Lyapunov* 関数が小入力特性を満たすならば、入力は原点でも連続である。 □

定理 14. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える . ただし ,  $m \geq 2$  とする .  $V(x)$  はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数 ,  $P(x)$  は (66) 式で定義される関数 ,  $W_4$  は補題 8 で定義される領域 ,  $c > 0$  ,  $q \geq 1$  および  $0 < r \leq 1$  は定数とする . 関数  $Q_1(x)$  ,  $\hat{k}(x)$  ,  $\bar{k}(x)$  および  $Q_2(x)$  を以下のように選ぶ .

$$Q_1(x) = \frac{P}{r} + \left\{ 1 - \frac{P}{r} \right\} m^{-\frac{|k-2|}{2k}} \quad (140)$$

$$\hat{k}(x) = \begin{cases} \frac{k}{1 - k \operatorname{sgn}(k-2) \log_m Q_1} & (0 < P < 1) \\ 2 & (P \leq 0) \end{cases} \quad (141)$$

$$\bar{k}(x) = \begin{cases} \hat{k}(x) & (k \geq 2) \\ k & (1 \leq k < 2) \end{cases} \quad (142)$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{r}(P + |P|) \left( 1 - m^{-\frac{|k-2|}{2k}} \right) + 2m^{-\frac{|k-2|}{2k}} + c \|L_g V\|_q \quad (143)$$

このとき , 制御入力

$$u_i = \begin{cases} -\frac{\frac{1}{r}(P + |P|) + c \|L_g V\|_q}{Q_2} \cdot \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{\bar{k}-1}}}{\|L_g V\|^{\frac{1}{\bar{k}-1}}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (144)$$

$(i = 1, \dots, m)$

は領域  $W_4$  で原点を漸近安定化し , セクタ余裕は  $(r, \infty)$  となる . 入力は  $W_4 \setminus \{0\}$  で連続である . さらに局所制御 *Lyapunov* 関数が小入力特性を満たすならば , 入力は原点でも連続である .  $\square$

定理 13 および 14 において定数  $r$  を連続な関数  $0 < r(x) \leq 1$  で置き換えると , セクタ余裕は  $(r(x), \infty)$  となる . このとき , 関数  $Q_1(x)$  は (126) 式のように修正される . 原点から離れたところでは関数  $r(x)$  を大きく選ぶことによって , 広い領域でロバスト制御則を設計することができる . たとえば , 漸近安定化可能領域  $W_1$  全域でロバスト性を保証する制御則は以下のように得られる .

定理 15. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える .  $V(x)$  はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数 ,  $P(x)$  は (66) 式で定義される関数 ,  $W_1$  は補題 2 で定義される



領域,  $c > 0$  と  $q \geq 1$  は定数,  $r(x)$  は  $0 < P(x) < 1$  のとき  $P(x) < r(x) \leq 1$  を満たす連続な関数とする. このとき, 制御入力 (139) は領域  $W_1$  で原点を漸近安定化し, セクタ余裕は  $(r(x), \infty)$  となる.  $m = 1$  あるいは  $1 < k < \infty$  ならば, 入力は  $W_1 \setminus \{0\}$  で連続である. さらに局所制御 *Lyapunov* 関数が小入力特性を満たすならば, 入力は原点でも連続である.  $\square$

定理 16. 入力制約 (51) 付きシステム (18) を考える. ただし,  $m \geq 2$  とする.  $V(x)$  はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数,  $P(x)$  は (66) 式で定義される関数,  $W_1$  は補題 2 で定義される領域,  $c > 0$  と  $q \geq 1$  は定数,  $r(x)$  は  $0 < P(x) < 1$  のとき  $P(x) < r(x) \leq 1$  を満たす連続な関数とする. 関数  $Q_1(x)$ ,  $\hat{k}(x)$ ,  $\bar{k}(x)$  および  $Q_2(x)$  は (140)-(143) 式で定義される関数とする. このとき, 制御入力 (144) は領域  $W_1$  で原点を漸近安定化し, セクタ余裕は  $(r(x), \infty)$  となる. 入力は  $W_1 \setminus \{0\}$  で連続である. さらに局所制御 *Lyapunov* 関数が小入力特性を満たすならば, 入力は原点でも連続である.  $\square$

定理 15 および 16 において,  $0 < P(x) < 1$  のとき  $P(x) < r(x) < 1$  を満たすように関数  $r(x)$  を選べば, 漸近安定化可能領域  $W_1$  全域でロバスト性が保証される. 定理 13-16 において,  $\|L_g V\|_q$  は他の適当な関数で置き換えることができることに注意する.

定理 13 および 14 において  $r = 1$  とおくと, ロバスト制御則 (139) および (144) はそれぞれ定理 8 および 10 の安定化制御則に一致する. 定理 13 において  $\|L_g V\|_q$  を  $\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}$  で置き換え, さらに  $r = (k-1)/k$  とおくと, ロバスト制御則 (139) は定理 11 の逆最適制御則に一致する. 定理 14 において  $\|L_g V\|_q$  を  $\|L_g V\|_{\frac{1}{\frac{k-1}{k}}}$  で置き換え, さらに  $r(x) = (\hat{k}-1)/\hat{k}$  とおくと, ロバスト制御則 (144) は定理 12 の逆最適制御則に一致する. すなわち, 定理 13 および 14 のロバスト制御則は定理 8, 10 の安定化制御則および定理 11, 12 の逆最適制御則を含んでいる.

## 5.2 まとめ

本章では, 入力の  $k$ -ノルムが 1 より小さいという制約を持つ非線形システムに対して, セクタ余裕と吸引領域を効率的に調節できるロバスト制御則を設計した.

## 6. 制御則設計の指針

実際に制御則を用いる際には，入力にチャタリングが生じないように配慮し，セクタ余裕および吸引領域を適度に保証する必要がある．また，状態が収束するまでにかかる時間が重要になってくる．第5章で提案したロバスト制御則は第3章の安定化制御則および第5章の逆最適制御則を含むので，以下では第5章のロバスト制御則について考える．

定理13あるいは14のロバスト制御則を用いると，セクタ余裕と吸引領域はパラメータ  $r$  によって簡単に調節できる．また，収束時間はパラメータ  $c$  によって容易に調節できる． $k \simeq 2$  の場合，どちらの制御則を用いても入力にチャタリングは発生しない． $k \simeq \infty$  あるいは  $k \simeq 1$  の場合，定理13の制御則を用いるとチャタリングの生じる恐れがあるので，定理14の制御則を用いるのがよい．

## 7. 入力が入れ子にされた Minkowski ball に拘束される場合

本章では、以下のように入力が入れ子にされた Minkowski ball に拘束される非線形システム (18) に対して、局所制御 Lyapunov 関数が既知であるという仮定のもとで、準普遍制御則を提案する。入力を

$$\begin{aligned} u &= (u^{1T}, \dots, u^{sT})^T \\ u^i &= (u_1^i, \dots, u_{s_i}^i)^T \quad (i = 1, \dots, s) \end{aligned} \quad (145)$$

と分ける。入力が入れ子にされた Minkowski ball

$$\begin{aligned} U_{k_i}^{c_i} &= \{u^i \in \mathbb{R}^{s_i} \mid \|u^i\|_{k_i} < c_i\} \quad (i = 1, \dots, s) \\ U_k^1 &= \{c \in \mathbb{R}^s \mid \|c\|_k < 1\} \end{aligned} \quad (146)$$

に拘束されているものとする。ここで、 $k_i \geq 1$  と  $k \geq 1$  は定数、 $0 < c_i(x) < 1$  はスカラー関数、 $c = (c_1, \dots, c_s)^T$  である。入力に対応させて、 $g(x)$  を

$$\begin{aligned} g &= (g^1, \dots, g^s) \\ g^i &= (g_1^i, \dots, g_{s_i}^i) \quad (i = 1, \dots, s) \end{aligned} \quad (147)$$

のように分ける。ただし、簡単のため、与えられた局所制御 Lyapunov 関数は条件 (20) を満たすものとする。

7.1 節では、漸近安定化可能領域を求める。7.2 節では、入力空間の閉包内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする制御入力を求め、漸近安定化可能領域内で満たされる条件を導出する。7.3 節では、局所制御 Lyapunov 関数の微分を  $s$  個の項に分割してから、すべての  $i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) に対して分割された各項が非正になるように準普遍制御則を設計する。7.4 節では、提案した手法の有効性を確認するため、シミュレーションを行う。

### 7.1 漸近安定化可能領域

補題 2 と同様にして、局所制御 Lyapunov 関数が与えられたときの漸近安定化可能領域は、つぎのように保証することができる。

補題 9. 入力制約 (146) 付きシステム (18) を考える .  $V(x)$  はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数 ,  $a_5 > 0$  はすべての  $x \in W_5 \setminus \{0\} := \{x \mid V(x) < a_5\} \setminus \{0\}$  に対して

$$\inf_{u^i \in U_{k_i}^{c_i}, c \in U_k^1} \{L_f V + L_g V \cdot u\} < 0 \quad (148)$$

を満たす最大の定数とすると ,  $W_5$  は漸近安定化可能領域である . □

## 7.2 入力空間の閉包内で微分 $\dot{V}(x, u)$ を最小化する入力

まず , 入力空間の閉包内で局所制御 *Lyapunov* 関数の微分を最小にする入力を求める . そのためには , 部分空間  $U_{k_i}^{c_i}$  の閉包  $\bar{U}_{k_i}^{c_i}$  内で微分  $\dot{V}(x, u)$  を最小にする入力  $u_j^i$  を求めてから , 部分空間  $U_k^1$  の閉包  $\bar{U}_k^1$  内で微分  $\dot{V}(x, u)$  を最小にする関数  $c_i(x)$  を求めればよい .

命題 2. 入力制約  $u^i \in \bar{U}_{k_i}^{c_i}$  ,  $c \in \bar{U}_k^1$  を持つシステム (18) を考える .  $V(x)$  はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数とする . このとき , 制御入力

$$u_j^i = \begin{cases} - \frac{\|L_{g^i} V\|^{\frac{1}{k_i-1}}}{\left(\sum_{i=1}^s \|L_{g^i} V\|^{\frac{k}{k_i-1}}\right)^{\frac{1}{k}}} \cdot \frac{|L_{g_j^i} V|^{\frac{1}{k_i-1}}}{\|L_{g^i} V\|^{\frac{1}{k_i-1}}} \operatorname{sgn}(L_{g_j^i} V) & (L_{g^i} V \neq 0) \\ 0 & (L_{g^i} V = 0) \end{cases} \quad (149)$$

$(i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, s^i)$

は各  $x$  に対して局所制御 *Lyapunov* 関数の微分を最小化する . □

*Proof.* (i) 部分空間  $\bar{U}_{k_i}^{c_i}$  内で微分  $\dot{V}(x, u)$  を最小化する入力  $u_j^i$  を求める . 局所制御 *Lyapunov* 関数の微分は

$$\dot{V}(x, u) = L_f V + \sum_{i=1}^s L_{g^i} V \cdot u^i$$

と書ける．よって，命題1より，入力

$$u_j^i = \begin{cases} -c_i \frac{|L_{g_j^i} V|^{\frac{1}{k_i-1}}}{\|L_{g^i} V\|^{\frac{1}{\frac{k_i}{k_i-1}}}} \operatorname{sgn}(L_{g_j^i} V) & (L_{g^i} V \neq 0) \\ 0 & (L_{g^i} V = 0) \end{cases} \quad (150)$$

( $i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, s^i$ )

は各  $x$  に対して部分空間  $\bar{U}_{k_i}^{c_i}$  内で微分  $\dot{V}(x, u)$  を最小にする．

- (ii) 部分空間  $\bar{U}_k^1$  内で微分  $\dot{V}(x, u)$  を最小化する関数  $c_i$  を求める．入力 (150) を与えたとき，局所制御 Lyapunov 関数の微分は

$$\dot{V}(x, c) = L_f V - \sum_{i=1}^s \|L_{g^i} V\|^{\frac{k_i}{k_i-1}} \cdot c_i$$

となる．よって，命題1より，関数

$$c_i = \begin{cases} \frac{\|L_{g^i} V\|^{\frac{1}{\frac{k_i}{k_i-1}}}}{\left( \sum_{i=1}^s \|L_{g^i} V\|^{\frac{k_i}{k_i-1}} \right)^{\frac{1}{k}}} & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (151)$$

( $i = 1, \dots, s$ )

は各  $x$  に対して部分空間  $\bar{U}_k^1$  内で微分  $\dot{V}(x, u)$  を最小にする．

(150) および (151) 式より，(149) 式を得る． □

制御入力 (149) は，入力制約 (146) のもとでの局所制御 Lyapunov 関数の微分の下限

$$\inf_{u^i \in \bar{U}_{k_i}^{c_i}, c \in \bar{U}_k^1} \dot{V}(x, u) = L_f V - \left( \sum_{i=1}^s \|L_{g^i} V\|^{\frac{k_i}{k_i-1}} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

を与える． $L_g V \neq 0$  のとき，関数  $P : \{x \in \mathbb{R}^n \mid L_g V \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$P(x) = \frac{L_f V}{\left( \sum_{i=1}^s \|L_{g^i} V\|^{\frac{k_i}{k_i-1}} \right)^{\frac{k-1}{k}}} \quad (152)$$

と定義すると，条件 (148) が満たされるのは  $P(x) < 1$  となる領域に限られる． $P(x) \geq 1$  となる領域では，どのような入力を選んでも  $\dot{V}(x, u) \geq 0$  となり，条件 (148) は成立しない．すなわち，漸近安定化可能領域  $W_5$  は  $P(x) < 1$  となる領域に含まれる．これより，つぎの補題を得る．

補題 10. 入力制約 (146) 付きシステム (18) を考える． $V(x)$  はシステムの局所制御 Lyapunov 関数， $W_5$  は補題 9 の漸近安定化可能領域， $P(x)$  は (152) 式で定義される関数とすると，次式が成立する．

$$\sup_{x \in \{x \in W_5 \mid L_g V \neq 0\}} P(x) = 1 \quad (153)$$

□

次節では，(153) 式を利用して制御則を設計する．

### 7.3 制御則設計

本節では，局所制御 Lyapunov 関数の微分を

$$\dot{V}(x, u) = \sum_{i=1}^s \dot{V}_i(x, u^i)$$

のように  $s$  個の項に分割してから，すべての  $i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) に対して以下の条件を満たすように準普遍制御則を設計する．

1.  $L_{g^i} V \neq 0$  のとき  $\dot{V}_i(x, u^i) < 0$  .
2.  $L_{g^i} V = 0$  のとき  $\dot{V}_i(x, u^i) = 0$  .

以下では， $L_{g^i} V \neq 0$  の場合について考える．局所制御 Lyapunov 関数の微分は

$$\dot{V}(x, u) = \sum_{i=1}^s (d_i(x)L_f V + L_{g^i} V \cdot u^i) := \sum_{i=1}^s \dot{V}_i(x, u^i) \quad (154)$$

と書ける．ただし，

$$\sum_{i=1}^s d_i(x) = 1 \quad (155)$$

である．まず，漸近安定化可能領域  $W_5$  で上に挙げた条件を満たす準普遍制御則が設計できるように関数  $d_i(x)$  を決定する．局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力 (149) を与えると，分割された各項は

$$\dot{V}_i(x) = d_i(x)L_f V - \frac{\|L_{g^i} V\|_{\frac{k}{k_i}}^{\frac{k}{k_i-1}}}{\left(\sum_{i=1}^s \|L_{g^i} V\|_{\frac{k}{k_i}}^{\frac{k}{k_i-1}}\right)^{\frac{1}{k}}}$$

となる．関数  $P_i(x)$  を

$$P_i(x) = d_i(x)L_f V \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^s \|L_{g^i} V\|_{\frac{k}{k_i}}^{\frac{k}{k_i-1}}\right)^{\frac{1}{k}}}{\|L_{g^i} V\|_{\frac{k}{k_i}}^{\frac{k}{k_i-1}}} \quad (156)$$

と定義すると， $\dot{V}_i(x) < 0$  が満たされるのは  $P_i(x) < 1$  となる領域だけである． $P_i(x) \geq 1$  となる領域では，どのような入力を選んでも  $\dot{V}_i(x, u^i) \geq 0$  となってしまう．漸近安定化可能領域  $W_5$  内で  $L_{g^i} V \neq 0$  のとき  $\dot{V}_i(x, u^i)$  を負にできるようにするため，

$$P_i(x) = P(x) \quad (157)$$

とおく．このとき，領域  $W_5$  では  $P_i(x) = P(x) < 1$  となるので，入力制約 (146) のもとで  $\dot{V}_i(x, u^i)$  を負にする入力が存在する．(152)，(155)，(156) および (157) 式より， $d_i(x)$  は

$$d_i(x) = \frac{\|L_{g^i} V\|_{\frac{k}{k_i}}^{\frac{k}{k_i-1}}}{\sum_{i=1}^s \|L_{g^i} V\|_{\frac{k}{k_i}}^{\frac{k}{k_i-1}}} \quad (158)$$

となる．(158) 式を (154) 式に代入すると，分割された各項は

$$\dot{V}_i(x, u^i) = c_i P \|L_{g^i} V\|_{\frac{k}{k_i}}^{\frac{k}{k_i-1}} + L_{g^i} V \cdot u^i$$

となる．ここで， $c_i(x)$  は (151) 式で定義される関数である．入力  $u^i$  を

$$u^i = c_i \bar{u}^i \quad (159)$$

と選ぶと，分割された各項は

$$\dot{V}_i(x, u^i) = c_i \left( P \|L_{g^i} V\|_{\frac{k_i}{k_i-1}} + L_{g^i} V \cdot \bar{u}^i \right) := c_i \dot{\bar{V}}_i(x, \bar{u}^i)$$

となる．(151) 式より  $\|c\|_k \leq 1$  となるので，制約  $\bar{u}^i \in U_{k_i}^1$  を満たし，かつ  $L_{g^i} V \neq 0$  のとき  $\dot{\bar{V}}_i(x, \bar{u}^i)$  が負になるように関数  $\bar{u}^i(x)$  を選べば，制御入力 (159) は入力制約 (146) を満たし，原点を局所的に漸近安定化する．

$1 < k < \infty$  のとき，定義より関数  $c_i(x)$  は領域  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid L_g V \neq 0\}$  で連続，かつ， $\|L_{g^i} V\| \neq \|L_g V\|$  ならば  $L_{g^i} V \rightarrow 0$  のとき  $c_i(x) \rightarrow 0$  となる．そのため， $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\|L_{g^i} V\| \neq \|L_g V\| \wedge L_{g^i} V = 0) \vee x = 0\}$  となる領域以外で連続，かつ， $L_g V = 0$  のとき  $\bar{u}^i(x) = 0$  となるように関数  $\bar{u}^i(x)$  を選べば，入力 (159) も原点以外で連続になる．しかし， $k = \infty$  あるいは  $k = 1$  のとき，入力 (159) は原点以外でも不連続になる恐れがある．たとえば， $k = \infty$  の場合，

$$c_i = \begin{cases} 1 & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, s)$$

となるので，ある  $i \in \{1, \dots, s\}$  に対して  $s_i = 1$  であるとき， $P(x) > 0$  かつ  $L_{g^i} V = 0$  となる領域で  $\bar{u}^i(x)$  は不連続になる．また， $k = 1$  の場合，関数  $c_i(x)$  は  $L_{g^i} V = 0$  となる領域以外でも不連続になる．

任意の定数  $k \geq 1$  に対する準普遍制御則を設計するため， $c_i(x)$  を領域  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid L_g V \neq 0\}$  で連続，かつ， $\|L_{g^i} V\| \neq \|L_g V\|$  ならば  $L_{g^i} V \rightarrow 0$  のとき  $\hat{c}_i(x) \rightarrow 0$  となる関数  $\hat{c}_i(x)$  で置き換える．まず， $\bar{U}_k^1$  に内接し，(152) 式で定義された連続関数  $P : \{x \in W_5 \mid L_g V \neq 0\} \rightarrow (-\infty, 1)$  によって以下のように変化する部分空間  $\bar{U}_{\hat{k}}^* \subseteq \bar{U}_k^1$  を考える．

1.  $P(x) \rightarrow 1$  のとき  $\bar{U}_{\hat{k}}^* \rightarrow \bar{U}_k^1$
2.  $P(x) \leq 0$  のとき  $\bar{U}_{\hat{k}}^*$  は球  $\bar{U}_2^*$  になる．

ただし， $1 < \hat{k}(x) < \infty$  は連続な関数， $\bar{U}_{\hat{k}}^*$  は  $\bar{U}_k^1$  に内接する  $\bar{U}_{\hat{k}}^1$  に相似な部分空間である．つぎに，制約  $\hat{c} \in \bar{U}_{\hat{k}}^*$  を満たし，局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小に



する関数  $\hat{c}_i(x)$  を選ぶ．このような関数  $\hat{c}_i(x)$  は， $k \geq 2$  の場合，

$$\hat{c}_i = \begin{cases} \frac{\|L_{g^i}V\|^{\frac{1}{k_i-1}}}{\left(\sum_{i=1}^s \|L_{g^i}V\|^{\frac{\hat{k}}{k_i-1}}\right)^{\frac{1}{\hat{k}}}} & (L_gV \neq 0) \\ 0 & (L_gV = 0) \end{cases} \quad (160)$$

$(i = 1, \dots, s)$

$1 \leq k < 2$  の場合，

$$\hat{c}_i = \begin{cases} \frac{s^{\frac{1}{\hat{k}}}}{s^{\frac{1}{k}}} \cdot \frac{\|L_{g^i}V\|^{\frac{1}{k_i-1}}}{\left(\sum_{i=1}^s \|L_{g^i}V\|^{\frac{\hat{k}}{k_i-1}}\right)^{\frac{1}{\hat{k}}}} & (L_gV \neq 0) \\ 0 & (L_gV = 0) \end{cases} \quad (161)$$

$(i = 1, \dots, s)$

と書ける．(160)，(161) 式および  $1 < k(x) < \infty$  より，関数  $\hat{c}_i(x)$  は領域  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid L_gV \neq 0\}$  で連続，かつ， $\|L_{g^i}V\| \neq \|L_gV\|$  ならば  $L_{g^i}V \rightarrow 0$  のとき  $\hat{c}_i(x) \rightarrow 0$  となる．入力  $u^i$  を

$$u^i = \hat{c}_i \hat{u}^i \quad (162)$$

とおき， $k \geq 2$  のとき  $\hat{k}(x) < k$ ， $1 \leq k < 2$  のとき  $\hat{k}(x) > k$  を満たすように関数  $\hat{k}(x)$  を選ぶと， $P(x) > 0$  のとき，分割された各項は

$$\dot{V}_i(x, u^i) \leq \hat{c}_i \left( \hat{P}(x) \|L_{g^i}V\|^{\frac{k_i}{k_i-1}} + L_{g^i}V \cdot \hat{u}^i \right) := \hat{c}_i \dot{\hat{V}}_i(x, \hat{u}^i)$$

となる．ここで，

$$\hat{P}(x) = \begin{cases} \frac{s^{\frac{1}{\hat{k}}}}{s^{\frac{1}{k}}} P(x) & (k \geq 2) \\ \frac{s^{\frac{1}{k}}}{s^{\frac{1}{\hat{k}}}} P(x) & (1 \leq k < 2) \end{cases} \quad (163)$$

である． $P(x) < 1$  が満たされる領域で  $\dot{V}_i(x, u^i)$  を負にできるようにするため， $P(x) < 1$  となる領域では  $\hat{P}(x) < 1$ ，すなわち，

$$\begin{aligned} \frac{k}{1 - k \log_s P} < \hat{k}(x) < k & \quad (k \geq 2) \\ k < \hat{k}(x) < \frac{k}{1 + k \log_s P} & \quad (1 \leq k < 2) \end{aligned} \quad (164)$$

を満たすように連続関数  $\hat{k}(x)$  を選ぶ．(160)，(161) および (164) 式より  $\|c\|_k \leq 1$  となるので，制約  $\hat{u}^i \in U_{k_i}^1$  を満たし，かつ  $L_{g^i}V \neq 0$  のとき  $\hat{V}_i(x, \hat{u}^i)$  が負になるように関数  $\hat{u}^i(x)$  を選べば，制御入力 (162) は入力制約 (146) を満たし，原点を局所的に漸近安定化する．さらに， $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\|L_{g^i}V\| \neq \|L_gV\| \wedge L_{g^i}V = 0) \vee x = 0\}$  となる領域以外で連続，かつ， $L_gV = 0$  のとき  $\hat{u}^i(x) = 0$  となるように関数  $\hat{u}^i(x)$  を選べば，入力 (162) も原点以外で連続になる．

$k \simeq \infty$  あるいは  $k \simeq 1$  の場合， $\hat{k}(x)$  を十分早く 2 に近づけなければ，入力にチャタリングの生じる恐れがある．しかし，早く近づけすぎると， $\hat{P}(x)$  が 1 付近にとどまり，関数  $\hat{u}^i(x)$  にチャタリングの生じる危険性があるので注意する．関数  $\hat{k}(x)$  の選び方は一意には定まらないが，ここでは以下のように選ぶ．

$$\hat{k} = \begin{cases} \frac{k}{1 - k \log_s \left\{ P + (1 - P)s^{-\frac{|k-2|}{2k}} \right\} \operatorname{sgn}(k - 2)} & (L_fV > 0) \\ 2 & (L_fV \leq 0) \end{cases} \quad (165)$$

漸近安定化可能領域  $W_5$  全域で原点を漸近安定化する準普遍制御則は以下のよう  
に得られる．

定理 17. 入力制約 (146) 付きシステム (18) を考える． $V(x)$  はシステムの局所制御 *Lyapunov* 関数， $W_5$  は補題 9 の漸近安定化可能領域， $P(x)$  は (152) 式で定義される関数， $\hat{k}(x)$  は (165) 式で定義される関数， $\hat{P}(x)$  は (152) 式で定義される関数， $\hat{c}_i(x)$  は (160) あるいは (161) 式で定義される関数， $\hat{u}_j^i(x)$  は以下の条件を満たす関数とする．

1.  $\hat{u}^i \in U_{k_i}^1$  .
2.  $L_gV = 0$  のとき  $\hat{u}^i = 0$  .

3.  $L_{g^i}V \neq 0$  かつ  $P(x) \leq 0$  のとき  $L_{g^i}V \cdot \hat{u}^i < 0$  .
4.  $L_{g^i}V \neq 0$  かつ  $0 < P(x) < 1$  のとき  $\hat{P}\|L_{g^i}V\|_{\frac{k_i}{k_i-1}}$  .
5.  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\|L_{g^i}V\| \neq \|L_gV\| \wedge L_{g^i}V = 0) \vee x = 0\}$  となる領域以外で  $\hat{u}^i$  は連続 .
6. 局所制御 *Lyapunov* 関数が小入力特性を満たすならば, 原点の十分近傍で  $\hat{u}^i$  は任意に小さくできる .

このとき, 制御入力

$$u^i = \hat{c}_i \hat{u}^i \quad (i = 1, \dots, s) \quad (166)$$

は領域  $W_5$  で原点を漸近安定化し,  $W_5 \setminus \{0\}$  で連続である . さらに局所制御 *Lyapunov* 関数が小入力特性を満たすならば, 入力は原点でも連続である .  $\square$

*Proof.* 領域  $W_5$  では  $P(x) < 1$  となること, (163) および (165) 式より, 条件  $\hat{P}(x) < 1$  を得る . よって, 定理 10 より, 領域  $W_5$  では上のすべての条件を満たす関数  $\hat{u}^i(x)$  が存在する . 関数  $\hat{c}_i(x)$  および  $\hat{u}^i(x)$  の定義より, 入力は  $W_5 \setminus \{0\}$  で連続である . さらに局所制御 *Lyapunov* 関数が小入力特性を満たすとき, 入力は原点でも連続になる .

$L_gV = 0$  の場合, 明らかに入力制約 (146) は満たされる .  $L_gV \neq 0$  の場合,  $\hat{u}^i \in U_{k_i}^1$  より  $\|\hat{u}^i\|_{k_i} < 1$  となるので,  $\|u^i\|_{k_i} < \hat{c}_i a_6$  を得る . ここで,  $0 < a_6 < 1$  は正の定数である . さらに (160) および (161) 式より  $\|\hat{c}\|_k \leq 1$  となるので,  $\|\hat{c}_i a_6\|_k = a_6 < 1$  を得る . よって, 入力制約 (146) は満たされる .

$L_gV = 0$  の場合, 条件 (20) より  $\dot{V}(x) = L_fV < 0$  ( $\forall x \neq 0$ ) となる . 以下では,  $L_gV \neq 0$  の場合について考える .  $L_{g^i}V = 0$  のとき,  $i$ -グループに配分された微分は  $\dot{V}_i(x) = 0$  となる .  $L_{g^i}V \neq 0$  のとき,  $\dot{V}_i(x) < 0$  となる . 領域  $W_5$  内のすべての  $x \neq 0$  に対して  $\dot{V}(x) < 0$  となるので, 制御入力 (166) は領域  $W_5$  で原点を漸近安定化する .  $\square$

定理 17 のすべての条件を満たす関数  $\hat{u}^i(x)$  は, 定理 10 を用いると簡単に求めることができる . また, 関数  $\hat{u}^i(x)$  として定理 14 のロバスト制御則を用いると,

定理 17 の制御則はロバストを保証する．ただし，このとき吸引領域は  $W_5$  よりも狭くなる．

## 7.4 シミュレーション

入力制約

$$\begin{aligned} \max(|u_1|, |u_2|) &< c_1 \\ |u_3| &< c_2 \\ c_1 + c_2 &< 1 \end{aligned} \quad (167)$$

を持つ線形システム

$$\Sigma_{nest} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 4x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + 2x_3 + u_2 \\ \dot{x}_3 = x_3 + u_3 \end{cases} \quad (168)$$

を考える．局所制御 Lyapunov 関数を  $V(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2$  と選ぶと，関数  $P(x)$  および  $\hat{P}(x)$  は

$$P(x) = \frac{x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2}{\max(|x_1| + |x_2|, |x_3|)} \quad (169)$$

$$\hat{P}(x) = \frac{2}{2^{\frac{1}{\hat{k}}}} \cdot P(x) \quad (170)$$

となる．ここで，

$$\hat{k} = \begin{cases} \frac{1}{1 + \log_2 \left\{ P + (1 - P) \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}} & (0 < P(x) < 1) \\ 2 & (P(x) \leq 0) \end{cases} \quad (171)$$

である．関数  $\hat{c}_1(x)$  および  $\hat{c}_2(x)$  を

$$\begin{aligned} \hat{c}_1(x) &= \frac{2^{\frac{1}{\hat{k}}}}{2} \cdot \frac{(|x_1| + |x_2|)^{\frac{1}{\hat{k}-1}}}{\left\{ (|x_1| + |x_2|)^{\frac{\hat{k}}{\hat{k}-1}} + |x_3|^{\frac{\hat{k}}{\hat{k}-1}} \right\}^{\frac{1}{\hat{k}}}} \\ \hat{c}_2(x) &= \frac{2^{\frac{1}{\hat{k}}}}{2} \cdot \frac{|x_3|^{\frac{1}{\hat{k}-1}}}{\left\{ (|x_1| + |x_2|)^{\frac{\hat{k}}{\hat{k}-1}} + |x_3|^{\frac{\hat{k}}{\hat{k}-1}} \right\}^{\frac{1}{\hat{k}}}} \end{aligned} \quad (172)$$

とおくと，準普遍制御則

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\hat{c}_1 \cdot \frac{2(\hat{P} + |\hat{P}|) + |x_1| + |x_2|}{(2 - \sqrt{2})(\hat{P} + |\hat{P}|) + 2\sqrt{2} + |x_1| + |x_2|} \\
&\quad \cdot \frac{|x_1|^{\frac{1}{k-1}}}{\left(|x_1|^{\frac{k}{k-1}} + |x_2|^{\frac{k}{k-1}}\right)^{\frac{1}{k}}} \operatorname{sgn}(x_1) \\
u_2 &= -\hat{c}_1 \cdot \frac{2(\hat{P} + |\hat{P}|) + |x_1| + |x_2|}{(2 - \sqrt{2})(\hat{P} + |\hat{P}|) + 2\sqrt{2} + |x_1| + |x_2|} \\
&\quad \cdot \frac{|x_2|^{\frac{1}{k-1}}}{\left(|x_1|^{\frac{k}{k-1}} + |x_2|^{\frac{k}{k-1}}\right)^{\frac{1}{k}}} \operatorname{sgn}(x_2) \\
u_3 &= -\hat{c}_2 \cdot \frac{\hat{P} + |\hat{P}| + |x_3|}{2 + |x_3|} \operatorname{sgn}(x_3)
\end{aligned} \tag{173}$$

を得る．ここで，

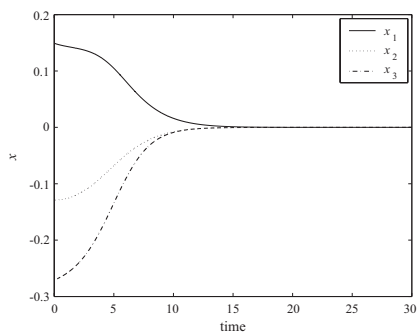
$$\hat{k} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \log_2 \left\{ \hat{P}(2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right\}} & (0 < P(x) < 1) \\ 2 & (P(x) \leq 0) \end{cases} \tag{174}$$

である．初期状態を  $x = (0.15, -0.13, -0.27)^T$  としたときの状態変数の応答，入力とノルム  $\max(|u_1|, |u_2|) + |u_3|$  の変化を図 16 に示す．状態変数は 0 に収束し，入力制約 (167) は満たされている．また，入りにチャタリングの生じていないことが確認できる．

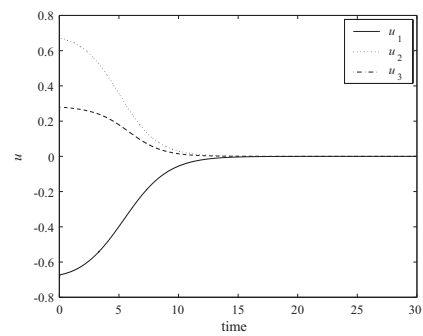
## 7.5 まとめ

本章では，入力が入れ子にされた Minkowski ball に拘束される非線形システムに対して，局所制御 Lyapunov 関数を用いて準普遍制御則を構築した．

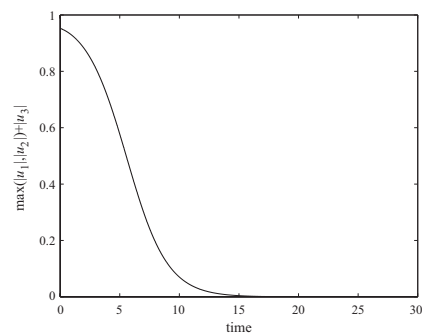
7.1 節では，漸近安定化可能領域を示した．7.2 節では，入力空間の閉包内で局所制御 Lyapunov 関数の微分を最小にする入力を求め，微分  $\dot{V}(x, u)$  を負にできる領域では  $P(x) < 1$  となることを明らかにした．7.3 節では，局所制御 Lyapunov 関数の微分を  $s$  個の項に分割し，分割された各項が非正になるように準普遍制御



(a) Response of state



(b) Change in input



(c) Change in norm

図 16 Responce with semi-universal controller (173)

則を設計した . 7.4 節では , シミュレーションによって提案した手法の有効性を確認した .

## 8. 小入力特性の解析

あるシステムが与えられたときに，連続な安定化制御則が存在するか否かを判別することは非常に重要である．この問題に関しては Brockett や Ryan, Coronらの論文があるが [35, 36, 37]，ここでは制御 Lyapunov 関数を利用する．定理 3 で示したように，システムが入力に関してアファインかつ入力の拘束される空間が凸ならば，連続な制御則によって原点を漸近安定化できるための必要十分条件は，小入力特性を満たす滑らかな制御 Lyapunov 関数が存在することである．本章では，入力制約  $u \in U$  を持つ入力アファインな非線形システム (18) に対して，小入力特性を満たす制御 Lyapunov 関数が存在するための条件を明らかにする．

8.1 節では，小入力特性を満たす制御 Lyapunov 関数が存在するための必要条件について述べ，零入力のもとで漸近安定なシステムに対しては小入力特性を満たす制御 Lyapunov 関数が存在することを示す．さらに，小入力特性を満たす制御 Lyapunov 関数が存在するための必要十分条件を明らかにする．8.2 節では，同次システムに対して小入力特性の解析を行う．

### 8.1 小入力特性を持つための必要十分条件

入力制約  $u \in U$  を持つ入力アファインな非線形システム (18) を考える．小入力特性は，原点の十分近傍では任意に小さい入力によって漸近安定化できることを示す性質である．これより， $f(0) = 0$  および  $0 \in U$  を満たすことは小入力特性を持つための必要条件であることがわかる．また， $f(x) \equiv 0$  あるいは  $g(x) \neq 0$  ( $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ) ならば，小入力特性を満たす制御 Lyapunov 関数が存在することが知られている [6]．

零入力のもとで漸近安定なシステムに対しては，零入力システムに対する Lyapunov 関数が存在する [20]．これより，つぎの定理を得る．

定理 18. 入力制約  $u \in U$  を持つシステム (18) を考える．零入力システム  $\dot{x} = f(x)$  が大域的 (局所的) に漸近安定ならば，小入力特性を満たす (局所) 制御 Lyapunov 関数が存在する． □

*Proof.* 定理 2 より，零入力システム  $\dot{x} = f(x)$  が大域的 (局所的) に漸近安定ならば，すべての  $x \neq 0$  に対して  $\dot{V}(x) = L_f V < 0$  を満たす (局所) Lyapunov 関数  $V(x)$  が存在する．この  $V(x)$  はすべての  $x \neq 0$  に対して  $L_g V = 0$  のとき  $L_f V < 0$  となるから，条件 (20) より， $V(x)$  はシステム (18) の (局所) 制御 Lyapunov 関数である．また，システム (18) に入力  $u \equiv 0$  を与えると (局所) 制御 Lyapunov 関数の微分は  $\dot{V}(x, 0) = L_f V + L_g V \cdot 0 < 0$  ( $\forall x \neq 0$ ) となるから，この (局所) 制御 Lyapunov 関数  $V(x)$  は小入力特性を持つ．よって，定理 18 を得る．  $\square$

以下では，小入力特性の定義を (66) 式で定義される関数  $P(x)$  を用いて書き換える．ノルムの等価性より，定義 14 のノルム  $\|u\|$  は任意の  $k$ -ノルムで置き換えることができる．そこで，半径  $c$  の Minkowski ball の閉包  $\bar{U}_k^c$  内で制御 Lyapunov 関数の微分  $\dot{V}(x, u)$  を最小化する入力

$$u_i = \begin{cases} -c \frac{|L_{g_i} V|^{\frac{1}{k-1}}}{\|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}} \operatorname{sgn}(L_{g_i} V) & (L_g V \neq 0) \\ 0 & (L_g V = 0) \end{cases} \quad (175)$$

$(i = 1, \dots, m)$

を与えると，制御 Lyapunov 関数の微分は

$$\dot{V}(x) = L_f V - c \|L_g V\|_{\frac{k}{k-1}}$$

となる． $L_g V = 0$  の場合，条件 (20) より，すべての  $x \neq 0$  に対して  $\dot{V}(x) < 0$  となる． $L_g V \neq 0$  の場合， $\dot{V}(x) < 0$  となることは  $P(x) < c$  となることと等価である．また，入力 (175) の  $k$ -ノルムは  $\|u\|_k \leq c$  となる．よって，定義 3 における条件  $L_f V + L_g V \cdot u < 0$  および  $\|u\| < \varepsilon$  は不等式  $P(x) < \varepsilon$  で置き換えることができる．よって，つぎの定理を得る．

**定理 19.** 入力制約  $u \in U$  を持つシステム (18) を考える． $k \geq 1$  は定数， $V(x)$  はシステムの (局所) 制御 Lyapunov 関数， $P(x)$  は (66) 式で定義される関数とする．(局所) 制御 Lyapunov 関数が小入力特性を持つための必要十分条件は，任意の  $\varepsilon > 0$  に対して， $L_g V \neq 0$  かつ  $\|x\| < \delta$  であれば  $P(x) < \varepsilon$  を満たすような  $\delta > 0$  が存在することである．  $\square$



## 8.2 同次システムに対する小入力特性

本節では、同次システムに対して小入力特性の解析を行う。まず、定理7をシステムが入力を持つ場合に拡張する。

補題 11. 入力制約のない同次システム (13) を考える。\$V(x)\$ はシステムの \$C^\infty\$ 級の制御 Lyapunov 関数、\$p\$ と \$k\$ は正の整数、\$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\$ は次式を満たす \$C^\infty\$ 級関数とする。

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{on } (-\infty, 1] \\ 1 & \text{on } [2, \infty) \end{cases}, \quad \alpha' \geq 0 \quad \text{on } \mathbb{R} \quad (176)$$

このとき、関数

$$\bar{V}(x) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{1}{t^{k+1}} (\alpha \circ V)(\delta_t^r x) dt & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \quad (177)$$

は \$\mathbb{R}^n\$ 上で正しく定義され、原点以外で \$C^\infty\$ 級の \$k\$ 次の同次制御 Lyapunov 関数になる。さらに、\$k > p \cdot \max\{r\_i \mid 1 \leq i \leq n\}\$ ならば、\$\bar{V}(x)\$ は原点で \$C^p\$ 級である。  
□

*Proof.* \$V(x)\$ は \$\mathbb{R}^n\$ 上で定義され、\$V(0) = 0\$、\$\|x\| \to \infty\$ のとき \$V(x) \to \infty\$ となるので、関数 \$\bar{V}(x)\$ は \$\mathbb{R}^n\$ 上で正しく定義される。また、

$$\begin{aligned} \bar{V}(\delta_\varepsilon^r x) &= \int_0^\infty \frac{1}{t^{k+1}} (\alpha \circ V)(\delta_{t\varepsilon}^r x) dt \\ &= \varepsilon^k \int_0^\infty \frac{1}{s^{k+1}} (\alpha \circ V)(\delta_s^r x) ds \\ &= \varepsilon^k \bar{V}(x) \end{aligned} \quad (178)$$

となるので、\$\bar{V}(x)\$ は \$k\$ 次の同次関数である。さらに、次式を満たす正の定数 \$\ell > 0\$ および \$L > 0\$ が存在する。

$$V(\delta_t^r x) \leq 1 \quad \forall \|x\| \in \left[\frac{1}{2}, 2\right], t \leq \ell \quad (179)$$

$$V(\delta_t^r x) \geq 2 \quad \forall \|x\| \in \left[\frac{1}{2}, 2\right], t \geq L \quad (180)$$

(176), (177), (179) および (180) 式より,  $\|x\| \in [\frac{1}{2}, 2]$  を満たすすべての  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して, 関数  $\bar{V}(x)$  は

$$\bar{V}(x) = \int_{\ell}^L \frac{1}{t^{k+1}} (\alpha \circ V)(\delta_t^r x) dt + \frac{1}{kL^k} \quad (181)$$

と書き直すことができる. よって, 関数  $\bar{V}(x)$  は  $(\frac{1}{2}, 2)$  上で  $C^\infty$  級であり,

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_i}(x) = \int_{\ell}^L \frac{t^{r_i}}{t^{k+1}} \alpha'(V(\delta_t^r x)) \frac{\partial V}{\partial x_i}(\delta_t^r x) dt \quad (182)$$

となる. さらに, システム (13) が同次であることより,

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} L_{\bar{f}} \bar{V}(x, u) = \inf_{\bar{u} \in \mathbb{R}^m} \int_{\ell}^L \frac{1}{t^{\tau+k+1}} \alpha'(V(\delta_t^r x)) L_{\bar{f}} V(\delta_t^r x, \bar{u}) dt \quad (183)$$

を得る. ただし,  $\bar{u} = \delta_t^s u$  とおいた.  $(1, 2)$  上では  $\alpha' > 0$  なので, すべての  $\|x\| \in [\frac{1}{2}, 2]$  に対して

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} L_{\bar{f}} \bar{V}(x, u) < 0 \quad (184)$$

となる. よって, 関数  $\bar{V}(x)$  は原点以外で  $C^\infty$  級であり, すべての  $x \neq 0$  に対して (184) 式を満たす. 残りの証明は文献 [24] と同様である.  $\square$

以下では, 入力アファインな拡大  $\delta_\varepsilon^r x$  および  $\delta_\varepsilon^s u$  に関する  $\tau$  次の同次システム (18) を考える. すなわち,

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1^1(x) & \dots & g_m^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1^n(x) & \dots & g_m^n(x) \end{bmatrix} \quad (185)$$

とおき,

$$\begin{aligned} f_i(\delta_\varepsilon^r x) &= \varepsilon^{\tau+r_i} f_i(x) \\ g^i(\delta_\varepsilon^r x) \delta_\varepsilon^s u &= \varepsilon^{\tau+r_i} g^i(x) u \end{aligned} \quad (186)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

を満たすシステム (18) を考える. ただし,  $g^i(x)$  は  $g(x)$  の  $i$  番目の行ベクトルを表すものとする. このとき, 定理 2 および補題 11 より, 以下の結果を得る.

定理 20. 入力制約のない同次システム (18) が原点以外で連続な制御則  $u(x)$  によって大域的に漸近安定化できるための必要十分条件は, 滑らかな同次制御 *Lyapunov* 関数が存在することである.  $\square$

入力制約が存在する場合も, 局所的には定理 20 と同様のことがいえることに注意する.  $V(x)$  は入力制約  $u \in U$  を持つ同次システム (18) に対する  $\tau_v$  次の (局所) 同次制御 *Lyapunov* 関数とする. (66) 式に  $k = 1$  を代入すると,

$$P(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x)}{\max_{j=1, \dots, m} \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) g_j^i(x) \right|} \quad (187)$$

となる. これに  $\delta_\varepsilon^r x$  を代入すると, (186) および (47) 式より

$$P(\delta_\varepsilon^r x) = \min_{j=1, \dots, m} \varepsilon^{s_j} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x)}{\left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) g_j^i(x) \right|} \quad (188)$$

となる.  $s_j > 0$  より,  $\varepsilon$  を十分小さくすると  $P_1(\delta_\varepsilon^r x)$  は任意に小さくできる. また,  $\delta_\varepsilon^r x$  の同次  $q$ -ノルムは  $\|\delta_\varepsilon^r x\|_{r,q} = \varepsilon \|x\|_{r,q}$  となるから,  $\varepsilon$  を十分小さくすると  $\|\delta_\varepsilon^r x\|_{r,q}$  は任意に小さくできる. よって, 十分小さいノルムを持つ  $x$  に対して  $P(x)$  を任意に小さくできるから, 以下の結果を得る.

定理 21. 入力制約  $u \in U$  を持つ同次システム (18) に対する滑らかな (局所) 同次制御 *Lyapunov* 関数は小入力特性を満たす.  $\square$

定理 20 および 21 より, 入力アファインな同次システムに対しては, 原点以外で連続な制御則が存在することと連続な制御則が存在することは等価であることがわかる.

### 8.3 まとめ

本章では, 入力アファインな非線形システムに対して, 小入力特性を満たす制御 *Lyapunov* 関数が存在するための条件を示した. また, 同次システムが原点以

外で連続な制御則によって漸近安定化できるための必要十分条件は滑らかな同次制御 Lyapunov 関数が存在することであることを明らかにした。さらに、入力ア  
フラインな同次システムに対する同次制御 Lyapunov 関数は小入力特性を満たす  
ことを明らかにした。

## 9. おわりに

本論文では，入力制約を持つ入力アファインな非線形システムに対して，滑らかな局所制御 Lyapunov 関数が与えられているという仮定のもとで，ロバストな準普遍制御則を設計した．提案したすべての制御則は常に局所制御 Lyapunov 関数を減少させる働きをしており，増加させるように作用することはない．この意味で，システムの特性を生かす制御則になっている．実際のシステムを制御する際は，局所制御 Lyapunov 関数さえ設計できれば，あとは提案した制御則を適用することによって，簡単に制御することができる．特に定理 14 のロバスト制御則を用いると，入力が原点以外で連続になり，状態が収束するまでの時間が一つのパラメータで調節できるだけでなく，セクタ余裕と吸引領域も一つのパラメータで簡単に調整することができる．

小入力特性の解析においては，入力アファインな非線形システムに対して，小入力特性を満たす制御 Lyapunov 関数が存在するための条件を示した．また，システムが同次の場合，原点以外で連続な制御則が存在することと連続な制御則が存在することは等価であることを明らかにした．同次システムは非線形システムの一つであるが，非線形システムの中にも同次近似可能なものは数多くある．同次近似可能な場合，小入力特性などの局所的な性質は近似後のシステムにも受け継がれるので，同次システムに対する小入力特性の解析は非常に重要である．

## 謝辞

本研究を進めるにあたって，西谷先生，山下先生，杉本先生，中村先生には非常に熱心に指導していただきました．また，青盛さんには大変お世話になりました．深く感謝いたします．

# 付録

## A. 研究業績

### 学術論文

1. 喜種 奈美, 中村 文一, 山下 裕, 西谷 紘一: 入力制約付き非線形システムに対する逆最適制御, 計測自動制御学会論文集, Vol. 42, No. 1, 26-34, 2006
2. 喜種 奈美, 中村 文一, 山下 裕, 西谷 紘一: 入力制約付き非線形システムに対する制御則設計, 計測自動制御学会論文集, Vol. 41, No. 3, 250-258, 2005
3. 喜種 奈美, 山下 裕, 西谷 紘一: 非線形 DAE 系に対する制御系設計, 計測自動制御学会論文集, Vol. 40, No. 7, 721-728, 2004

### 国際会議

1. Kenichi Katoh, Nami Kidane, Hisakazu Nakamura, Hirokazu Nishitani: Controller design method for a nonlinear system with an input constraint and its application to a robot arm, *2005 IEEE Conference on Control Applications*, 1373-1378, Toronto, August 2005
2. Nami Kidane, Hisakazu Nakamura, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: Controller for a nonlinear system with an input constraint by using a control Lyapunov function I, *16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, July 2005
3. Nami Kidane, Hisakazu Nakamura, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: Controller for a nonlinear system with an input constraint by using a control Lyapunov function II, *16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, July 2005
4. Hisakazu Nakamura, Nami Kidane, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: Non-linear continuous-time reference governors for constrained nonlinear control, *16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, July 2005

5. Nami Kidane, Hisakazu Nakamura, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: Controller design for a nonlinear system with inputs restricted to a direct product of Minkowski balls, *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Paradise Island, Bahamas, December 2004
6. Hisakazu Nakamura, Nami Kidane, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: Stabilization of a cascade-connected nonlinear system with an input constraint, *6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 341-346, Stuttgart, Germany, September 2004
7. Nami Kidane, Yuh Yamashita, Hisakazu Nakamura, Hirokazu Nishitani: Inverse optimization for a nonlinear system with an input constraint, *SICE Annual Conference 2004*, 1210-1213, Sapporo, August 2004
8. Hisakazu Nakamura, Nami Kidane, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: Stabilization of a cascade-connected nonlinear system with an input constraint, *SICE Annual Conference 2004*, 1874-1879, Sapporo, August 2004
9. Yuh Yamashita, Nami Kidane, Hirokazu Nishitani: Observer design for nonlinear systems described by differential-algebraic equations, *Proceedings of 8th International Symposium on Process Systems Engineering*, Kunming, China, January 2004
10. Nami Kidane, Hisakazu Nakamura, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: Stabilizability analysis and controller design for a nonlinear system with an input constraint, *SICE Annual Conference 2003*, 2320-2323, Fukui, August 2003
11. Nami Kidane, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: Observer based I/O-linearizing control of high index DAE systems, *American Control Conference 2003*, 3537-3542, Denver, America, June 2003
12. Nami Kidane, Yuh Yamashita, Hirokazu Nishitani: I/O-linearizing controller and observer for nonlinear DAE systems with high index, *SICE Annual Conference 2002*, 1863-1866, Osaka, August 2002



## 国内発表

1. 喜種 奈美, 中村 文一, 西谷 紘一: 非線形システムの局所漸近安定化可能性について, 第 34 回制御理論シンポジウム, 49-52, 大阪, 2005 年 10 月-11 月
2. 加藤 健一, 喜種 奈美, 中村 文一, 西谷 紘一: 状態量依存の入力制約を有する非線形システムの制御則設計およびロボットアームへの適用, 第 5 回制御部門大会, 235-340, 仙台, 2005 年 5 月
3. 喜種 奈美, 中村 文一, 山下 裕, 西谷 紘一: 入力制約を有する非線形システムに対する逆最適制御則設計, 学生研究発表会, 63-66, 京都, 2005 年 3 月
4. 加藤 健一, 喜種 奈美, 中村 文一, 西谷 紘一: 入力制約を有する非線形システムの制御則設計およびロボットアームへの適用, 学生研究発表会, 67-70, 京都, 2005 年 3 月
5. 喜種 奈美, 中村 文一, 山下 裕, 西谷 紘一: 滑らかな制御 Lyapunov 関数に関する小入力特性の十分条件, 第 33 回制御理論シンポジウム, 205-208, 浜松, 2004 年 11 月
6. 喜種 奈美, 中村 文一, 山下 裕, 西谷 紘一: Minkowski ball の直積に拘束された入力を持つ非線形システムに対する制御則設計, 第 4 回制御部門大会, 285-290, 北九州, 2004 年 5 月
7. 喜種 奈美, 山下 裕, 中村 文一, 西谷 紘一: 制御リヤプノフ関数を用いた入力制約付きシステムに対する制御系設計, 第 32 回制御理論シンポジウム, 59-62, 浜松, 2003 年 11 月
8. 喜種 奈美, 山下 裕, 西谷 紘一: 代数変数を含むフィードバック則による regularizing とオブザーバ設計: 第 35 回計測自動制御学会北海道支部学術講演会, 71-74, 北海道, 2003 年 1 月
9. 喜種 奈美, 山下 裕, 西谷 紘一: High Index DAE 系に対するオブザーバ設計, 第 31 回制御理論シンポジウム, 339-342, 葉山, 2002 年 10 月

## 参考文献

- [1] M. Malisoff and E. D. Sontag: Universal formulas for feedback stabilization with respect to Minkowski balls, *Systems & Control Letters*, **40**, 247-260 (2000)
- [2] Y. Lin and E. D. Sontag: Control-Lyapunov universal formulas for restricted inputs, *Control-Theory and Advanced Technology*, **10**, 1981-2004 (1995)
- [3] Y. Lin and E. D. Sontag: A universal formula for stabilization with bounded controls, *Systems & Control Letters*, **16**, 393-397 (1991)
- [4] E. D. Sontag: A 'universal' construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization, *Systems & Control Letters*, **13**, 117-123 (1989)
- [5] F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, L. Rifford, and R. J. Stern: Feedback stabilization and Lyapunov functions, *SIAM Control and Optimization*, **39**, 1, 25-48 (2000)
- [6] R. A. Freeman and P. V. Kokotović: Robust nonlinear control design state-space and Lyapunov techniques, *Birkhäuser* (1996)
- [7] P. Kokotović and M. Arcak: Constructive nonlinear control: a historical perspective, *Automatica*, **37**, 5, 637-662 (2001)
- [8] 宮里 義彦: 解説 ミニ特集  $H_\infty$  制御, 計測と制御, **39**, 2, 112-118 (2000)
- [9] M. Krstić and Z.-H. Li: Inverse optimal design of input-to state stabilizing nonlinear controllers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**, 3, 336-350 (1998)
- [10] J. W. Curtis and R. W. Beard: Satisficing: a new approach to constructive nonlinear control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49**, 7, 1090-1102 (2004)

- [11] 山下 裕: 奈良先端科学技術大学院大学 システム制御 II 講義資料 (2003)
- [12] E. D. Sontag and H. J. Sussmann: General classes of control-Lyapunov functions, *Stability Theory*, R. Jeltsch, and M. Mansour, eds., *Birkhauser*, Basel, 87-96 (1996)
- [13] E. D. Sontag and H. J. Sussmann: Nonsmooth control-Lyapunov functions, *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, 2799-2805 (1995)
- [14] Z. Artstein: Stabilization with relaxed controls, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, **7**, 1163-1173 (1983)
- [15] E. D. Sontag: A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability, *SIAM Control and Optimization*, **21**, 3, 462-471 (1983)
- [16] E. D. Sontag: Mathematical control theory deterministic finite dimensional systems second edition, *Springer* (1998)
- [17] F. Mazenc and A. Iggidr: Backstepping with bounded feedbacks, *Systems & Control Letters*, **51**, 235-245 (2004)
- [18] H. K. Khalil: Nonlinear systems third edition, *Prentice Hall* (2002)
- [19] S. Sastry: Nonlinear systems analysis, stability, and control, *Springer* (1999)
- [20] A. Bacciotti and L. Rosier: Liapunov functions and stability in control theory, *Springer* (2001)
- [21] R. Sepulchre, M. Janković, and P. Kokotović: Constructive Nonlinear Control, *Springer* (1997)
- [22] R. Sepulchre and D. Aeyels: Homogeneous Lyapunov functions and necessary conditions for stabilization, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, **9**, 34-58 (1996)

- [23] H. Hermes: Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls, *Differential Equations Stability and Control*, S. Elaydi, ed., NewYork: Marcel Dekker, **109**, 249-260 (1991)
- [24] L. Rosier: Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field, *Systems & Control Letters*, **19**, 467-473 (1992)
- [25] L. Grüne: Homogeneous control Lyapunov functions for homogeneous control systems, *MTNS 2000*, (2000)
- [26] L. Grüne: Homogeneous state feedback stabilization of homogeneous systems, *SIAM Control and Optimization*, **38**, 4, 1288-1308 (2000)
- [27] 中村 文一: 同次系の安定性解析と制御系設計に関する研究, 奈良先端科学技術大学院大学 博士論文 (2003)
- [28] 太田 快人: 状態や入出力が制約されたシステムの制御, システム/制御/情報, **47**, 11, 503-506 (2003)
- [29] 平田 研二: 不変集合を利用した拘束システムの解析と制御系設計への応用, システム/制御/情報, **47**, 11, 507-513 (2003)
- [30] 吉田 和信: 入力・状態制約を考慮したレギュレータの設計, システム/制御/情報, **47**, 11, 514-519 (2003)
- [31] 杉江 俊治: 入力と状態の制約条件を考慮した目標値整形, システム/制御/情報, **47**, 11, 520-525 (2003)
- [32] 橋本 芳宏: 微分可能な飽和関数を用いた逐次線形近似制御, システム/制御/情報, **47**, 11, 526-531 (2003)
- [33] 木山 健: セクター余裕に基づく飽和を有する制御系の解析と設計 – 飽和要素の出力から入力への直達成分の考察, システム/制御/情報, **47**, 11, 532-539 (2003)

- [34] 和田 信敬: Anti-windup 性能の最適化について, システム/制御/情報, **47**, 11, 540-545 (2003)
- [35] R. W. Brockett: Asymptotic stability and feedback stabilization, *Differential Geometric Control Theory*, R. W. Brockett, R. S. Millman and H. H. Sussmann, Eds., *Birkhauser*, Basel-Boston (1983)
- [36] E. P. Ryan: On Brockett's condition for nonsmooth stabilizability and its necessity in a context of nonsmooth feedback, *Journal of Control and Optimization*, **32**, 6, 1597/1604 (1994)
- [37] J.-M. Coron, A necessary condition for feedback stabilization, *Systems & Control Letters*, **14**, 227-232 (1990)
- [38] 小平 邦彦, 岩波講座 基礎数学 解析入門 IV, 岩波書店 (1979)
- [39] 岩崎 徹也, LMI と制御, 昭晃堂 (1997)
- [40] 高橋 渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書 (2000)