

NAIST-IS-DT0061210

博士論文

同次系の安定性解析と制御系設計に関する研究

中村 文一

2003年6月25日

奈良先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科 情報システム学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に  
博士(工学) 授与の要件として提出した博士論文である。

中村 文一

審査委員： 西谷 紘一 教授  
杉本 謙二 教授  
山下 裕 助教授

# 同次系の安定性解析と制御系設計に関する研究\*

中村 文一

## 内容梗概

同次システムは、近年制御理論において非常に重要な役割を果たしているシステムである。同次システムは非線形システムではあるが、線形システムと同様に、局所的な性質が大域的な性質と一致するという非常に良い性質をもっているうえに、線形システムにはない、有限時間整定制御器が構成できる、あるいは制御器を設計することが非常に困難なシステムとして知られている非ホロノミックシステムに対する制御則の設計にも適用可能などといった良い性質を持っている。

同次システムには不連続なものも数多く存在する。例えば、スライディングモード制御器のロバスト性を維持しながら有限整定性を有する高次スライディングモード制御器や、特定の条件下で厳密に信号の微分を求めることが可能な厳密微分器などが不連続な同次システムである。ところが、不連続な同次システムについてはほとんど研究がなされてこなかった。また、非ホロノミックシステムに対する時不変同次制御器についてはこれまで議論がされていなかった。

本論文では、第2章において基本的な概念である連続な同次システムの持つ性質について説明し、同次性の非常に有用な応用例である同次有限時間整定制御について考察する。

次に、第3章において不連続な同次システムに対し、ディファレンシャル・インクルージョンを用いて安定性解析を行う。まずこれまでに得られている2つの安定なディファレンシャル・インクルージョンに対する Lyapunov の定理の逆定理を整理し、ディファレンシャル・インクルージョンの平衡点に関して議論する。

---

\* 奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報システム学専攻 博士論文, NAIST-IS-DT0061210, 2003年6月25日.

その後、同次ディファレンシャル・インクルージョンを新たに提案し、同次ディファレンシャル・インクルージョンに対する Lyapunov の定理の逆定理を与え証明する。さらに、同次 Lyapunov 関数を用い漸近安定なディファレンシャル・インクルージョンの収束性能と同次ディファレンシャル・インクルージョンのロバスト性を明らかにする。続いて、不連続な同次システムの代表例である高次スライディングモード制御器と厳密微分器について安定性の解析を行う。

非ホロノミックシステムは連続な時不変状態フィードバックでは安定化できないことが知られている制御器の構成が難しいシステムである。第4章では、そのような非ホロノミックシステムに対し新たに時不変の不連続同次制御器を提案する。本論文では、代表的な非ホロノミックシステムであるチェインドシステムとマルチジェネレータの非ホロノミックシステムに対し、不連続な時不変同次有限時間整定制御器を提案し、安定性を証明する。提案する手法は、これまで提案されている手法と異なり、有限時間で整定し、制御則の構築が簡単で、制御入力が無限大に発散する特異点を持たないという優れた性質を持つものである。

## キーワード

同次システム, 非線形制御, ディファレンシャル・インクルージョン, 非ホロノミック, 有限時間整定制御



# Stability Analysis and Control System Design of Homogeneous Systems\*

Hisakazu Nakamura

## Abstract

Homogeneous systems are known as important nonlinear systems in control theory. A homogeneous system has an advantage in that the local property coincides with the global one in the same way as a linear system, and has some additional properties that the linear system does not have. For example, there exist homogeneous finite-time systems and homogeneous controllers for nonholonomic systems.

There also exist some discontinuous homogeneous systems: high-order sliding-mode controllers and exact differentiators. However, there have been few studies conducted on discontinuous homogeneous systems, and none of those studies focused on time-invariant homogeneous controllers for nonholonomic systems.

At the beginning of this thesis, homogeneity with dilation is reviewed. Then, the homogeneous finite-time control is discussed as an effective application of homogeneity.

Next, the stability of discontinuous homogeneous systems is analyzed using a differential inclusion. Two similar results on the converse Lyapunov theorem for differential inclusions are reviewed and unified into one simple theorem. A new definition of a homogeneous differential inclusion is proposed and a converse Lyapunov theorem for the homogeneous differential inclusion is proved. Moreover,

---

\* Doctoral Thesis, Department of Information Systems, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, NAIST-IS-DT0061210, June 25, 2003.

it is shown that the order of homogeneity of the homogeneous system indicates the speed of convergence as the continuous homogeneous system shows. The stability of the high-order sliding-mode control system and exact differentiator system are also analyzed.

It is well known that nonholonomic systems cannot be stabilized by any time-invariant continuous state-feedback controllers. In this thesis, discontinuous homogeneous finite-time controllers for chained-systems and first-order systems are designed, and the stability of the controlled systems are proved. The proposed controller has superior properties such as no singular point where a control input has an infinite value, and it stabilizes the system in finite-time stabilization.

**Keywords:**

homogeneous system, nonlinear control, differential inclusion, nonholonomic, finite-time control

# 目次

第1章	はじめに	1
1.1.	同次システムとは	1
1.2.	準備	3
第2章	同次システムと同次有限時間整定制御	6
2.1.	拡大付き同次性	6
2.2.	同次関数の正定性および負定性	11
2.3.	同次システムに対する同次 Lyapunov 関数	14
2.4.	有限時間整定制御	15
2.5.	高次の同次有限時間整定制御	19
2.6.	2章のまとめ	24
第3章	不連続な同次システムの解析と制御	25
3.1.	不連続な同次システム	25
3.2.	ディファレンシャル・インクルージョン	26
3.3.	Lyapunov の定理の逆定理	34
3.4.	ディファレンシャル・インクルージョンの平衡点と解の一意性	37
3.5.	同次システムと同次ディファレンシャル・インクルージョン	39
3.6.	同次ディファレンシャル・インクルージョンにおける Lyapunov の定理の逆定理	40
3.7.	同次 Lyapunov 関数の性質	44
3.8.	高次スライディングモード制御	49
3.9.	同次ディファレンシャル・インクルージョンのロバスト安定性	51

3.9.1	高次の摂動項を含むディファレンシャル・インクルージョ ンの安定性 . . . . .	51
3.9.2	等しい次数の摂動項を含む同次ディファレンシャル・イン クルージョンの安定性 . . . . .	52
3.10.	厳密な微分器 . . . . .	53
3.10.1	厳密な微分器の構成 . . . . .	54
3.10.2	厳密な1階微分器 . . . . .	55
3.10.3	厳密な2階微分器 . . . . .	60
3.11.	3章のまとめ . . . . .	68
<b>第4章</b>	<b>非ホロノミックシステムに対する同次有限時間整定制御</b>	<b>69</b>
4.1.	非ホロノミックシステムとは . . . . .	69
4.2.	非ホロノミックシステムに適用可能な解 . . . . .	70
4.3.	1次のチェインドシステムに対する同次有限時間整定制御器 . . . . .	71
4.3.1	対象システム . . . . .	72
4.3.2	1次のチェインドシステムに対する同次有限時間整定制御則	73
4.3.3	収束速度の設計 . . . . .	77
4.3.4	3状態のチェインドシステムに対する制御系設計 . . . . .	79
4.3.5	3状態のチェインドシステムに対する同次有限時間整定制 御則のシミュレーション例 . . . . .	82
4.3.6	1次のチェインドシステムに対する同次有限時間整定制御 のまとめ . . . . .	86
4.4.	高次チェインドシステムに対する同次有限時間整定制御器 . . . . .	87
4.4.1	高次のチェインドシステム . . . . .	87
4.4.2	高次チェインドシステムに対する制御 . . . . .	89
4.4.3	2-1-1次チェインドシステムに対する制御則 . . . . .	92
4.4.4	高次のチェインドシステムに対する同次有限時間整定制御 のまとめ . . . . .	95
4.5.	マルチジェネレータを有する非ホロノミックシステムに対する有 限時間整定制御器 . . . . .	95

4.5.1	First-Order System . . . . .	98
4.5.2	6 状態 3 入力の FOS に対する制御器の設計 . . . . .	100
4.5.3	5 状態 2 入力の 2 つのジェネレータを有する非ホロノミック システムに対する制御 . . . . .	101
4.6.	4 章のまとめ . . . . .	106
<b>第 5 章</b>	<b>結論と今後の展望</b>	<b>109</b>
5.1.	本論文の結論 . . . . .	109
5.2.	今後の展望 . . . . .	110
	謝辞 . . . . .	112
	参考文献 . . . . .	113
	付録 . . . . .	117
A.	研究業績 . . . . .	117

## 目 次

3.1	Simulation Results: Example 1 . . . . .	59
3.2	Simulation Results: Example 3 . . . . .	66
3.3	Simulation Results: Example 3 . . . . .	67
4.1	Simulation Results - State: Finite-time Controller . . . . .	83
4.2	Simulation Results - Input: Finite-time Controller . . . . .	84
4.3	Simulation Results - State: Exponentially-stable Controller . . . . .	85
4.4	Simulation Results - Input: Exponentially-stable Controller . . . . .	86
4.5	Simulation Results: State . . . . .	96
4.6	Simulation Results: Input . . . . .	97
4.7	Simulation Results: First-Order System . . . . .	102
4.8	Simulation Results: First-Order System . . . . .	103
4.9	Simulation Results: five variables system with two generators . . . . .	107
4.10	Simulation Results: five variables system with two generators . . . . .	108

# 表 目 次

# 第1章 はじめに

## 1.1. 同次システムとは

拡大つきの同次システムは近年制御理論において非常に重要な役割を果たしているシステムである。拡大付きの同次システムは、従来より知られている古典的な同次システム概念を拡張したものであり、線形システムを内包する概念である。以下、本論文では特に古典的と記述のない際に同次とあれば、拡大付きの同次を示すこととする。

常微分方程式系は動的な対象を記述する際に一般的に用いられる。本論文では、一般的に以下の常微分方程式系を扱う。

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1.1)$$

これまで、非線形制御の世界では式(1.1)において $f(x)$ が滑らか、すなわち $x$ に関して微分できるものだけを対象としてきており、滑らかなシステムに対しては線形近似、あるいは厳密な線形化といったようなアプローチが知られている。しかし、これらの手法はあくまで線形制御を基本とするため、線形制御でできなかったことは実現できない。

それに対し、同次システムは、線形システムのような $f(x)$ が滑らかなシステムのほかに、 $f(x)$ が $x$ で微分不可能なシステムを含む。このため、線形システムとは異なり、たとえばシステムを有限時間で原点に整定させることが可能な有限時間整定制御器を構成することができる。さらに、同次システムには不連続な物も数多く存在する。例えば、スライディングモード制御器のロバスト性を維持しながら有限整定性を有する高次スライディングモード制御器や、特定の条件下で厳密に信号の微分を求めることが可能な厳密微分器、あるいは非ホロノミックシステムに対する時不変制御器などが不連続な同次システムである。



同次システムはこのように幅広い対象を含むシステムであるが、線形システムと同様に、局所的な性質が大域的な性質と一致するという非常に良い性質を持つ。これは、局所的に安定な同次システムは大域的に安定であり、局所的に漸近安定な同次システムは大域的に漸近安定であることを示している。この性質により、同次システムは一般の非線形システムより解析がしやすくなっている。

本論文では、まず第2章で拡大付きの同次性について定義を述べ、その性質について解説する。さらに、同次システムでは Lyapunov 関数が重要な役割を果たすため、Rosier によって得られた同次システムに対する Lyapunov の定理の逆定理と同次 Lyapunov 関数を用いたシステム収束性能の推測について解説する。次に、同次性の非常に有用な応用例である同次有限時間整定制御について述べる。同次有限時間整定制御は非線形の有限時間整定制御の中でも、高次積分系への適用が可能、整定時間を推測できるなどの良い性質を有している。本章ではさらに同次有限時間整定制御器について得られた性質を述べ、その証明を行う。

先に述べたように、同次システムの中には不連続なものも存在する。ところが、不連続な同次システムについてはほとんど研究がなされていない。そこで、本論文ではディファレンシャル・インクルージョンを用いて不連続な同次システムについて解析することを考える。第3章ではディファレンシャル・インクルージョンについて簡単に解説し、不連続な常微分方程式系とディファレンシャル・インクルージョンの対応について述べる。また、ディファレンシャル・インクルージョンに対する Lyapunov の定理の逆定理について、これまでに得られている定理は仮定が各々異なり非常に利用しにくいものとなっているため、これらの仮定を整理し利用しやすい定理を与える。次に、同次ディファレンシャル・インクルージョンを提案し、不連続な同次システムが同次ディファレンシャルインクルージョンに対応付けられることを示す命題を与える。それから、同次ディファレンシャル・インクルージョンに対する Lyapunov の逆定理を与え、証明を行う。さらに、同次 Lyapunov 関数を用いることで、不連続な同次システムに対しても連続な同次システムと同様に収束性能を簡単に推測することが可能であることを示し、これまで得られている不連続な同次システムが有限時間で整定することを確認する。同次ディファレンシャル・インクルージョンの応用例として、不連続な同次シス

テムの代表例の1つである高次スライディングモード制御について簡単に述べ、システムを解析する。その後、同次ディファレンシャル・インクルージョンを用いて同次システムのロバスト安定性についての条件を与え、証明を行う。この結果を用いて、同次ディファレンシャル・インクルージョンのロバスト性が非常に重要な役割を果たす厳密微分器に対して収束性の保証を行う。

第4章では、まず、1次のチェインドシステムに対する同次有限時間整定制御器を提案する。本章で提案する制御器はこれまで得られていなかった、入力が発散する領域を持たない、有限時間で整定する、時不変不連続制御器である。また、はめ込み系を用いることにより、車両系に対してチェインドフォームを経由することなくチェインドシステムに対する制御器を若干改良するだけで適用できる手法を提案する。次に、同様の手法を用いて高次のチェインドシステムに対する同次有限時間整定制御器を提案する。本章で提案する制御器はこれまで得られていなかった、一切フィードフォワード要素をもたない、有限時間で整定する、時不変不連続制御器であり、その有効性をシミュレーションを用いて確認を行う。本章の最後に、非常に制御が困難なことで知られているマルチジェネレータ型の非ホロミックシステムに対して制御則の構築の指針を与える。本章で扱うシステムは、First Order System と呼ばれるもっとも簡単なマルチジェネレータシステムとそれより制御が困難な2入力5状態の2ジェネレータシステムである。これらのシステムに対し、有限時間整定制御則を提案する。最後に本論文の結論と同次システムに対する今後の課題および今後の展望について述べる。

## 1.2. 準備

本題に入る前に、本章では本論文において用いる基本的な用語、あるいは表現について簡単に説明を行う。

ある集合  $A$  を考えるとき、 $x$  が集合  $A$  の要素であるとき  $x \in A$  と書き、集合  $B$  が集合  $A$  の部分集合であるとき  $B \subset A$  と書く。

$\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$  はそれぞれ自然数, 実数を表わす。また、 $\mathbb{R}^+$  は実数の区間  $[0, \infty)$  を表わす。また、単に  $x > 0$  のような表現をおこなった際には暗黙のうちに  $x \in \mathbb{R}$  であ

ることを仮定する。

また、 $f: A \rightarrow B$  と書くとき、 $f$  は集合  $A$  から集合  $B$  への写像であることを表し、 $x \mapsto \hat{x}$  と書くとき、集合の要素  $x$  は  $\hat{x}$  に対応付けられることを示す。

ある状態量  $x \in \mathbb{R}^n$  の時間微分  $dx/dt$  を簡単に、 $\dot{x}$  と書く。

ある  $x \in \mathbb{R}^n$  およびある関数  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  に対する偏微分記号  $\nabla$  を以下のように定義する。

$$\nabla V(x) = \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right) \quad (1.2)$$

特に、ある特定の変数  $x$  についてのみ考える際には  $\nabla_x$  と書き、

$$\nabla_x V(t, x) = \left( \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_n} \right) \quad (1.3)$$

と定義する。記号  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は通常の内積をあらわす。また、集合の測度に関して、 $\mu_i$  は  $\mathbb{R}^i$  の Lebesgue 測度であると定義する。

また、 $\|x\|$  のように表現するとき、これは通常の Euclid ノルムを表わす。

**定義 1.1 (開球).**  $B_\varepsilon(x)$  は中心を  $x$  とする半径  $\varepsilon$  の開球、すなわち

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \varepsilon\} \quad (1.4)$$

である。□

**定義 1.2 (閉球).**  $\overline{B_\varepsilon(x)}$  は中心を  $x$  とする半径  $\varepsilon$  の閉球、すなわち

$$\overline{B_\varepsilon(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq \varepsilon\} \quad (1.5)$$

である。□

**定義 1.3 (凸包).**  $co(A)$  は集合  $A$  の凸包を示す。□

**定義 1.4 (凸閉包).**  $\overline{co}(A)$  は集合  $A$  の凸閉包を示す。□

**定義 1.5 (局所有界).** 集合値写像  $F(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  が局所有界であるとは、コンパクト集合  $K \subset \mathbb{R}^n$  に対し、任意の  $x \in K$  において

$$F(x) \subset B_M(0) \quad (1.6)$$

が成立するような  $M > 0$  が存在することを言う。□

定義 1.6 (上半連続). 集合値写像  $F(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  が上半連続であるとは, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\|x - x'\| < \delta \Rightarrow F(x') \subset F(x) + B_\varepsilon(0) \quad (1.7)$$

であるような  $\delta > 0$  が存在することを言う.  $\square$

本研究では符号付きべき乗を数多く使用する. そこで, 表記  $(a)^{b(\bar{s})}$  は  $a$  の符号付き  $b$  乗を示す. すなわち,

$$a^{b(\bar{s})} = |a|^b \operatorname{sgn} a \quad (1.8)$$

とする. このとき,  $\operatorname{sgn}$  関数は以下のように定義する.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases} \quad (1.9)$$

本論文の後半で, Lie かけこ積を使用するので,  $\mathbb{R}^n$  上での定義を以下に示す.

定義 1.7. 状態  $x \in \mathbb{R}^n$  および, ベクトル場  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を考える. このとき, Lie かけこ積  $[,]$  は次式で定義される.

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \quad (1.10)$$

$\square$

状態  $x \in \mathbb{R}^n$  および, ベクトル場  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を考えたとき, 記号  $\operatorname{span}\{\}$  は次式のように定義される.

$$\operatorname{span}\{f, g\} = \{af + bg \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad (1.11)$$

である.

## 第2章 同次システムと同次有限時間 整定制御

### 2.1. 拡大付き同次性

まずはじめに、本論文の主題である、拡大付きの同次性について解説しよう。拡大付きの同次性は Rothschild ら [27] による準楕円型偏微分作用素の解析のために 1976 年に初めて提案された。制御理論にもっとも早く導入したのは Dayawansa らだと考えられており、1990 年代初頭には Hermes により制御界に広められた。「同次」という言葉を聞くと、たいていの人には線形の同次微分方程式を想像するのではないだろうか。この従来の意味の「同次」関数(今後古典的な同次とよぶ)は以下のように定義される。

**定義 2.1** (古典的な同次関数). 任意の  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  に対して次式が成立するとき関数  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は  $k \in \mathbb{R}$  次の古典的な同次であるという。

$$V(\varepsilon x_1, \dots, \varepsilon x_n) = \varepsilon^k V(x) \quad (2.1)$$

□

また、古典的な同次ベクトル場とは以下のように定義されたベクトル場のことである。

**定義 2.2** (古典的な同次ベクトル場). 任意の  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  に対して次式が成立するときベクトル場  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  は  $k \in \mathbb{R}$  次の古典的な同次であるという。

$$f_i(\varepsilon x_1, \dots, \varepsilon x_n) = \varepsilon^k f_i(x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

また、あるシステム  $\dot{x} = f(x)$  はベクトル場  $f(x)$  が同次であるとき同次システムという。□

この定義により、線形の常微分方程式系  $\dot{x} = Ax$  は1次の同次システムであることがわかるであろう。

この定義が結局何を述べているかということ、ある  $x$  を  $\varepsilon$  倍しても関数、あるいはベクトル場(システムといってもいいだろう)の性質は変わらないことを意味している。もちろん、 $\varepsilon$  は任意の実数であるから、大域的な性質も局所的な性質も同じと結論づけることができる。

このような古典的な同次関数を扱う際に次の Euler の公式が非常に重要な役割を果たしている。

**定理 2.1 (Euler の公式).** 関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が  $k$  次の古典的な同次であるとき次式が成立する。

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{df(x)}{dx_i} = kf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

□

この Euler の公式をもう少し拡張して以下のような式を考えよう。

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i \frac{df(x)}{dx_i} = kf(x) \quad r_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, n), \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

この式が成立するように拡張された同次関数が、本論文のテーマである拡大付きの同次関数である。以下にまず拡大の定義を述べよう。

**定義 2.3 (拡大).** ある拡大係数  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  ( $r_i > 0, 1 \leq i \leq n$ ) が存在して、任意の  $\varepsilon > 0$  に対し次式が成立するとき、同相写像  $\Delta_\varepsilon^r$  は拡大であるという。

$$\Delta_\varepsilon^r(x) = (\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n) \quad (2.5)$$

ここで  $(x_1, \dots, x_n)$  は適当な  $\mathbb{R}^n$  上の座標である。□

このとき、同次関数とは以下のように定義される関数である。

定義 2.4 (同次関数). 次式が成立するとき関数  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は拡大  $\Delta_\varepsilon^r$  に関して  $k \in \mathbb{R}$  次の同次であるという.

$$V(\Delta_\varepsilon^r(x)) = \varepsilon^k V(x) \quad (2.6)$$

□

ベクトル場, あるいはシステムに対しても同様に定義することが可能であり, 以下のようなになる.

定義 2.5 (同次ベクトル場). 次式が成立するときベクトル場  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  は拡大  $\Delta_\varepsilon^r$  に関して  $k \in \mathbb{R}$  次の同次であるという.

$$f_i(\Delta_\varepsilon^r(x)) = \varepsilon^{k+r_i} f_i(x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

あるシステム  $\dot{x} = f(x)$  はベクトル場  $f(x)$  が同次であるとき同次システムという. □

ここで, 同次ベクトル場の同次次数の定義は古典的なものと異なるため注意しなくてはならない.

これらの定義は一見ただけでは非常に理解しづらいと思われるので例をあげよう.

例 2.1. 以下のような 2 変数関数  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  は拡大  $\Delta_\varepsilon^{(1,2/3)}$  に関して 2 次の同次である.

$$V(x) = x_1^2 + x_1^3 \quad (2.8)$$

証明

$$V(\varepsilon^1 x_1, \varepsilon^{2/3} x_2) = (\varepsilon x_1)^2 + (\varepsilon^{2/3} x_2)^3 = \varepsilon^2 V(x) \quad (2.9)$$

□

このような拡大付きの同次を考えたときには以下の同次ノルムを考えると非常に便利である.

定義 2.6 (同次ノルム). 拡大  $\Delta_\varepsilon^r$  に関して 1 次  $n$  変数同次関数  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$\|x\|_{\{r,p\}} = (|x_1|^{\frac{p}{r_1}} + \cdots + |x_n|^{\frac{p}{r_n}})^{\frac{1}{p}} \quad (2.10)$$

を拡大  $\Delta_\varepsilon^r$  に関する同次  $p$ -ノルムという.  $\square$

このようにして定義された拡大付きの同次関数はもちろん拡張 Euler の公式が成立する.

定理 2.2 (拡張 Euler の公式). 関数  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が同次であるとき次式が成立する.

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i \frac{df(x)}{dx_i} = m f(x) \quad r_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, n), \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

$\square$

拡大付きの同次性に対して, 拡大係数  $r$  に関する以下の命題が成立する [14].

命題 2.1. (Hong:2001) 関数  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は拡大係数  $r = (r_1, \dots, r_n)$  に関して  $k \in \mathbb{R}$  次の同次であると仮定する. このとき,  $V$  は拡大係数  $r = (pr_1, \dots, pr_n)$ ,  $p > 0$  に関して  $pk$  次の同次である.  $\square$

ベクトル場に対しても同様に以下のような命題が成立する.

命題 2.2. ベクトル場  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は拡大係数  $r = (r_1, \dots, r_n)$  に関して  $k \in \mathbb{R}$  次の同次であると仮定する. このとき,  $f$  は拡大係数  $r = (pr_1, \dots, pr_n)$ ,  $p > 0$  に関して  $pk$  次の同次である.  $\square$

証明は命題 2.1 の証明 [14] と同様であるので省略する.

したがって, 拡大係数の値自体には意味はなく, その比のみが重要な情報である. また, 同次次数も変わるため特に重要度の高い情報ではない.

同次関数の微分に関して以下の補題が成立する.

補題 2.1. (Rosier:1992) 関数  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は拡大係数  $r = (r_1, \dots, r_n)$  に関して  $k \in \mathbb{R}$  次の同次であると仮定する. このとき,

$$\forall x = (x_i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall \varepsilon > 0 \quad (2.12)$$



$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon^{r_1}x_1, \dots, \varepsilon^{r_n}x_n) = \varepsilon^{k-r_i} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.13)$$

が成立する。□

このように拡大付きの同次性を述べて来たが、実は拡大付きの同次性は古典的な意味での同次性の座標系を変えただけである。これは以下の命題によって保証できる。

**命題 2.3 (同次関数の等価性).** 関数  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は拡大係数  $r = (r_1, \dots, r_n)$  に関して  $k \in \mathbb{R}$  次の同次であると仮定する。このとき、新しい座標系を  $x_i = \tilde{x}_i^{r_i(\bar{s})}$  と選べば関数

$$\tilde{V}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = V(\tilde{x}_1^{r_1(\bar{s})}, \tilde{x}_2^{r_2(\bar{s})}, \dots, \tilde{x}_n^{r_n(\bar{s})}) \quad (2.14)$$

は古典的な意味での同次関数である。□

*Proof.*  $V$  は同次であるから、

$$V(\varepsilon^{r_1}x_1, \varepsilon^{r_2}x_2, \dots, \varepsilon^{r_n}x_n) = \varepsilon^k V(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.15)$$

が成立する。一方、

$$V(x) = V(\tilde{x}_1^{r_1(\bar{s})}, \tilde{x}_2^{r_2(\bar{s})}, \dots, \tilde{x}_n^{r_n(\bar{s})}) \quad (2.16)$$

であるから結局次式が得られる。

$$\tilde{V}(\varepsilon\tilde{x}_1, \dots, \varepsilon\tilde{x}_n) = V(\varepsilon^{r_1}\tilde{x}_1^{r_1(\bar{s})}, \varepsilon^{r_2}\tilde{x}_2^{r_2(\bar{s})}, \dots, \varepsilon^{r_n}\tilde{x}_n^{r_n(\bar{s})}) \quad (2.17)$$

$$= V(\varepsilon^{r_1}x_1, \varepsilon^{r_2}x_2, \dots, \varepsilon^{r_n}x_n) \quad (2.18)$$

$$= \varepsilon^k V(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.19)$$

$$= \varepsilon^k \tilde{V}(\tilde{x}) \quad (2.20)$$

□

同様にして以下の命題が得られる。

命題 2.4 (同次ベクトル場の等価性). システム

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.21)$$

を考える. ここで, ベクトル場  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は拡大係数  $r = (r_1, \dots, r_n)$  に関して  $k \in \mathbb{R}$  次の同次であると仮定する. このとき, 新しい座標系を  $x_i = \tilde{x}_i^{r_i}$  と選べば  $\tilde{x}$  に対するシステム

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) \quad (2.22)$$

は古典的な意味での同次である. ただし,  $\tilde{f}$  を以下のように定義する.

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \frac{dx}{d\tilde{x}} f(x) \quad (2.23)$$

□

## 2.2. 同次関数の正定性および負定性

制御理論において, 関数の正定性, あるいは負定性を調べることがよくある. 線形制御理論では, 2次関数の判別式を用いて正定性を調べたが, 同次システムではすべて2次関数の判別式に頼ることはできない. そこで, これまで同次システムでは, 以下に示す Young の不等式 [14] を用いて関数の正定性を調べてきた.

補題 2.2 (Young の不等式). (Hong:2001)  $a, b, y > 0$  とする. このとき, 次式が成立する.

$$ya \leq y^{1+b} + a^{1+1/b} \quad (2.24)$$

□

しかし, この Young の不等式もまた非常に限定的にしか用いることができない. そこで, 本節では, 2変数の同次関数に対して, 正定性を判別するための定理を与える.

定義 2.4 で同次関数についての定義を述べたが, 2変数の同次関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  に関しては, 2次関数の判別式のような以下の補題が得られる.

補題 2.3. 拡大  $\Delta_\varepsilon^{(1,q)}$  に関して同次関数

$$f(x, y) = a|x|^\alpha + bx|y|^{\frac{\alpha-1}{q}} \operatorname{sgn} y + c|y|^{\frac{\alpha}{q}} \quad (2.25)$$

を考える. ここで,  $\alpha > 1$  かつ  $a, b, c, q \in \mathbb{R}$  とする. このとき, もし

$$a|c|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} c \cdot \alpha^\alpha > (\alpha-1)^{\alpha-1} |b|^\alpha \quad (2.26)$$

が成立するならば,  $(x, y) = (0, 0)$  を除いて

$$f(x, y) > 0 \quad (a > 0) \quad (2.27)$$

$$f(x, y) < 0 \quad (a < 0) \quad (2.28)$$

が成立する.  $\square$

*Proof.*  $f(x, y)$  の  $x$  による 2 階偏微分は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \alpha(\alpha-1)a|x|^{\alpha-2} \quad (2.29)$$

となり常に同符号である. したがって関数  $f$  は  $x$  に関して  $a > 0$  のとき凸であり,  $a < 0$  のとき凹である. したがって唯一の極値を持ち, それが最小 (凸の場合) または最大 (凹の場合) となる. 以下  $a > 0$  と仮定する. まず  $x$  の極値を求める.  $\partial f / \partial x = 0$  を満たす  $x$  は

$$x = \left( \frac{|b|}{\alpha|a|} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} |y|^{\frac{1}{q}} \operatorname{sgn}(-by) \quad (2.30)$$

となる. この  $x$  を式 (2.25) に代入すると,  $y$  に関する最小値関数  $g(y)$  が定義でき,

$$g(y) = \left\{ \left( \frac{1-\alpha}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \right) \frac{|b|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{|a|^{\frac{1}{\alpha-1}}} + c \right\} |y|^{\frac{\alpha}{q}} \quad (2.31)$$

となる. したがって,  $g$  が正定であるためには,

$$\left( \frac{1-\alpha}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \right) \frac{|b|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{|a|^{\frac{1}{\alpha-1}}} + c > 0 \quad (2.32)$$

であればよい。これを整理すると、

$$a|c|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} c \cdot \alpha^\alpha > (\alpha-1)^{\alpha-1} |b|^\alpha \quad (2.33)$$

であれば、 $g$  は正定。したがって  $f$  も正定である。同様の議論を  $a < 0$  の場合においても行うことにより、補題 2.3 が得られる。□

補題 2.3 および実数域のみを考えたとき  $\beta > 0$  であれば  $x \mapsto x^\beta$  は同相写像であることから、次の定理が成立する。

**定理 2.3.** 拡大  $\Delta_\varepsilon^{(1,\beta q)}$  に関して同次関数

$$f(x, y) = a|x|^{\alpha\beta} + b|x|^\beta \operatorname{sgn} x \cdot |y|^{\frac{\alpha-1}{q}} \operatorname{sgn} y + c|y|^{\frac{\alpha}{q}} \quad (2.34)$$

を考える。ここで、 $\alpha > 1, \beta > 0$  かつ  $a, b, c, q \in \mathbb{R}$  とする。このとき、もし

$$a|c|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} c \cdot \alpha^\alpha > (\alpha-1)^{\alpha-1} |b|^\alpha \quad (2.35)$$

が成立するならば、 $(x, y) = (0, 0)$  を除いて

$$f(x, y) > 0 \quad (a > 0) \quad (2.36)$$

$$f(x, y) < 0 \quad (a < 0) \quad (2.37)$$

が成立する。□

定理 2.3 を用いることにより、Young の不等式 (補題 2.2) より簡単に 2 変数の同次関数の正定性を調べることができる。この結果は、特に、第 3 章および 4 章で Lyapunov 関数の安定性を調べる際に利用する。

また、補題 2.3 において、 $\alpha = 2, q = 1$  とおけば、通常の 2 次関数の正定性、あるいは負定性の条件となる

$$4ac > b^2 \quad (2.38)$$

が得られていることに注意しよう。これから、定理 2.3 は 2 次関数の判別式の拡張といえることができる。

## 2.3. 同次システムに対する同次 Lyapunov 関数

これまでに、同次性の持つ基本的な性質を述べてきたが、同次システムの性質については述べてこなかった。本節では、同次システムの持つ非常に良い性質について述べよう。

同次システムに対して、Rosier は同次 Lyapunov 関数の存在に関して以下の定理を与えた。

**定理 2.4.** (Rosier:1992) 微分方程式系  $\dot{x} = f(x)$  を考える。ここで、 $f$  は連続かつ拡大係数  $r = (r_1, \dots, r_n)$  に関して同次であり、 $f(0) = 0$  であるとする。

このとき、システム  $\dot{x} = f(x)$  が局所弱漸近安定であるならば、 $C^p$  級の  $k$  次の同次 Lyapunov 関数が存在する。ただし、 $k, p$  は  $k \geq p \cdot \max_{1 \leq i \leq n} r_i$  を満たすとする。□

この Rosier による定理は非常に重要である。まず、局所的に漸近安定であるならば、大域的にもこれが維持されるということが明らかになった点が第1点であり、漸近安定な同次システムはかならず同次 Lyapunov 関数を持つということがもう1点である。

すなわち、例えばシミュレーションなどによって原点を含む開集合の境界上を初期値とした時に、すべての解が原点に収束することを保証できれば、大域的にも漸近安定であることが保証できるのである。また、Lyapunov 関数を設計するときに、同次 Lyapunov 関数が存在することがわかっているので、非常に設計しやすいという利点も持つ。

Sepulchre らは同次 Lyapunov 関数の性質を調べ、以下の命題にまとめた [28]。

**命題 2.5.** (Sepulchre and Aeyels:1996) 関数  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  は拡大係数  $r$  に関して  $k$  次の同次関数であるとする。このとき、 $V$  は以下の性質を持つ。

1.  $V$  のレベルセット  $V^s = \{x | V(x) = s \ (s > 0)\}$  は同次である。すなわち、 $V^s = \{V(\Delta_{s^{1/k}}^r(x)) | V(x) = 1\}$  である。
2.  $V^s$  は  $S^{n-1}$  に同相である。

□

なお、命題は他の定理等と重複するものを除いた。

同次 Lyapunov 関数を用いることにより、以下の定理が得られる。

**定理 2.5.** 拡大  $r = (r_1, \dots, r_n)$  に関して同次な  $l$  次の同次システム  $\dot{x} = f(x)$  を考える。ここで、ベクトル場  $f(x)$  は局所的に弱漸近安定であると仮定する。このとき、

1.  $l > 0$  のとき すべての解は任意の初期値から原点を含む任意の開集合に一定時間以内で収束する。
2.  $l = 0$  のとき すべての解は指数安定である。
3.  $l < 0$  のとき すべての解は有限時間整定する。

□

定理 2.5 は 3.7 節の定理 3.11 の特殊な場合であるので、ここでは証明は割愛する。このように、同次性は制御系を設計する、あるいは安定性の解析を行う上で非常に有用な概念である。

## 2.4. 有限時間整定制御

本節では、拡大付きの同次性を用いることで、解析が非常に楽になる代表例として、有限時間整定制御について述べる。

時間情報を用いない線形制御では不可能で、非線形制御では可能なことの一つの非常に有用な例が有限時間整定制御である。非線形の有限時間制御は、Haimo[11] によってはじめに研究がなされたといってほぼ差し支えないと考えられるが、Haimo の研究では 2 次元のシステムに対して特定の条件が満たされるとき「有限時間で整定する」という性質が明らかになったに過ぎず、その議論は高次元に適用することはできない。

その後、Bhat らの研究 [2] により、同次系を構成することにより非常に簡単に有限時間整定性が得られることが明らかになった。これは、議論が非常に簡単であるだけでなく、状態が整定するまでの時間を保証することができる可能性を示唆した。本論文では入力が無限大となるような特異点を持たずに収束時間が保

証可能な制御則として、この Bhat らにより提案された同次性を利用した有限時間整定制御を用いる。

同次システムに対する有限時間制御としてこれまでに得られている結果は次の補題にまとめることができる [2],[13]。

**補題 2.4.** 対象とするシステムとして

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0 \quad (2.39)$$

を考える。このシステム (2.39) が拡大  $\Delta_e^{(r_1, \dots, r_n)}$  に関して  $k$  次の同次かつ、 $l$  次の同次 Lyapunov 関数  $V(x)$  が存在するとき、 $k < 0$  であればこのシステムは有限時間整定し、ある状態  $x$  における整定時間  $T(x)$ 、すなわちある状態  $x$  において状態が原点に整定するまでの時間、は

$$T(x) \leq -\frac{l}{k} \min_{\|e\|_{\{r,p\}}=1} \left( \frac{V(e)^{\frac{k+l}{l}}}{\dot{V}(e)} \right) V(x)^{-\frac{k}{l}} \quad (2.40)$$

と表現できる。□

不等式 (2.40) の右辺は正の実数  $c$  を用いて簡単に

$$T_g(x) = cV(x)^{-\frac{k}{l}} \quad (2.41)$$

のように書ける。ただし、 $c$  は次式を満たすとする。

$$c \geq \frac{l}{k} \min_{\|e\|_{\{r,p\}}=1} \left( \frac{V(e)^{\frac{k+l}{l}}}{\dot{V}(e)} \right) \quad (2.42)$$

このときの関数  $T_g(x)$  を収束時間保証関数と呼び、ある状態  $x_0$  において時間  $T_g(x_0)$  が経過した後にはかならず  $x = 0$  となる。また、 $T_g$  の時間微分に関して以下の補題が成立する。

**補題 2.5.** 対象とするシステムとして

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0 \quad (2.43)$$

を考える. このシステム (2.43) が拡大  $\Delta_\varepsilon^{(r_1, \dots, r_n)}$  に関して  $k (< 0)$  次の同次かつ,  $l$  次の同次 Lyapunov 関数  $V(x)$  が存在するとき,  $x \neq 0$  において

$$\dot{T}_g(x) \leq -1 \quad (2.44)$$

が成立する. ただし,

$$T_g(x) = cV(x)^{-\frac{k}{l}} \quad (2.45)$$

であり,  $c$  は次式を満たす正の定数とする.

$$c \geq \frac{l}{k} \min_{\|e\|_{\{r,p\}}=1} \left( \frac{V(e)^{\frac{k+l}{l}}}{\dot{V}(e)} \right) (> 0) \quad (2.46)$$

□

*Proof.* 以下の性質が成立する. ただし,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  は  $\|e\|_{\{r,2\}} = 1$  を満たす単位同次ベクトルとする.

$$\begin{aligned} V(x)^{-\frac{k}{l}} &= \{\|x\|_{\{r,p\}}^l V(e)\}^{\frac{k+l}{l}} \\ &= \|x\|_{\{r,p\}}^{k+l} V(e)^{\frac{k+l}{l}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

また,  $\dot{V}(x)$  に関して

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \cdot f_i(x) \quad (2.48)$$

となり, 補題 2.1 より,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_i} = \|x\|_{\{r,p\}}^{l-r_i} \frac{\partial V(e)}{\partial e_i} \quad (2.49)$$

が成立するから,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \|x\|_{\{r,p\}}^{l-r_i} \frac{\partial V(e)}{\partial e_i} \cdot \|x\|_{\{r,p\}}^{k+r_i} f_i(e) \\ &= \|x\|_{\{r,p\}}^{k+l} \dot{V}(e) \end{aligned} \quad (2.50)$$



が得られる。したがって、 $T_g$  は  $x \neq 0$  で微分可能であるから、

$$\begin{aligned}
 \dot{T}_g(x) &= -c \frac{k \dot{V}(x)}{l V(x)^{\frac{k+l}{l}}} \\
 &= -c \frac{k \|x\|_{\{r,p\}}^{k+l} \dot{V}(e)}{l \|x\|_{\{r,p\}}^{k+l} V(e)^{\frac{k+l}{l}}} \\
 &= -c \frac{k \dot{V}(e)}{l V(e)^{\frac{k+l}{l}}} \\
 &\leq -c \frac{k}{l} \max_{\|e\|_{\{r,p\}}=1} \left( \frac{\dot{V}(e)}{V(e)^{\frac{k+l}{l}}} \right) \\
 &\leq -1
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

が得られた。 □

このような同次有限時間整定制御器の例を挙げよう。

**例 2.2.** (Bhat and Bernstein:1997[2]) システム

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2 \\
 \dot{y}_2 &= w
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

に対して入力

$$w = -k_1 y_1^{2r-1(\bar{s})} - k_2 y_2^{\frac{2r-1}{r}(\bar{s})} \tag{2.53}$$

$$\frac{1}{2} < r < 1 \tag{2.54}$$

はシステムを有限時間で整定させる

**例 2.3.** (Bhat and Bernstein:1997[3]) システム

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2 \\
 \dot{y}_2 &= w
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

に対して入力

$$w = -y_2^{\alpha(\bar{s})} - \phi_{\alpha}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}(\bar{s})} \quad (2.56)$$

$$\phi_{\alpha} = y_1 + \frac{1}{2-\alpha} y_2^{2-\alpha(\bar{s})}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.57)$$

はシステムを有限時間で整定させる

例で挙げたような制御器は連続であるため、定理 2.4 の仮定を満たし、常に  $C^1$  の同次 Lyapunov 関数が存在する。したがって、補題 2.4 よりこれらの制御器は常に整定時間の保証が可能である。

## 2.5. 高次の同次有限時間整定制御

前節で基本的な 2 次の積分系に対する同次有限時間整定制御を例としてあげたが、高次の積分系に対する同次有限時間整定制御も Hong ら [14],[16] によって提案されている。この高次の同次有限時間整定制御側は、パワードフォームと呼ばれる一般的なシステムに対してシステムティックにおよび Lyapunov 関数を求めることが可能な制御側である。これは以下のような定理にまとめられている。

**定理 2.6.** (Hong:2001) 以下のような  $n$  次の積分系を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^{m_1} \\ \dot{x}_2 &= x_3^{m_2} \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n^{m_{n-1}} \\ \dot{x}_n &= u \end{aligned} \quad (2.58)$$

ここで、 $m_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) は奇数であるとする。

このとき、入力を  $u = u_n$  とすればシステム (2.58) は有限時間で整定する。ただし、 $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は以下のように定義される。

$$u_0 = 0 \quad (2.59)$$

$$u_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) = -l_{i+1} \left[ x_{i+1}^{m_i \beta_i(\bar{s})} - u_i(x_1, x_2, \dots, x_i) \beta_i(\bar{s}) \right]^{\frac{r_{i+k}}{r_{i+1} m_i \beta_i(\bar{s})}} \quad (2.60)$$

ここで,  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は十分大きい正の定数とし,  $r_i, \beta_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) と  $k$  は次式を満たす定数とする.

$$r_1 = 1, \dots, r_i = \frac{r_{i-1} + k}{m_{i-1}}, r_i > -k > 0 (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.61)$$

$$\beta_0 = r_2, (\beta_i m_i + 1) r_{i+1} \geq (\beta_{i-1} m_{i-1} + 1) r_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n-2) \quad (2.62)$$

$$\beta_{n-1} > 0 \quad (2.63)$$

□

これはシステム (2.58) のような一般的なシステムに対する入力であるが, 非常にわかりづらい. もっと簡単なシステムに対して, 定理 2.6 を以下のように書き直すことができる.

系 2.1. 以下のような  $n$  次の積分系を考える.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= u \end{aligned} \quad (2.64)$$

このとき, 入力を  $u = u_n$  とすればシステム (2.69) は有限時間で整定する. ただし,  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は以下のように定義される.

$$u_0 = 0 \quad (2.65)$$

$$u_{i+1}(x) = -l_{i+1} \left( x_{i+1}^{\beta_i(\bar{s})} - u_i(x) \beta_i(\bar{s}) \right)^{\frac{r_{i+1} + k}{r_{i+1} \beta_i(\bar{s})}} \quad (2.66)$$

ここで,  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は十分大きい正の定数とし,  $r_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) と  $k$  は次式を満たす定数とする.

$$r_1 = 1, \dots, r_i = r_{i-1} + k, r_i > -k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.67)$$

$$\beta_0 = 1, \beta_i = \frac{r_i \beta_{i-1} - k}{r_i + k} (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.68)$$

□

系 2.1 では、表現が漸化式になっておりまだ使いにくい。この漸化式を解いて以下の定理を得ることができた。

定理 2.7. 以下のような  $n$  次の積分系を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= u \end{aligned} \tag{2.69}$$

このとき、入力を  $u = u_n$  とすればシステム (2.69) は有限時間で整定する。ただし、 $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は以下のように定義される。

$$u_0 = 0 \tag{2.70}$$

$$u_{i+1}(x) = -l_{i+1} \left( x_{i+1}^{\frac{1-ik}{1+ik}(\bar{s})} - u_i(x)^{\frac{1-ik}{1+ik}(\bar{s})} \right)^{\frac{1+(i+1)k}{1-ik}(\bar{s})} \tag{2.71}$$

ここで、 $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は十分大きい正の定数とし、 $k$  は次式を満たす定数とする。

$$-\frac{1}{n-1} < k < 0 \tag{2.72}$$

□

*Proof.* 系 2.1 において、 $r_i$  の漸化式を解くと、

$$r_i = 1 + (i-1)k \tag{2.73}$$

が得られた。さらに、 $\beta$  の漸化式を解くと次式が得られる。

$$\beta_i = \frac{1-ik}{1+ik} \tag{2.74}$$

したがって、入力  $u_{i+1}(x)$  は次式のように表現できる。

$$u_0 = 0 \tag{2.75}$$

$$u_{i+1}(x) = -l_{i+1} \left( x_{i+1}^{\frac{1-ik}{1+ik}(\bar{s})} - u_i(x)^{\frac{1-ik}{1+ik}(\bar{s})} \right)^{\frac{1+(i+1)k}{1-ik}(\bar{s})} \tag{2.76}$$

□

同次有限時間整定制御において、例えば整定時間を保証するために必要なように、Lyapunov 関数は非常に大きな役割を果たす。定理 2.7 の閉ループシステムにおける Lyapunov 関数も定理 2.7 と同様にして整理した。

定理 2.7 の閉ループシステムに対する Lyapunov 関数  $V_n$  は

$$V_n(x) = \sum_{i=1}^n W_i(x_1, \dots, x_i) \quad (n \geq 1) \quad (2.77)$$

と表現できる。ここで、 $W_i(x_1, \dots, x_i)$  は Lyapunov 関数基と呼ばれる関数であり、以下のように定義される。

$$W_1(x_1) = x_1^2 \quad (2.78)$$

$$W_i(x_1, \dots, x_j) = \frac{1 + (i-1)k}{2} |x_i|^{\frac{2}{1+(i-1)k}} - u_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1})^{\frac{1-(i-1)k}{1+(i-1)k}(\bar{s})} x_i + \frac{1 - (i-1)k}{2} |u_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1})|^{\frac{2}{1+(i-1)k}} \quad (j \geq 2) \quad (2.79)$$

このように構成した Lyapunov 関数  $V_j$  は拡大係数  $(1, 1+k, \dots, 1+(n-1)k)$  に関して同次である。

以下に高次の同次有限時間整定制御器の例と Lyapunov 関数基を示す。

$$u_0 = 0 \quad (2.80)$$

$$u_1 = -l_1 x_1^{(1+k)(\bar{s})} \quad (2.81)$$

$$u_2 = -l_2 \left( x_2^{\frac{1-k}{1+k}(\bar{s})} + l_1^{\frac{1-k}{1+k}} x_1^{(1-k)(\bar{s})} \right)^{\frac{1+2k}{1-k}(\bar{s})} \quad (2.82)$$

$$u_3 = -l_3 \left\{ x_3^{\frac{1-2k}{1+2k}(\bar{s})} + l_2^{\frac{1-2k}{1+2k}} \left( x_2^{\frac{1-k}{1+k}(\bar{s})} + l_1^{\frac{1-k}{1+k}} x_1^{(1-k)(\bar{s})} \right)^{\frac{1-2k}{1-k}(\bar{s})} \right\}^{\frac{1+3k}{1-2k}(\bar{s})} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned}
u_4 = & -l_4 \left[ x_4^{\frac{1-3k}{1+3k}(\bar{s})} + l_3^{\frac{1-3k}{1+3k}} \left\{ x_3^{\frac{1-2k}{1+2k}(\bar{s})} + \right. \right. \\
& l_2^{\frac{1-2k}{1+2k}} \left( x_2^{\frac{1-k}{1+k}(\bar{s})} \right. \\
& \left. \left. \left. + l_1^{\frac{1-k}{1+k}} x_1^{(1-k)(\bar{s})} \right)^{\frac{1-2k}{1-k}(\bar{s})} \right\}^{\frac{1-3k}{1-2k}(\bar{s})} \right]^{\frac{1+4k}{1-3k}(\bar{s})}
\end{aligned} \tag{2.84}$$

⋮

このときの  $W_j$  は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
W_2 = & \frac{1+k}{2} |x_2|^{\frac{2}{1+k}} + l_1^{\frac{1-k}{1+k}} x_1^{(1-k)(\bar{s})} x_2 \\
& + \frac{1-k}{2} l_1^{\frac{2}{1+k}} |x_1|^2
\end{aligned} \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned}
W_3 = & \frac{1+2k}{2} |x_3|^{\frac{2}{1+2k}} \\
& + l_2^{\frac{1-2k}{1+2k}} \left( x_2^{\frac{1-2k}{1+k}(\bar{s})} + l_1^{\frac{1-k}{1+k}(\bar{s})} x_1^{(1-k)(\bar{s})} \right)^{\frac{1-2k}{1-k}(\bar{s})} x_3 \\
& + \frac{1-2k}{2} l_2^{\frac{2}{1+2k}} \left| x_2^{\frac{1-k}{1+k}(\bar{s})} + l_1^{\frac{1-k}{1+k}} x_1^{(1-k)(\bar{s})} \right|^{\frac{2}{1-k}}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned}
W_4 = & \frac{1+3k}{2} |x_4|^{\frac{2}{1+3k}} + l_3^{\frac{1-3k}{1+3k}} \left\{ x_3^{\frac{1-2k}{1+2k}(\bar{s})} \right. \\
& + l_2^{\frac{1-2k}{1+2k}(\bar{s})} \left( x_2^{\frac{1-k}{1+k}(\bar{s})} \right. \\
& \left. \left. \left. + l_1^{\frac{1-k}{1+k}} x_1^{(1-k)(\bar{s})} \right)^{\frac{1-2k}{1-k}(\bar{s})} \right\}^{\frac{1-3k}{1-2k}(\bar{s})} x_4 \\
& + \frac{1-3k}{2} l_3^{\frac{2}{1+3k}} \left| x_3^{\frac{1-2k}{1+2k}(\bar{s})} + l_2^{\frac{1-2k}{1+2k}(\bar{s})} \left( x_2^{\frac{1-k}{1+k}(\bar{s})} \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + l_1^{\frac{1-k}{1+k}} x_1^{(1-k)(\bar{s})} \right)^{\frac{1-2k}{1-k}(\bar{s})} \right|^{\frac{2}{1-2k}}
\end{aligned} \tag{2.87}$$

## 2.6. 2章のまとめ

本章では、同次システムの基本的な概念をまとめた。拡大付きの同次という概念は、結局、座標を変えた古典的な意味での同次性そのものである。しかしながら、そのような性質を明らかにすることにより、線形制御では得ることの出来なかった性質の1つである有限時間整定という性質を得ることができた。これは非常に大きなことであり、また同時に同次システムにおいてLyapunov関数が非常に大きな役割を果たすことも明らかとなった。本章では連続な同次システムに絞って示したが、次章以降では不連続な同次システムについて述べることにする。不連続な同次システムが存在することにより、同次システムは線形システムでは得られなかった性質をさらに持つことになる。

# 第3章 不連続な同次システムの解析 と制御

## 3.1. 不連続な同次システム

前章では、同次性の基本的な概念と連続な同次システムが持つ性質について述べた。同次性を利用することによって、一般的には理論的に保証することが困難な有限時間整定性を簡単に保証できることを示し、有限時間整定制御器の例を示した。しかし、同次システムが線形システムと異なる例は有限時間整定制御が可能になるという点のみであった。

ところが、不連続な同次システムを含んで考えることによって、状況は一変する。特定の条件下で、ある信号の微分値が厳密に求まる厳密微分器 [30][31] や、スライディングモード制御器のロバスト性を有しながら有限時間整定性をも有する高次スライディングモード制御器 [30]、さらに後の章で述べるように非ホロノミックシステムに対する不連続な同次制御器も存在する。このように、不連続な同次システムは線形制御の枠組みの中では議論することができないさまざまな性質を持つ。

本章ではこのような不連続な同次系の性質について解析を行う。前章で述べたように、連続な同次システムにおいては、Lyapunov 関数は非常に大きな意味を持つ。そのため、Lyapunov の定理の逆定理 (定理 2.4) の果たす役割は非常に大きい。もし、不連続な同次システムに対しても同次 Lyapunov 関数が存在するならば、同次システムの解析が容易になる。本章の一番の目的は、不連続な同次システムに対して同次 Lyapunov 関数が存在することを保証する、Lyapunov の逆定理を証明することである。

これまで、不連続なシステムに対しては微分方程式の解の一意性の欠如により



長い間解析が非常に困難であると言われてきたが, Filippov[9]はディファレンシャル・インクルージョンの導入によりこの問題に対する一つの解決法を示した. 近年, 漸近安定なシステムに対しては Clarkeら [7]によって, 安定なシステムに対しては Rosier[25]によって, ディファレンシャル・インクルージョンを導入することにより不連続なシステムに対しても Lyapunov の定理の逆定理が成立することが証明された. ところが, この両者は仮定がまったく異なるため, 比較するのが難しく, 利用しにいいものであった. 本章ではまずこれらの仮定を整理しシンプルな定理にまとめることを行う.

さらに, 連続な同次システムに対してディファレンシャル・インクルージョンの概念を導入することにより, 不連続な同次システムは同次ディファレンシャル・インクルージョンに対応付けられることを示し, 安定な同次ディファレンシャル・インクルージョンは, 任意の正の同次次数を有する, 任意の回数だけ微分可能な, 同次 Lyapunov 関数が存在することを示す.

高次スライディングモード制御は代表的な不連続な同次システムである. この高次スライディングモード制御系を不連続な同次システムの例として, 同次ディファレンシャルインクルージョンの議論を用いることで, 高次スライディングモード系が漸近安定であるならば有限時間で整定することを明らかにする.

本章の後半では, 同次ディファレンシャル・インクルージョンのロバスト性について議論する. まず, 同次 Lyapunov 関数を用いて不連続な同次システムのロバスト性を明らかにする. さらに, 本章の最後にロバスト性の議論を用いて, 厳密微分器の安定性を解析する. さらに, 本論文では, 1階および2階の厳密微分器の設計を行う.

## 3.2. ディファレンシャル・インクルージョン

時不変な常微分方程式

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.1)$$

の右辺が不連続であるとき, 古典的あるいは Carathéodory の意味における解の概念は適用できない. この問題を解決する方法として式 (3.1) を次式のようなディ

ファレンシャル・インクルージョンで置き換える方法が知られている。

$$\dot{x} \in F(x) \quad (3.2)$$

式(3.2)の解とは、ある区間  $I \subset [0, +\infty)$  上で定義され、 $I$  の各コンパクト部分区間上で絶対連続かつ、 $I$  上のほとんどすべての点で式(3.2)が成立する任意の  $x(t)$  のことである。ただし、このような  $x(t)$  は一般的に一意に定まるとは限らないことに注意しなければならない。

次に、式(3.1)と式(3.2)の解について述べる。関数  $x(t)$  が式(3.1)の一般化解であることとは、ディファレンシャル・インクルージョン(3.2)の解であることと定義する。このとき、一般化解の正確な定義を行うために、集合値写像  $F(x)$  と不連続写像  $f(x)$  を関連付ける法則を決定する必要がある。この法則にはさまざまな方法が知られているが、特によく知られているものに Krasovskii のものと Filippov のものがある。本論文では Filippov のものを採用することにする。定義は以下のようなものである。

$$F(x) = K_x f(x) \triangleq \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\mu_n(N)=0} \overline{\text{co}}\{f(B_\varepsilon(x) \setminus N)\} \quad (3.3)$$

ここで、 $\mu_n, \overline{\text{co}}, B_\varepsilon$  は 1.2 節で述べた定義を用いて、それぞれ  $n$  次元 Lebesgue 測度、凸閉包、半径  $\varepsilon$  の  $n$  次元球を表す。式(3.3)は数式ではわかりづらいので簡単に説明する。ある  $x$  における集合値写像  $F(x)$  を求めるとき、 $x$  との距離が  $\varepsilon$  より小さいような  $\hat{x}$  における  $f$  の値、すなわち  $f(\hat{x})$  ( $\|\hat{x} - x\| < \varepsilon$ ) のすべての値を持つ集合  $A(x)$  を作る。その中から、Lebesgue 測度 0 の集合上でしか定義されない値をすべて除いた集合  $B(x)$  を作る。次に、このような集合の凸閉包を取った集合を  $C(x)$  とする。さらに、この凸閉包の中で、すべての  $\varepsilon > 0$  に対して含まれるような値が  $F(x)$  となる。以下の例はこの手順の具体例を示したものである。

例 3.1. 次式のような 1 状態のシステムを考える。

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} x + \text{sgn } x & (x \neq 0) \\ 10 & (x = 0) \end{cases} \quad (3.4)$$

このシステムに対して、Filippov の対応付けによりディファレンシャルインクルージョンに対応付けよう。

まず,  $x \neq 0$  のとき, 十分小さい  $\varepsilon$  に対して

$$A(x) = \{x + y + \operatorname{sgn} x \mid -\varepsilon < y < \varepsilon\} \quad (3.5)$$

が得られる. このとき, Lebesgue 測度 0 の集合上でしか定義されない値は存在しないので  $B(x) = A(x)$  になる. さらに, 集合  $A(x)$  は凸集合であるから集合  $A$  とその境界の和集合が, 集合  $C$  となる. すなわち,

$$C(x) = \{x + y + \operatorname{sgn} x \mid -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon\} \quad (3.6)$$

である.  $C(x)$  の中で, すべての  $\varepsilon > 0$  に対して含まれる値は  $x + \operatorname{sgn} x$  のみであるから,

$$F(x) = x + \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0) \quad (3.7)$$

が得られた. 次に,  $x = 0$  のとき, 十分小さい  $\varepsilon$  に対して

$$A(x) = \{10, y + \operatorname{sgn} y \mid -\varepsilon < y < \varepsilon\} \quad (3.8)$$

が得られる. このとき, 10 は Lebesgue 測度 0 の集合  $x = 0$  でしか定義されないから, これを除いたものが  $B(x)$  となり,

$$B(x) = \{y + \operatorname{sgn} y \mid -\varepsilon < y < \varepsilon\} \quad (3.9)$$

となる. この集合  $B(x)$  は凸ではないので, 凸閉包をとると, 次式のようになる.

$$C(x) = \{y \mid -\varepsilon - 1 \leq y \leq \varepsilon + 1\} \quad (3.10)$$

$C(x)$  の中で, すべての  $\varepsilon$  に対して含まれる値は結局  $[-1, 1]$  となり, 次式が得られた.

$$F(x) = [-1, 1] \quad (x = 0) \quad (3.11)$$

式(3.7),(3.11)より, Filippov の対応付けによるディファレンシャル・インクルージョン

$$\dot{x} \in F(x) = \begin{cases} x + \operatorname{sgn} x & (x \neq 0) \\ [-1, 1] & (x = 0) \end{cases} \quad (3.12)$$

が得られた.

式 (3.3) により式 (3.2) に対応付けられた式 (3.1) の解は Filippov の解と呼ばれる。この対応付けに関して非常に良い性質である次の命題が成立する。

**命題 3.1.** (Bacciotti and Rosier:2001)  $f(x)$  は  $\mathbb{R}^n$  上で局所有界であるとする。このとき集合値写像  $F(x) = K_x f(x)$  は  $x \in \mathbb{R}^n$  の各点で定義され、その値は空ではないコンパクト凸集合であり、 $F(x)$  は  $\mathbb{R}^n$  上で局所有界である。□

通常、取り扱う不連続な微分方程式系の数多くが局所有界であるため、これから議論は  $F$  がコンパクト凸集合である場合に限定する。また、局所有界でない時には相当取り扱いの困難な特異点が存在することが予測される。ここで以下の定理が成立することに注意しよう。

**定理 3.1.** (Bacciotti and Rosier:2001)  $f(x)$  は局所有界で  $F(x) = K_x f(x)$  とする。このとき、 $x$  の集合値写像  $F(x)$  は上半連続である。□

また、次節で Lyapunov の逆定理を述べるが、その際に、 $F$  に対する Lebesgue 可測性を要求しているため、可測性についての命題についても述べておく。

**命題 3.2.** (Bacciotti and Rosier:2001)  $f(x)$  が Lebesgue 可測であるとき、 $F(x)$  も Lebesgue 可測である。□

制御理論で扱う微分方程式系  $\dot{x} = f(x)$  の左辺  $f(x)$  はほとんどの場合、Lebesgue 可測かつ局所有界である。このことに注目すると、命題 3.1,3.2 および定理 3.1 より、Filippov の対応付けによって対応付けられた集合値写像  $F(x) = K_x f(x)$  は  $x \in \mathbb{R}^n$  の各点で定義され、その値は空ではないコンパクト凸集合であり、 $F(x)$  は  $\mathbb{R}^n$  上で局所有界、上半連続かつ Lebesgue 可測になる。このように、非常に弱い仮定から非常に良い性質を導くことが出来る点が Filippov の対応付けの長所である。

このように集合値写像  $F$  を定義するとディファレンシャル・インクルージョンの解の存在性に関して以下の定理が成立する。

**定理 3.2.** (Bacciotti and Rosier:2001) ディファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(x)$  を考える。ここで、集合値写像  $F(x)$  は各  $x \in \mathbb{R}^n$  において空ではない  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト凸部分集合に値をとり、上半連続であると仮定する。

このとき、ある初期時刻  $t_0$  に対し、 $t_0 \in I$  を満たすある閉区間  $I \subset \mathbb{R}$  および  $x(t_0) = x_0$  をみたす絶対連続な解  $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  が少なくとも 1 つ存在する。□

解の存在性に関しても、 $\dot{x} = f(x)$  の左辺  $f(x)$  が Lebesgue 可測かつ局所有界程度の仮定から解が必ず存在することが保証できる。これは不連続なシステムの問題点であった解の存在性に対して解決法を与えるものであり、非常に良い性質である。

特定の場合における合成関数の微分に関して以下の定理が成立する。

**定理 3.3.** 写像  $x = f(y)$  ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) および  $y = g(t)$  ( $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) を考える。  $f$  は絶対連続であり、 $g$  は  $C^1$  級微分同相であるとする。また、ほとんどいたるところで  $dx/dy \in F'(y)$  (ただし  $F'$  は  $\mathbb{R}^n$  上の集合値写像) が成立し、 $dy/dt = g'(t)$  ( $g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) を満たすとする。

このとき、合成関数  $x = f(g(t))$  はディファレンシャル・インクルージョン

$$\frac{dx}{dt} \in F'(g(t))g'(t) \quad (3.13)$$

の解のひとつである。□

*Proof.*  $f(y)$  は絶対連続であるから、測度 0 集合  $W_y$  を除いて微分可能であり、仮定より

$$\frac{dx}{dy} = f'(y) \in F'(y) \quad (3.14)$$

となる。また、 $g$  は微分同相であるという仮定より、 $W_{g_a} = g^{-1}(W_y)$  も  $\mu_1(W_{g_a}) = 0$  である。したがって、集合  $W_{g_a}$  を除いて合成関数が微分可能であり、

$$\frac{dx}{dt} = f'(g(t))g'(t) \in F'(g(t))g'(t) \quad (3.15)$$

となる。よって、 $x = f(g(t))$  はディファレンシャル・インクルージョン (3.13) の解である。□

また、 $K_x$  の計算において有用であるため文献 [23] の定理 1 を部分的に示す。

定理 3.4. (Paden and Sastry:1987) 写像  $K_x$  は以下の性質を持つ.

1.  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  は局所有界であると仮定する. このとき, すべての  $\mu_m(N) = 0$  を満たす  $N \subset \mathbb{R}^m$  に対して

$$K_x f(x) = \text{co}\{\lim f(x_i) | x_i \rightarrow x, x_i \notin N_f \cup N\} \quad (3.16)$$

となるような  $\mu_m(N_f) = 0$  である  $N_f \subset \mathbb{R}^m$  が存在する.

2.  $f, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  は局所有界であると仮定する. このとき,

$$K_x[f(x) + g(x)] \subset K_x f(x) + K_x g(x) \quad (3.17)$$

が成立する.

3.  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $C^1$  級であり  $\text{rank}(\nabla g(x)) = n$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  は局所有界であると仮定する. このとき,

$$K_x[f \circ g](x) = K_x[f](g(x)) \quad (3.18)$$

が成立する.

4.  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{p \times n}$  は連続であり,  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  は局所有界であると仮定する. このとき,

$$K_x[g(x)f(x)] = g(x)K_x f(x) \quad (3.19)$$

が成立する.

□

ここで, デイファレンシャル・インクルージョンにおける解の安定性についてこれまで提案されている2つについて述べる.

定義 3.1. (Rosier:1999) デイファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(t, x)$  がロバスト Lagrange 安定であるとは, 以下の条件を満たす  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$  における部分集合列  $\{G_i\}_{i=0,1,2,\dots}$  および2つの実数の点列  $\{a_i\}_{i=0,1,2,\dots}$ ,  $\{b_i\}_{i=0,1,2,\dots}$  が存在することを言う.

(A1) 各  $i = 0, 1, 2, \dots$  に対して  $0 < a_i \leq b_i < a_{i+1}$  および,  $i \rightarrow +\infty$  のとき  $a_i \rightarrow +\infty$ .

(A2) 各  $i = 0, 1, 2$  に対して  $\mathbb{R}^+ \times \{x \mid \|x\| < a_i\} \subset G_i \subset \mathbb{R}^+ \times \{x \mid \|x\| < b_i\}$ .

(A3) 初期値  $(t_0, x_0) \in G_i$  であるとき, すべての解  $x(t)$  は  $t \geq t_0$  において  $(t, x(t)) \in G_i$  を満たす.

□

**定義 3.2.** (Clarke:1998) デイファレンシャル・インクルージョン (3.2) が強漸近安定であるとは, 以下の条件を満たすことを言う.

(B1) 一様収束性: 任意の  $r > 0, R > 0$  に対して,  $|x(0)| \leq R$  であるような式 (3.2) の解  $x(t)$  のすべてに対して

$$|x(t)| \leq r \quad \forall t \geq T \quad (3.20)$$

となるような  $T = T(r, R)$  が存在する.

(B2) 一様有界性: 初期値  $|x(0)| \leq R$  であるような式 (3.2) の解  $x(t)$  のすべてに対して

$$|x(t)| \leq m(R) \quad (3.21)$$

となるような連続で放射状に非有界な単調非減少関数  $m : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  が存在する.

(B3) Lyapunov 安定性:

$$\lim_{R \downarrow 0} m(R) = 0 \quad (3.22)$$

□

また, 本論文では, 強漸近安定から一様収束性を除いたもの, すなわち条件 (B2) および (B3) を満たすデイファレンシャル・インクルージョンを強安定であ

ると定義し、条件 (B2) のみを満たすディファレンシャル・インクルージョンを弱安定、条件 (B1) および (B2) を満たすものを弱漸近安定であると定義する。特に、条件 (B1) および (B2) が  $R < \bar{R}$  ( $\bar{R} > 0$ ) となる場合にのみ成立する場合を局所的であるという。本論文では特に区別する必要のあるとき、局所的でないものを大域的と呼ぶ。

このように定義された、ロバスト Lagrange 安定と強安定は異なる定義のように思えるが、時不変な場合には次の命題が成立する。

**命題 3.3.** 時不変なディファレンシャル・インクルージョン

$$\dot{x} \in F(x) \quad (3.23)$$

を考える。このとき、強安定であるならばロバスト Lagrange 安定である。□

*Proof.* 仮定より、 $x(0) \leq R_i$  であるとき、すべての解は  $x(t) \leq m(R_i)$  であり、 $x(0) \leq R_i$  であるようなすべての解  $x(t)$  の集合  $G_i$  を  $G_i = \{x(t) | x(0) \leq R_i, t > 0\}$  で定義すると、ディファレンシャル・インクルージョンの時不変性および解の絶対連続性より  $x(0) \in G_i$  であるとき、任意の  $t > 0$  において  $x(t) \in G_i$  となる。また、明らかに

$$\{x |||x|| < R_i\} \subset G_i \subset \{x |||x|| < m(R_i)\} \quad (3.24)$$

である。さらに、 $m(R_i)$  は単調非減少かつ放射状に非有界であるから、 $m(R_i) < m(R_{i+1})$  を満たす  $R_{i+1}$  は必ず存在する。したがって、 $a_i = R_i, b_i = m(R_i)$  とすれば、

$$a_i \leq b_i < a_{i+1} \quad (3.25)$$

となる。したがって、時不変なディファレンシャル・インクルージョンにおいては強安定であればロバスト Lagrange 安定である。□

ここまでに、ディファレンシャル・インクルージョンについて述べてきたわけだが、不連続なシステムに対してこれで説明ができるかという点、そうではない場合も存在することに注意しなければならない。それは、非ホロノミックシステムに対して不連続制御器を構成した際に問題となるのだが、この問題を解決する効果的な方法はいまだ提案されていない。



### 3.3. Lyapunov の定理の逆定理

第2章で、同次システムにおいては、Lyapunov 関数が非常に大きな役割を果たすことを述べた。本節では、ディファレンシャル・インクルージョンを考える際における Lyapunov 関数について調べる。

ディファレンシャル・インクルージョンに対する Lyapunov の定理の逆定理として、これまでに強 Lyapunov 関数に関しては Clarke ら [7] のものが、弱 Lyapunov 関数に関しては Rosier [25] のものが知られている。ところが、これらは仮定がかなり異なるため利用しにくい。そこで、本章では時不変な場合においてはこれらの定理を簡単にまとめ、利便性を高めることを行う。

まず、強 Lyapunov 関数および弱 Lyapunov 関数の定義を述べよう。

**定義 3.3.** 実関数  $V(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は以下の条件を満たすとき強 Lyapunov 関数と呼ぶ。

$$(L1) \quad V(t, x) > 0 \text{ かつ } V(t, 0) = 0.$$

(L2) 部分レベルセット

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid V(t, x) \leq a\} \quad (3.26)$$

は各  $a \geq 0, t \geq 0$  に対して有界である。

(L3)  $W(x) > 0$  が存在し、

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \max_{v \in F(t, x)} \langle \nabla_x V(t, x), v \rangle \leq -W(x). \quad (3.27)$$

□

**定義 3.4.** 実関数  $V(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は (L1), (L2) および以下の条件を満たすとき弱 Lyapunov 関数と呼ぶ。

(L3')

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \max_{v \in F(t, x)} \langle \nabla_x V(t, x), v \rangle \leq 0 \quad (3.28)$$

□

Clarke らの Lyapunov の逆定理は以下のようなものである。

**定理 3.5 (Clarke らの Lyapunov の逆定理 [7]).** デイファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(x)$  を考える。ここで、集合値写像  $F(x)$  は各  $x \in \mathbb{R}^n$  において空ではない  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト凸部分集合に値を取り、上半連続であると仮定する。このとき、デイファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(x)$  が強漸近安定であれば  $C^\infty$  級の滑らかな強 Lyapunov 関数が存在する。□

また、Rosier の Lyapunov の逆定理は以下のようなものである。

**定理 3.6 (Rosier の Lyapunov の逆定理 [25]).** デイファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(t, x)$  を考える。集合値写像  $F(t, x)$  に対して、以下の条件をみたす  $\mu_1(N_0) = 0$  である集合  $N_0 \in \mathbb{R}^+$  が存在すると仮定する。

1. 各点  $(t, x) \in (\mathbb{R}^+ \setminus N_0) \times \mathbb{R}^n$  において  $F(t, x)$  は空ではない  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト凸部分集合である。
2. 任意の  $R > 0$  に対して

$$(t \in [0, R] \setminus N_0 \text{ かつ } \|x\| \leq R) \Rightarrow F(t, x) \subset B_M(0) \quad (3.29)$$

であるような  $M > 0$  が存在する。

3.  $(t, x) \in \{(\mathbb{R}^+ \setminus N_0) \times \mathbb{R}^n\}$  において集合値写像  $F$  は上半連続である。

このとき、デイファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(t, x)$  がロバスト Lagrange 安定であれば  $C^\infty$  級の弱 Lyapunov 関数が存在する。□

ここで、対象を時不変なデイファレンシャル・インクルージョンに限定すると以下の補題が成立する。

**補題 3.1.** 集合値写像  $F(x)$  は各  $x \in \mathbb{R}^n$  において空ではない  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト集合に値を取り、上半連続であると仮定する。このとき、 $F$  は局所有界である。□

*Proof.* 任意に与えたコンパクト集合  $K$  の各点  $x$  について  $F(x) \subset B_{M(x)}(0)$  となる  $M(x) > 0$  を選ぶ。集合値写像  $F(x)$  は上半連続であるから、 $x$  の近傍  $N(x)$

が存在し,  $\tilde{x} \in N(x)$  であるならば  $F(\tilde{x}) \subset B_{M(x)+1}$  が成立する.  $K$  の開被覆  $K \subset \cup_{x \in K} N(x)$  を考えると,  $K$  はコンパクトだから有限部分集合  $K_1 \subset K$  を用いて有限開被覆  $K \subset \cup_{x \in K_1} N(x)$  を構成できる. すると  $M = \max_{x \in K_1} M(x) + 1$  とおくと任意の  $x \in K$  について  $F(x) \subset B_M(0)$  が成立する. したがって,  $F$  は局所有界である.  $\square$

よって, Rosier の定理は次のように書き直すことができる.

**定理 3.7 (時不変な場合の Rosier の Lyapunov の逆定理).** デイファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(x)$  を考える. ここで, 集合値写像  $F(x)$  は各  $x \in \mathbb{R}^n$  において空ではない  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト凸部分集合に値を取り, 上半連続であると仮定する. このとき, デイファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(x)$  がロバスト Lagrange 安定であるとき,  $C^\infty$  級の弱 Lyapunov 関数が存在する.  $\square$

*Proof.* 時不変であるから,  $F(t, x) = F(x)$ . したがって, 任意の測度 0 集合  $N$  に対して  $F(t, x) \in (\mathbb{R}^+ \setminus N) \times \mathbb{R}^n$  は空でないコンパクト凸部分集合であり, 上半連続. また, 補題 3.1 より, 仮定のもとで  $F$  は局所有界である. よって, 定理 3.6 の条件を満たすので  $C^\infty$  級の弱 Lyapunov 関数が存在する.  $\square$

ここで, 時不変なシステムにおいては 2 章の命題より強安定であればロバスト Lagrange 安定であるため, 結局時不変なデイファレンシャル・インクルージョンに対する Lyapunov の逆定理は次のようにまとめることができる.

**定理 3.8.** デイファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(x)$  を考える. ここで, 集合値写像  $F(x)$  は各  $x \in \mathbb{R}^n$  において空ではない  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト凸部分集合に値を取り, 上半連続であると仮定する. このとき, デイファレンシャル・インクルージョンが強安定であれば弱 Lyapunov 関数が, 強漸近安定であれば強 Lyapunov 関数が存在する.  $\square$

このようにデイファレンシャル・インクルージョンに対しても Lyapunov の定理の逆定理が成立することが確認できた. 制御理論において Lyapunov の定理を用いた非常に重要な定理として LaSalle の定理が知られている [39]. この LaSalle の定理は以下のようにデイファレンシャル・インクルージョンに対しても成立する.

**定理 3.9.** ディファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(x)$  を考える。ここで、集合値写像  $F(x)$  は各  $x \in \mathbb{R}^n$  において空ではない  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト凸部分集合に値を取り、上半連続であると仮定する。

$\Omega \subset D$  はコンパクト集合であり、任意のディファレンシャル・インクルージョンの解  $x(t)$  に対して、 $x(0) \in \Omega$  であるとき  $x(t) \in \Omega \quad \forall t \geq 0$  が成立すると仮定する。

関数  $V: D \rightarrow \mathbb{R}^+$  は連続微分可能な関数であり、任意の  $x \in \Omega$  において  $\dot{V}(x) \leq 0$  が成立する弱 Lyapunov 関数とし、集合  $E \subset \Omega$  を

$$E = \{x \mid \dot{V}(x) = 0, x \in \Omega\} \quad (3.30)$$

と定義する。

さらに、 $M$  を  $E$  の最大不変集合、すなわち  $x(0) \in M \subset E$  であるとき  $x(t) \in M \quad \forall t \geq 0$  が成立する集合と定義する。

このとき、すべての解  $x(t) \in \Omega$  は  $t \rightarrow \infty$  のとき  $M$  上に収束する。

### 3.4. ディファレンシャル・インクルージョンの平衡点と解の一意性

これまでにディファレンシャル・インクルージョンの安定性について述べてきたが、平衡点の議論はしなかった。本章ではディファレンシャル・インクルージョンの平衡点について述べる。平衡点の定義は以下のようなものである。

**定義 3.5.** ディファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(x)$  を考える。このとき、ディファレンシャル・インクルージョンの平衡点とは  $0 \in F(x)$  となる  $x$  のことを言う。□

このように定義した平衡点に対し、以下の命題が成立する [6]。

**命題 3.4.** (Clarke:1998) ディファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(x)$  を考える。このとき、任意の  $t > 0$  に対して  $x(t) = x_0$  となる解が存在する必要十分条件は  $0 \in F(x_0)$  である。□

したがって、ディファレンシャル・インクルージョンが強安定であるための必要条件として原点が  $F(0)$  に含まれることが要求されることがわかる。

また、一般的にディファレンシャル・インクルージョンで定義されるシステムにおいて、解は一意的に定まるとは限らない。しかし、安定なシステムにおいて初期値が原点である場合には、以下の定理より絶対連続な解は一意的に定まる。

**命題 3.5.** ディファレンシャル・インクルージョン

$$\dot{x} \in F(x) \quad (3.31)$$

を考える。ここで、集合値写像  $F(x)$  は各  $x \in \mathbb{R}^n$  において空ではない  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト凸部分集合に値を取り、上半連続かつ、ディファレンシャル・インクルージョンは強安定であると仮定する。このとき、初期値  $x(0) = 0$  に対するディファレンシャルインクルージョンの絶対連続な唯一の解  $x(t) = 0 (t \geq 0)$  が必ず存在する。□

証明は定義より容易に可能なため割愛するが、Clarke の定義 (B2) において関数  $m$  に  $m$  の定義域に  $0$  は含まれていないため、明記した。命題より、 $F(0) = \{0\}$  であるとは限らないにもかかわらず、存在する絶対連続な解は  $x(t) = 0$  のみであるということを認識しておくことは重要であろう。さらに、明らかにつぎの系が成立する。

**系 3.1.** ディファレンシャル・インクルージョン

$$\dot{x} \in F(x) \quad (3.32)$$

を考える。ここで、集合値写像  $F(x)$  は各  $x \in \mathbb{R}^n$  において空ではない  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト凸部分集合に値を取り、上半連続かつ、ディファレンシャル・インクルージョンは強漸近安定であると仮定する。このとき、ある絶対連続な解  $x(t)$  が時刻  $t_1$  で  $x = 0$  となると、 $x(t) = 0 (t \geq t_1)$  が成立する。□

### 3.5. 同次システムと同次ディファレンシャル・インクルージョン

本節では、不連続な同次システムに対する Lyapunov 関数を検討する。ここで、同次であるディファレンシャル・インクルージョンを同次ディファレンシャル・インクルージョンとして提案する。

本論文では、不連続な同次システムに対して解析を行うために同次ディファレンシャル・インクルージョンを以下のように定義する。

**定義 3.6** (同次ディファレンシャル・インクルージョン). 次式が成立するとき集合値写像  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow U$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$  は拡大  $\Delta_\varepsilon^r$  に関して  $k \in \mathbb{R}$  次の同次であるという。

$$F_i(\Delta_\varepsilon^r(x)) = \varepsilon^{k+r_i} F_i(x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.33)$$

ディファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(x)$  の右辺が同次であるものを同次ディファレンシャル・インクルージョンと呼ぶ。□

この同次ディファレンシャル・インクルージョンの定義は、拡大付きの同次性の概念を集合値写像に適用できるように拡張したものであるが、同時に集合値関数のクラスに対して大きな制限を与えている。しかし、Filippov の方法で対応付けるとき、不連続な同次システムは同次ディファレンシャル・インクルージョンに対応付けられることが以下の命題により保証されるため、不連続な同次システムの解析の際に不都合は生じない。

**命題 3.6.** 微分方程式系

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.34)$$

を考える。ここで  $f$  は以下の条件を満たすとする。

1.  $f$  は Lebesgue 可測かつ局所有界。
2.  $f$  は拡大係数  $(r_1, \dots, r_n)$  に関して同次。

このとき、集合値写像

$$F(x) = K_x f(x) \triangleq \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\mu_n(N)=0} \overline{\text{co}}\{f(B_\varepsilon(x) \setminus N)\} \quad (3.35)$$

は同次である。□

*Proof.* ベクトル場  $f$  は同次であることおよび定理 3.4 より

$$\begin{aligned} F_i(\Delta_\varepsilon^r(x)) &= K_x f_i(\Delta_\varepsilon^r(x)) = K_x[\varepsilon^{r_i+k} f_i(x)] \\ &= \varepsilon^{r_i+k} K_x f_i(x) = \varepsilon^{r_i+k} F_i(x) \end{aligned} \quad (3.36)$$

□

### 3.6. 同次ディファレンシャル・インクルージョンにおける Lyapunov の定理の逆定理

本章では、前章で述べた同次ディファレンシャル・インクルージョンに対する Lyapunov の定理の逆定理を考える。本章の目的は以下の定理を証明することである。

**定理 3.10.** 同次ディファレンシャル・インクルージョン

$$\dot{x} \in F(x) \quad (3.37)$$

を考える。ここで  $F$  は以下の条件を満たす  $\mathbb{R}^n$  から  $\mathbb{R}^n$  の部分空間への集合値写像とし、局所的に以下の条件を満たすとする。

(C1)  $F$  はコンパクト凸部分集合に値をとり上半連続。

(C2)  $F$  は拡大係数  $(r_1, \dots, r_n)$  に関して同次。

このとき、ディファレンシャル・インクルージョンが弱安定であるならば、任意の正の同次次数を持ち任意の回数だけ微分可能な同次弱 Lyapunov 関数が大域的に存在し、ディファレンシャル・インクルージョンが弱漸近安定であるならば任意の正の同次次数を持ち任意の回数だけ微分可能な同次強 Lyapunov 関数が大域的に存在する。□

すなわち、弱漸近安定でありさえすれば任意の同次次数である滑らかな同次強 Lyapunov 関数が存在することを示す定理である。

この定理を証明するために以下の2つの命題を用意する。

**命題 3.7.** 条件 (C1) および (C2) を満たす集合値写像  $F$  を有する同次ディファレンシャル・インクルージョン

$$\dot{x} \in F(x) \quad (3.38)$$

を考える。

このとき、ディファレンシャル・インクルージョン (3.38) が局所的に弱安定であるならば、大域的に強安定である。さらに、局所的に弱漸近安定であるならば大域的に強漸近安定である。□

*Proof.* 同次ディファレンシャル・インクルージョン (3.38) を考える。仮定より式 (3.38) に対する解は必ず存在するので、 $x(t)$  を  $[0, t_1]$  で定義された初期値  $x_0$  に対する解の1つとする。このとき、ある共通の  $\varepsilon$  を用いて、 $\tilde{x}_i(t) = \varepsilon^{r_i} x_i(\varepsilon^k t)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) である新たな変数  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  を考えると、 $\tilde{x}$  もディファレンシャル・インクルージョン (3.38) の解である。これは、定理 3.3 を用いて  $1 \leq i \leq n$  となるすべての  $i$  に対しほとんどいたるところで

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_i(t) &= \varepsilon^{r_i+k} \dot{x}_i(\varepsilon^k t) \\ &\in \varepsilon^{r_i+k} F_i(x(\varepsilon^k t)) \\ &= F_i(\tilde{x}(t)) \end{aligned} \quad (3.39)$$

が成立するため、結局

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1(t) &\in F_1(\tilde{x}(t)) \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_n(t) &\in F_n(\tilde{x}(t)) \end{aligned} \quad (3.40)$$

となることより明らかである。ここで、同次ディファレンシャル・インクルージョンの定義より式 (3.39) は任意の  $\varepsilon$  に対して成立するため、仮定より  $\varepsilon$  を十分小



さく選べば  $\tilde{x}(t)$  は弱安定である。したがって、 $\tilde{x}(t)$  の解の定義域を  $[0, +\infty)$  に拡張することができ、常に  $\|\tilde{x}(t)\|_{\{r,2\}} < M(\tilde{x}(0))$  となる  $M(\tilde{x}(0))$  が存在する。また、そのような  $\tilde{x}(0)$  を始点とする  $[0, \infty)$  で定義された任意の解  $\tilde{x}(t)$  に対し、 $y_i(t) = \varepsilon^{r_i} \tilde{x}_i(\varepsilon^{k_i} t)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) である新たな変数  $y = (y_1, \dots, y_n)$  もディファレンシャル・インクルージョン (3.38) の解であり、 $\varepsilon$  を十分大きくとることにより、 $y(0) = x_0$  とすることができる。したがって、 $x_0$  を始点とするすべての解  $x(t)$  は  $[0, \infty)$  で定義される。

このとき、

$$m(r) = \sup_{\|x_0\|_{\{r,2\}} \leq r} M(x_0) \quad (3.41)$$

と定義すれば、 $\|x(t)\|_{\{r,2\}} = \varepsilon \|\tilde{x}(\varepsilon^{k_i} t)\|_{\{r,2\}}$  であるから、明らかに  $M(x(0)) = \varepsilon M(\tilde{x}(0))$ 。よって、

$$\sup_{\|x_0\|_{\{r,2\}} \leq r} M(x_0) = r \sup_{\|\tilde{x}(0)\|_{\{r,2\}} \leq 1} M(\tilde{x}(0)) \quad (3.42)$$

となるから、 $m(r)$  は放射状に非有界な単調非減少関数となり、任意の  $x(t) \in \{x \mid \|x(0)\|_{\{r,2\}} \leq R\}$  において

$$\|x(t)\|_{\{r,2\}} \leq m(R) \quad (3.43)$$

であり、

$$\lim_{R \downarrow 0} m(R) = 0 \quad (3.44)$$

となる。したがって、 $\dot{x} \in F(x)$  は強安定である。

さらに、同様の議論により、局所的に条件 (B1) が満たされれば大域的に (B1) は満たされるので、ディファレンシャル・インクルージョン (3.38) が局所的に弱漸近安定であれば大域的に強漸近安定である。□

さらに、 $C^\infty$  級の Lyapunov 関数が存在するとき、次の命題が成立する。

**命題 3.8.** 同次ディファレンシャル・インクルージョンに対し、 $C^\infty$  級の Lyapunov 関数が存在するとき、任意の正の同次次数を持ち任意の回数だけ微分可能な同次 Lyapunov 関数が存在する。□

*Proof.* 以下のように定義される関数  $\bar{V}$  を考えよう.

$$\bar{V} \triangleq \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{k+1}} (a \circ V)(t^{r_1} x_1, \dots, t^{r_n} x_n) dt & (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (3.45)$$

ここで,  $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C^\infty$  級関数で

$$a(x) = \begin{cases} 0 & (x \in (-\infty, 1]) \\ 1 & (x \in [2, +\infty)) \end{cases} \quad \frac{da(x)}{dx} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (3.46)$$

を満たす関数であり,  $k \in \mathbb{N}$  であるとする.

このとき, 文献 [24] より,  $\bar{V}$  は以下の条件を満たす.

1.  $\sup_{v \in F(x)} \langle \nabla \bar{V}, v \rangle < -W(x)$
2.  $\bar{V}(s^{r_1} x_1, \dots, s^{r_n} x_n) = s^k \bar{V}(x_1, \dots, x_n)$

ただし,  $W(x) > 0$ . ここで, 補題 2.1 より,

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \bar{V}(s^{r_1} x_1, \dots, s^{r_n} x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \quad (3.47)$$

$$s^{k - \alpha_1 r_1 - \dots - \alpha_n r_n} \bar{V}(x_1, \dots, x_n) \quad (3.48)$$

であるので,  $0 \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq p$  とすると,  $k > p \cdot \max\{r_i | 1 \leq i \leq n\}$  であるとき  $\bar{V}$  は微分可能である. ここで, 命題 2.1 より, 任意の  $q \in \mathbb{R}^+$  とするとき拡大係数  $qr$  に対しても同次であるから,  $p$  は任意の値をとることができる. したがって,  $\bar{V}$  は任意の正の同次次数を持ち任意の回数だけ微分することができる.  $\square$

これらの命題により, 定理 3.10 の証明が以下のように得られる.

(定理 3.10 の証明) 命題 3.7 より, 局所強安定であれば, 大域的に強安定であり, 局所強漸近安定であれば大域的に強漸近安定である. したがって, 定理 3.8 より,  $C^\infty$  級の Lyapunov 関数が存在する. このとき, 命題 3.8 より, 同次ディファレンシャル・インクルージョンに対して任意の回数だけ微分できる同次 Lyapunov 関数が存在することが証明できた.

この定理より, もとの不連続な微分方程式系に関して以下の系も成立する.

### 系 3.2. 微分方程式系

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.49)$$

を考える。ここで  $f$  は以下の条件を満たすとする。

(D1)  $f$  は Lebesgue 可測かつ局所有界。

(D2)  $f \in \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{\text{co}}\{f(B_\epsilon(x) \setminus N)\}$

(D3)  $f$  は拡大係数  $(r_1, \dots, r_n)$  に関して同次。

(D4) 常微分方程式系の Filippov の解は有界 (すなわち Lagrange 安定)。

このとき任意の回数だけ微分可能な同次弱 Lyapunov 関数が存在する。また、さらに

(D5)  $t \rightarrow \infty$  のときすべての Filippov の解  $x(t)$  は  $x(t) \rightarrow 0$  をみたす。

を満たすとき任意の正の同次次数を持ち任意の回数だけ微分可能な同次強 Lyapunov 関数が存在する。□

### 3.7. 同次 Lyapunov 関数の性質

前章までに述べたように、不連続であっても同次システムが弱安定であれば Lyapunov 関数が存在する。一方、連続なシステムでは定理 2.5 のように、Lyapunov 関数の存在性からシステムの収束性能を判別することが可能である。本章では同次 Lyapunov 関数を利用して同次ディファレンシャルインクルージョンの収束性を検討する。

同次システムが弱漸近安定であるとき、収束性に関して次の定理が成立する。

**定理 3.11.** 拡大  $r = (r_1, \dots, r_n)$  に関して同次な  $l$  次の同次ディファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(x)$  を考える。ここで、集合値写像  $F(x)$  は各  $x \in \mathbb{R}^n$  において空ではない  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト凸部分集合に値を取り、上半連続であると仮定し、ディファレンシャル・インクルージョンは局所的に弱漸近安定であると仮定する。このとき、

1.  $l > 0$  のとき すべての解は任意の初期値から原点を含む任意の開集合に一定時間以内で収束する.
2.  $l = 0$  のとき すべての解は指数安定である.
3.  $l < 0$  のとき すべての解は有限時間整定する.

□

*Proof.* 仮定より, 大域的に  $C^1$  級の  $k > 0$  次の同次 Lyapunov 関数  $V$  が存在する. したがって,

$$V(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^k V(x_1, \dots, x_n) \quad (3.50)$$

が常に成立する. ここで, 同次ノルムと  $\|w\|_{\{r,2\}} = 1$  であるような同次方向ベクトル  $w$  を用いて任意の  $x$  は  $x = \Delta_{\|x\|_{\{r,2\}}}^r(w)$  と書くことができる. したがって, 任意の  $x$  に対して

$$V(x) \geq \|x\|_{\{r,2\}}^k \min_{w \in \{y \mid \|y\|_{\{r,2\}} = 1\}} V(w) \quad (3.51)$$

$$\|x\|_{\{r,2\}}^k \geq \max_{w \in \{y \mid \|y\|_{\{r,2\}} = 1\}} \frac{V(x)}{V(w)} \quad (3.52)$$

となる.

ここで, 補題 2.1 および同次ディファレンシャル・インクルージョンの定義より,

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial V(\Delta_\varepsilon^r(x))}{\partial x_i} \cdot f_i(\Delta_\varepsilon^r(x)) \mid f_i \in F_i \right\} \\ &= \left\{ \varepsilon^{k+l} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x) \mid f_i \in F_i \right\} \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned} \quad (3.53)$$

であるから,

$$\begin{aligned} & \{ \langle \nabla V(\Delta_\varepsilon^r(x)), f(\Delta_\varepsilon^r(x)) \rangle \mid f \in F \} \\ &= \{ \varepsilon^{k+l} \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \mid f \in F \} \end{aligned} \quad (3.54)$$

が成立する. ここで,  $x(t)$  をある 1 つのディファレンシャル・インクルージョンの解としたとき, Lyapunov 関数の時間微分はほとんどいたるところで

$$\frac{dV}{dt} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \quad (3.55)$$

と書ける。ただし、 $f(x)$  は解  $x(t)$  の時間微分  $dx/dt$  である。もちろん、 $f \in F$  であるから、任意の解に対してほとんどいたるところで

$$\frac{dV}{dt} \in \{ \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \mid f \in F \} \quad (3.56)$$

が成立する。したがって、次式が成立する。

$$\frac{dV}{dt} \leq \max_{f \in F} \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{f \in F} \max_{w \in \{y \mid \|y\|_{\{r,2\}}=1\}} \langle \nabla V(w), f(w) \rangle \cdot \|x\|_{\{r,2\}}^{k+l} \\ &\leq \max_{f \in F} \max_{w \in \{y \mid \|y\|_{\{r,2\}}=1\}} \frac{\langle \nabla V(w), f(w) \rangle}{V(w)^{\frac{k+l}{k}}} \cdot V(x)^{\frac{k+l}{k}} \\ &\leq -c_1 V(x)^{\frac{k+l}{k}} \end{aligned} \quad (3.58)$$

ただし、

$$c_1 = - \max_{f \in F} \max_{w \in \{y \mid \|y\|_{\{r,2\}}=1\}} \frac{\langle \nabla V(w), f(w) \rangle}{V(w)^{\frac{k+l}{k}}} \quad (3.59)$$

とする。また、同様の議論により

$$\frac{dV}{dt} \geq -c_2 V(x)^{\frac{k+l}{k}} \quad (3.60)$$

が成立する。ただし、

$$c_2 = - \min_{f \in F} \min_{w \in \{y \mid \|y\|_{\{r,2\}}=1\}} \frac{\langle \nabla V(w), f(w) \rangle}{V(w)^{\frac{k+l}{k}}} \quad (3.61)$$

とする。したがって、

$$-c_2 V^{\frac{k+l}{k}} \leq \frac{dV}{dt} \leq -c_1 V^{\frac{k+l}{k}} \quad (3.62)$$

が成立する。これから、3つの場合に分けて式(3.62)の両辺を時間  $t$  で Lebesgue 積分する。

### 1. $l > 0$ の場合

時刻  $t = 0$  における  $V(x)$  の値を  $V_0$  と書くと式 (3.62) を積分することにより次式が得られる.

$$V(t) \leq \frac{1}{\left(\frac{l}{k}c_1 t + V_0^{-\frac{l}{k}}\right)^{\frac{k}{l}}} \quad (3.63)$$

このとき, 任意の  $V_0$  に対して,

$$V(t) \leq \frac{1}{\left(\frac{l}{k}c_1 t\right)^{\frac{k}{l}}} \quad (3.64)$$

が成立するから,  $k, l > 0$  より任意の初期値に対して  $V(t) < V_1$  ( $t \geq t_1$ ) となるような  $V_1, t_1$  が存在する.

ここで, 原点を含む開集合を  $M$  とすると, 命題 2.5 より, 同次 Lyapunov 関数  $V$  のレベルセットは単位球面  $S^{n-1}$  に同相であること, および,  $V$  の同次性より,  $x \in \{x | V(x) = \delta\}$  を満たす任意の  $x$  に対し  $x \in M$  が成立するような  $\delta > 0$  が存在する. このような  $x$  の集合を  $\tilde{M}$  と書き,  $\tilde{M}$  は  $S^{n-1}$  に同相である.

このとき,  $0 < V_1 < \delta$  である任意の  $V_1$  に対し,  $V_1 < V(x)$  ( $x \in \tilde{M}$ ) が成立し, しかも Lyapunov 関数のレベルセットが  $S^{n-1}$  に同相であることと  $V$  の同次性より,  $x$  が  $V(x) < V_1$  を満たすとき必ず  $x \in M$  となる. したがって, 任意の解は任意の初期値から原点を含む任意の開集合に一定時間内で収束する.

### 2. $l = 0$ の場合

式 (3.62) を積分した結果

$$V_0 e^{-c_2 t} \leq V(t) \leq V_0 e^{-c_1 t} \quad (3.65)$$

より明らかに指数安定である.

### 3. $l < 0$ の場合

$k > 0, l < 0$  であることに注意すると,  $t \leq -l/(c_1 k) V_0^{\frac{l}{k}}$  のとき

$$V(t) \leq \left(c_1 \frac{k}{l} t + V_0^{-\frac{l}{k}}\right)^{-\frac{l}{k}} \quad (3.66)$$

が成立し、少なくとも  $t_1 = -l/(c_1 k)V_0^{\frac{1}{k}}$  では  $V(t_1) = 0$  となり、系 3.1 より

$$V(t) = 0 \quad (t > t_2) \quad (3.67)$$

が成立する。ただし、 $t_2$  は初めて  $V(t) = 0$  となる時刻とする。よって明らかに有限時間で  $x$  は原点に整定する。

□

すなわち、システムが同次であれば連続、不連続にかかわらず上記の定理が成立するので、詳細な解析を行うことなく微分方程式系の形のみから収束性能を推定することが可能で、全域においてその収束性能は等しく保たれることが保証される。

**例 3.2.** 不連続な同次システムとして高次スライディングモード制御系が知られている。2次の高次スライディングモード制御系の例として以下のようなシステムを考えよう。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha \operatorname{sgn}(|x_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x_1 + x_2) \end{aligned} \quad (3.68)$$

以下システム (3.68) を簡単に  $\dot{x} = f(x)$  と書く。システム (3.68) は拡大係数  $r = (2, 1)$  に関して  $-1$  次の同次であり、 $\alpha$  が十分大きいとき大域的に Filippov の意味で漸近安定であることが知られている [30][31]。ここで、Filippov の対応付けによる集合値写像  $F$  は以下のように得られる。

$$F(x) = K_x f(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

ここで、

$$F_1 = x_2$$

$$F_2 = \begin{cases} -\alpha \operatorname{sgn}(|x_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x_1 + x_2) \\ \quad (|x_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x_1 + x_2 \neq 0) \\ [-\alpha, \alpha] \\ \quad (|x_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x_1 + x_2 = 0) \end{cases} \quad (3.70)$$

となる。このとき、同次ディファレンシャル・インクルージョンに関する命題より、ディファレンシャル・インクルージョン  $\dot{x} \in F(x)$  は同次ディファレンシャル・インクルージョンである。同次性の性質より、大域的に漸近安定であれば大域的に強漸近安定であるから、定理 3.10 の仮定を満たし、大域的に任意の回数だけ微分可能な同次強 Lyapunov 関数が存在し、 $f \in F$  であるから定理 3.10 の系より、もとの不連続なシステム (3.68) に対しても同様の強 Lyapunov 関数が存在する。

現時点では、実際の強 Lyapunov 関数を示すことはできないが、同次 Lyapunov 関数が存在することは保証できる。したがって、同次ディファレンシャル・インクルージョンは  $-1$  次の同次であることより定理 3.11 よりすべての絶対連続な解は有限時間で整定することがいえる。

### 3.8. 高次スライディングモード制御

前節の例題で少し高次スライディングモードについて述べたが、本節では一般的な高次のスライディングモード制御系について簡単に述べる。

高次スライディングモード制御は 2 値の入力でシステムを安定化可能な制御則として知られている。これは具体的には次のようなものである。

以下のような  $n$  次の積分系を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= u \end{aligned} \tag{3.71}$$

このとき、高次スライディングモード制御器はシステム (3.71) に対し入力として、

$$u = -\alpha \operatorname{sgn}(\phi_{n-1,n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})) \tag{3.72}$$

と選んだものである。ただし、関数  $\phi$  は以下のように選ぶ。

$$\phi_{0,n} = x_1 \tag{3.73}$$



$$\phi_{1,n} = x_2 + \beta_1 N_{1,n} \operatorname{sgn}(\phi_{0,n}) \quad (3.74)$$

$$\phi_{i,n} = x_{i+1} + \beta_i N_{i,n} \operatorname{sgn}(\phi_{i-1,n}) \quad (3.75)$$

また、 $N$  は以下のような関数である。

$$N_{1,n} = |x_1|^{\frac{n-1}{n}} \quad (3.76)$$

$$N_{i,n} = (|x_1|^{m/n} + |x_2|^{m/(n-1)} + \dots + |x_{i-1}|^{m/(n-i+1)})^{(n-i)/m} \quad (3.77)$$

$$N_{n-1,n} = (|x_1|^{m/n} + |x_2|^{m/(n-1)} + \dots + |x_{n-1}|^{m/2})^{1/m} \quad (3.78)$$

ここで、 $m$  は任意の正の実数、 $\alpha, \beta_i (i = 1, \dots, n)$  は適当な正の実数とする。

システム (3.71) に対し制御器として式 (3.72) を用いたときシステムは漸近安定となることが知られている [30]. このように高次スライディングモード制御器は 2 値 ( $\alpha$  および  $-\alpha$ ) のみでシステムを安定化することができる。

以下に高次スライディングモード制御器の例を挙げる。ただし、 $u_i$  は  $i$  次の積分系に対する入力である。

$$u_1 = -\alpha \operatorname{sgn} x_1 \quad (3.79)$$

$$u_2 = -\alpha \operatorname{sgn} \left( x_2 + x_1^{\frac{1}{2}(\bar{s})} \right) \quad (3.80)$$

$$u_3 = -\alpha \operatorname{sgn} \left( x_3 + 2 (|x_2|^3 + |x_1|^2)^{\frac{1}{6}} \times \operatorname{sgn} \left( x_2 + x_1^{\frac{2}{3}(\bar{s})} \right) \right) \quad (3.81)$$

ここで、2 次のシステムに対しては前節で述べたように、 $r = (2, 1)$  に関する  $-1$  次の同次系であり、3 次のシステムは、 $r = (3, 2, 1)$  に関して  $-1$  次の同次系である。このように、高次スライディングモード制御系はすべて同次であり、以下の補題が成立する。

**補題 3.2.**  $n$  次の高次スライディングモード制御系は  $r = (n, n-1, n-2, \dots, 1)$  に関して  $-1$  次の同次である。

したがって、定理 3.10 および定理 3.11 より以下の命題が成立する。

命題 3.9.  $n$  次の高次スライディングモード制御系はもし局所的に漸近安定であるならば, 大域的に有限時間整定する.

ただし, 高次スライディングモード制御系が漸近安定となる条件はこれまで調べられておらず, 今後の課題である.

### 3.9. 同次ディファレンシャル・インクルージョンのロバスト安定性

前節までに, 外乱項の加わらない同次ディファレンシャルインクルージョンについて議論してきたが, 本節では外乱が加わった際にどの程度の安定性が保持されるのかを調べる.

#### 3.9.1 高次の摂動項を含むディファレンシャル・インクルージョンの安定性

連続な同次システムにおいては, 漸近安定な同次システムに高次の摂動項を加えても局所的な漸近安定性は維持される [24]. これは, 同次ディファレンシャル・インクルージョンにおいても, 同様の性質を示す以下の定理が成立する.

定理 3.12. 以下のようなディファレンシャル・インクルージョンを考える.

$$\frac{dx}{dt} \in F(x) + G(x) \quad (3.82)$$

ここで, 集合値写像  $F$  は条件 (C1) および (C2) を満たし,  $k$  次の同次であり, 集合値写像  $G$  は以下の条件を満たすと仮定する.

(B1)  $t \rightarrow 0$  のときすべての  $i = 1, 2, \dots, n$  および任意の  $x \in S^{n-1}$  に対して次式が一様に成立する.

$$\frac{G_i(t^{r_i} x_1, \dots, t^{r_n} x_n)}{t^{k+r_i}} \rightarrow 0 \quad (3.83)$$

このとき、ディファレンシャル・インクルージョン  $dx/dt \in F(x)$  が局所弱漸近安定であるならば、式 (3.82) も局所弱漸近安定である。□

### 3.9.2 等しい次数の摂動項を含む同次ディファレンシャル・インクルージョンの安定性

本章では、漸近安定な同次ディファレンシャル・インクルージョンに等しい次数の摂動項を加えたシステムのロバスト安定性について検討する。以下の定理が示すように、摂動項を加えたシステムが漸近安定であるための必要十分条件は元の漸近安定な同次ディファレンシャル・インクルージョンとの共通の Lyapunov 関数が存在することとなる。

**定理 3.13.** ディファレンシャル・インクルージョン

$$\dot{x} \in F(x) + G(x) \quad (3.84)$$

を考える。ここで  $F, G$  は条件 (C1) および (C2) を満たす  $\mathbb{R}^n$  から  $\mathbb{R}^n$  の部分空間への集合値写像とする。さらに、 $G$  は以下の条件を満たすと仮定する。

(E1) 任意の  $x$  において  $0 \in G(x)$ 。

このとき、ディファレンシャル・インクルージョン (3.84) が強漸近安定であるための必要十分条件は

$$\sup \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, F(x) + G(x) \right\rangle < 0 \quad (3.85)$$

となる関数  $V$  が存在することである。ただし、関数  $V$  はディファレンシャル・インクルージョン

$$\dot{x} \in F(x) \quad (3.86)$$

に対する強同次 Lyapunov 関数であるという条件を満たすこととする。□

すなわち、 $\dot{x} \in F(x)$  との共通 Lyapunov 関数が存在しなければ摂動項を足したディファレンシャル・インクルージョンは漸近安定とはならない。また、 $F(x) + G(x)$

も同次であるから、局所漸近安定であれば大域的に漸近安定であることが保証されることに注意しなければならない

また、集合値写像  $G$  にさらに仮定を加えたときには以下の定理が成立する。

**定理 3.14.** 集合値写像  $G$  の各要素  $G_i$  は次式を満たすとする。

$$G_i = \{w | w \in [-a_i \cdot \sup |\tilde{G}_i(x)|, a_i \cdot \sup |\tilde{G}_i(x)|]\} \quad (3.87)$$

ここで、 $\tilde{G}$  は以下の条件を満たす集合値関数とする。

(F1)  $\tilde{G}$  はコンパクト凸部分集合に値をとり上半連続。

(F2)  $\tilde{G}$  は拡大係数  $(r_1, \dots, r_n)$  に関して  $k$  次の同次。

また、 $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{+n}$  とする。

このとき、 $\dot{x} \in F(x)$  が局所弱漸近安定であるならば、 $\dot{x} \in F(x) + G(x)$  を大域的に強漸近安定にするような  $a$  が必ず存在する。□

### 3.10. 厳密な微分器

ある信号の時間微分をリアルタイムに求めることは、古くから良く知られている問題である。この問題に対して、我々は一般的に近似微分器を構成することで近似的に解決してきた。すなわち、理想的な微分器の伝達関数を近似して構成した近似微分器や、ハイゲインオブザーバ用いた近似微分器などである。

近年 Levant[30] はこの問題に対し、高次スライディングモード制御の考え方をを用いた厳密微分器を提案した。しかし、厳密微分器が漸近安定となる条件も明らかではなく、収束するまでの時間もわからなかった。

一方、Levant の厳密微分器は不連続な同次系である。本節では同次性を利用して厳密微分器の性質を明らかにし、2次および3次の厳密微分器に対して安定性の保証を行う。

### 3.10.1 厳密な微分器の構成

ある信号を入力したとき出力が入力信号の微分値と一致するとき微分器は厳密であるという。

厳密な  $n$  階微分器は以下のようなシステムとして表現される。

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 - \lambda_1(x_1 - f(t))^{\frac{n}{n+1}(\bar{s})} \\
 \dot{x}_2 &= x_3 - \lambda_2(x_1 - f(t))^{\frac{n-1}{n+1}(\bar{s})} \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= x_{n+1} - \lambda_n(x_1 - f(t))^{\frac{1}{n+1}(\bar{s})} \\
 \dot{x}_{n+1} &= -\lambda_{n+1} \operatorname{sgn}(x_1 - f(t)) \\
 y_1 &= x_2 \\
 &\vdots \\
 y_n &= x_{n+1}
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

ここで、 $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$  は微分器の内部状態であり、 $f(t)$  は微分したい信号、 $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) は設計パラメータ、 $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は微分器の出力であり、各  $y_i$  は  $i$  階の微分値の出力となる。

微分したい信号  $f(t)$  は  $n+1$  階微分可能であると仮定すると、以下の誤差システムが得られる。

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_1 &= \sigma_2 - \lambda_1 \sigma_1^{\frac{n}{n+1}(\bar{s})} \\
 \dot{\sigma}_2 &= \sigma_3 - \lambda_2 \sigma_1^{\frac{n-1}{n+1}(\bar{s})} \\
 &\vdots \\
 \dot{\sigma}_n &= \sigma_{n+1} - \lambda_n \sigma_1^{\frac{1}{n+1}(\bar{s})} \\
 \dot{\sigma}_{n+1} &= -f^{(n+1)}(t) - \lambda_{n+1} \operatorname{sgn} \sigma_1
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

ここで、 $\sigma_i = x_i - f^{(i)}(t)$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) であり、以下簡単に  $\dot{\sigma} = f(\sigma)$  と書く。 $f(t)$  の  $n+1$  階の時間微分値  $f^{(n+1)}(t)$  が

$$-C \leq f^{(n+1)}(t) \leq C \quad (C \in \mathbb{R}^+) \tag{3.90}$$

と表現できると仮定して Filippov の対応付けを行うと、以下のディファレンシャルインクルージョンが得られる。

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_1 &\in \sigma_2 - \lambda_1 \sigma_1^{\frac{n}{n+1}} (\bar{\sigma}) \\
 \dot{\sigma}_2 &\in \sigma_3 - \lambda_2 \sigma_1^{\frac{n-1}{n+1}} (\bar{\sigma}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\sigma}_n &\in \sigma_{n+1} - \lambda_n \sigma_1^{\frac{n-1}{n+1}} (\bar{\sigma}) \\
 \dot{\sigma}_{n+1} &\in \begin{cases} [-C - \lambda_{n+1} \operatorname{sgn} \sigma_1, C - \lambda_{n+1} \operatorname{sgn} \sigma_1] & (\sigma_1 \neq 0) \\ [-C - |\lambda_{n+1}|, C + |\lambda_{n+1}|] & (\sigma_1 = 0) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

システム (3.91) は簡単に  $\dot{\sigma} \in F(\sigma)$  と書く。ここで、システム (3.91) は拡大係数  $r = (n+1, n, \dots, 2, 1)$  に関して  $-1$  次の同次ディファレンシャル・インクルージョンであるから、定理 3.10 よりシステム (3.91) が漸近安定であるための必要十分条件は、同次 Lyapunov 関数  $V$  が存在して、

$$\sup_{f \in F} \dot{V} < 0 \tag{3.92}$$

となることである。また、システム (3.91) が漸近安定であれば、定理 3.11 よりシステムは有限時間で整定し、厳密微分器として動作することを保証できる。

### 3.10.2 厳密な 1 階微分器

前項において、厳密な微分器の一般的な性質を述べたが、本項では、実際に Lyapunov 関数を用いて、厳密な 1 階微分器を設計する。

信号  $f(t)$  は  $t \in [0, \infty)$  で定義され、 $C^2$  級の関数であり、 $f(t)$  の 2 階微分  $f''(t)$  は  $f''(t) \in [-C, C]$  ( $C \in \mathbb{R}^+$ ) を満たすとする。このとき、Levant により提案された厳密微分器は次のシステムである。

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 - \lambda_1 |x_1 - f(t)|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(x_1 - f(t)) \\
 \dot{x}_2 &= \lambda_2 \operatorname{sgn}(x_1 - f(t)) \\
 y &= x_2
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

ここで、 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  は状態量であり、 $y$  が微分器の出力、 $\lambda_1, \lambda_2$  は適当な性の定数とする。システム (3.93) が厳密微分器であるとは、十分な時間が経過すると  $y$  が入力信号  $f(t)$  の時間微分  $f'(t)$  に一致することを言う。  $\sigma_1 = x_1 - f(t)$  および  $\sigma_2 = x_2 - f'(t)$  とするときシステム (3.93) の誤差システムは以下のように表現される。

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= \sigma_2 - \lambda_1 |\sigma_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma_1) \\ \dot{\sigma}_2 &= -f''(t) - \lambda_2 \operatorname{sgn}(\sigma_1).\end{aligned}\tag{3.94}$$

もし、 $\sigma_1, \sigma_2 = 0$  が有限時間で達成されれば、システム (3.93) は厳密微分器として動作する。システム (3.94) の安定性を示すために、Levant は Nyquist の方法に類似したアプローチを用いていた。しかし、この方法では有限時間整定性を厳密には保証することができず、収束時間も示すことが出来ない。そこで、本論文では同次性を用いて収束を保証する。

システム (3.94) は任意の  $f''(t)$  に対して拡大係数  $(1, \frac{1}{2})$  に関する  $-\frac{1}{2}$  次の不連続な同次システムである。したがって、定理 3.11 よりもしシステム (3.94) が漸近安定であればシステムは有限時間で整定するので、漸近安定性のみを保証すればよいことになる。システム (3.94) が漸近安定となる十分条件を以下にまとめる。

**定理 3.15.** 信号  $f(t)$  は  $t \in [0, \infty)$  で定義され、 $C^2$  級の関数であり、 $f(t)$  の 2 階微分  $f''(t)$  は  $f''(t) \in [-C, C]$  ( $C \in \mathbb{R}^+$ ) を満たすとする。  $\lambda_1, \lambda_2$  が以下の条件を満たすならば、システム (3.94) は有限時間整定する。

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > C + \frac{2C^2}{\lambda_1^2},\tag{3.95}$$

また、収束時間  $T(x)$  は次式で保証される。

$$T(x_0) \leq -2 \min_{|e_1|+e_2^2=1} \left( \frac{V(e)^{\frac{1}{2}}}{\dot{V}(e)} \right) V(x_0)^{\frac{1}{2}}\tag{3.96}$$

ただし、

$$\begin{aligned}V &= 2(2 + R)\lambda_2^2 |\sigma_1| - 4\lambda_1 \lambda_2 |\sigma_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma_1) \sigma_2 \\ &\quad + (2\lambda_2 + R\lambda_2 + \lambda_1^2) \sigma_2^2\end{aligned}\tag{3.97}$$

であり,  $R$  は次式を満たす正の定数とする.

$$\begin{aligned} & -2R\lambda_1\lambda_2^2|\sigma_1|^{\frac{1}{2}} - 2\lambda_1\lambda_2|\sigma_1|^{-\frac{1}{2}}\sigma_2^2 + 4\lambda_1\lambda_2|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}(\sigma_1)f''(t) \\ & - 2(2\lambda_2 + R\lambda_2 + \lambda_1^2)\sigma_2f''(t) < 0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

□

*Proof.* Lyapunov 関数候補  $V$  を式 (3.97) とする. ただし,  $R > 0$  と仮定する. このとき,  $V$  の微分は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -2R\lambda_1\lambda_2^2|\sigma_1|^{\frac{1}{2}} - 2\lambda_1\lambda_2|\sigma_1|^{-\frac{1}{2}}\sigma_2^2 \\ &+ 4\lambda_1\lambda_2|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}(\sigma_1)f''(t) \\ &- 2(2\lambda_2 + R\lambda_2 + \lambda_1^2)\sigma_2f''(t) \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq |\sigma_1|^{-\frac{1}{2}}\{-2\lambda_1\lambda_2(R\lambda_2 - 2C)|\sigma_1| \\ &+ 2(2\lambda_2 + R\lambda_2 + \lambda_1^2)C|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}|\sigma_2| - 2\lambda_1\lambda_2\sigma_2^2\}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

式 (3.100) より,

$$\begin{aligned} & -2\lambda_1\lambda_2(R\lambda_2 - 2C)|\sigma_1| \\ & + 2(2\lambda_2 + R\lambda_2 + \lambda_1^2)C|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}|\sigma_2| - 2\lambda_1\lambda_2\sigma_2^2 < 0, \end{aligned} \quad (3.101)$$

であれば,  $|\sigma_1|^{-\frac{1}{2}} > 0$  であることより,  $\dot{V} < 0$  が得られる. 式 (3.101) は変数  $|x_1|$  および  $|x_2|$  に関する 2 次関数と考えられるから,

$$2\lambda_1\lambda_2(R\lambda_2 - 2C) > 0 \quad (3.102)$$

であれば, 式 (3.101) の判別式  $D$  は

$$D = C^2\{(2\lambda_2 + R\lambda_2 + \lambda_1^2)\}^2 - 4\lambda_1^2\lambda_2^2(R\lambda_2 - 2C) < 0, \quad (3.103)$$

となるので  $\dot{V}$  は負定である. 式 (3.103) は  $R$  の 2 次関数であり,  $C > 0, \lambda_2 > 0$  であるから,  $R$  は唯 1 つ極小点をもつ.  $D$  の  $R$  による微分は次式で表わされる.

$$\frac{\partial D}{\partial R} = 2\lambda_2C^2(2\lambda_2 + R\lambda_2 + \lambda_1^2) - 4\lambda_1^2\lambda_2^3. \quad (3.104)$$



$\frac{\partial D}{\partial R} = 0$  のとき,

$$R = \frac{2\lambda_1^2\lambda_2}{C^2} - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} - 2 \quad (3.105)$$

であり, これが  $D$  の最小値を与える. 式 (3.105) を式 (3.103) に代入すると,

$$\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2\lambda_2C^2 - \lambda_1^2C^2 - 2C^3) < 0. \quad (3.106)$$

となる.  $\lambda_1^2\lambda_2^2 > 0$  であるから,

$$(\lambda_1^2\lambda_2^4 - 2\lambda_2^3C^2 - \lambda_1^2\lambda_2^2C^2 - 2\lambda_2^2C^3) < 0 \quad (3.107)$$

$$\iff \lambda_2 > C + \frac{2C^2}{\lambda_1^2}, \quad (3.108)$$

であるとき,  $D < 0$ .  $R$  は定義より正であるから, 式 (3.105) の  $R$  をチェックする.  $\lambda_2 = C + \frac{2C^2}{\lambda_1^2} + p$  ( $p \in \mathbb{R}^+$ ) を式 (3.105) に代入すると,

$$R = \frac{2\lambda_1^2}{C} - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} + 2 > 2. \quad (3.109)$$

となる. 式 (3.109) および (3.102) より次式が得られる.

$$\lambda_1 > 0. \quad (3.110)$$

したがって,

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > C + \frac{2C^2}{\lambda_1^2}, \quad (3.111)$$

であるとき,  $\dot{V} < 0$  および  $V > 0$  が得られた.

最後に補題 2.4 を適用することにより収束保証時間  $T(x_0)$  が得られる.

□

**例 3.3.** 例として, 信号  $f(t) = \sin(2t)$  の微分を求める問題を考えよう.  $f''(t) = -4\sin(2t)$  であるから,  $C = 4$  である. したがって,  $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5$  と選べば微分器は有限時間で整定する.  $R = 30$  ととると, 初期値  $x_0 = (0, 0)$  に対する収束時間は  $T(x_0) \leq 3.62$  と保証出来る. シミュレーション結果を Fig. 3.3 に示す. 十分時間が経過した後, 微分器は正しく微分値を推定できていることが分かる. また, 保守的ではあるが収束時間も保証できていることが確認できる.

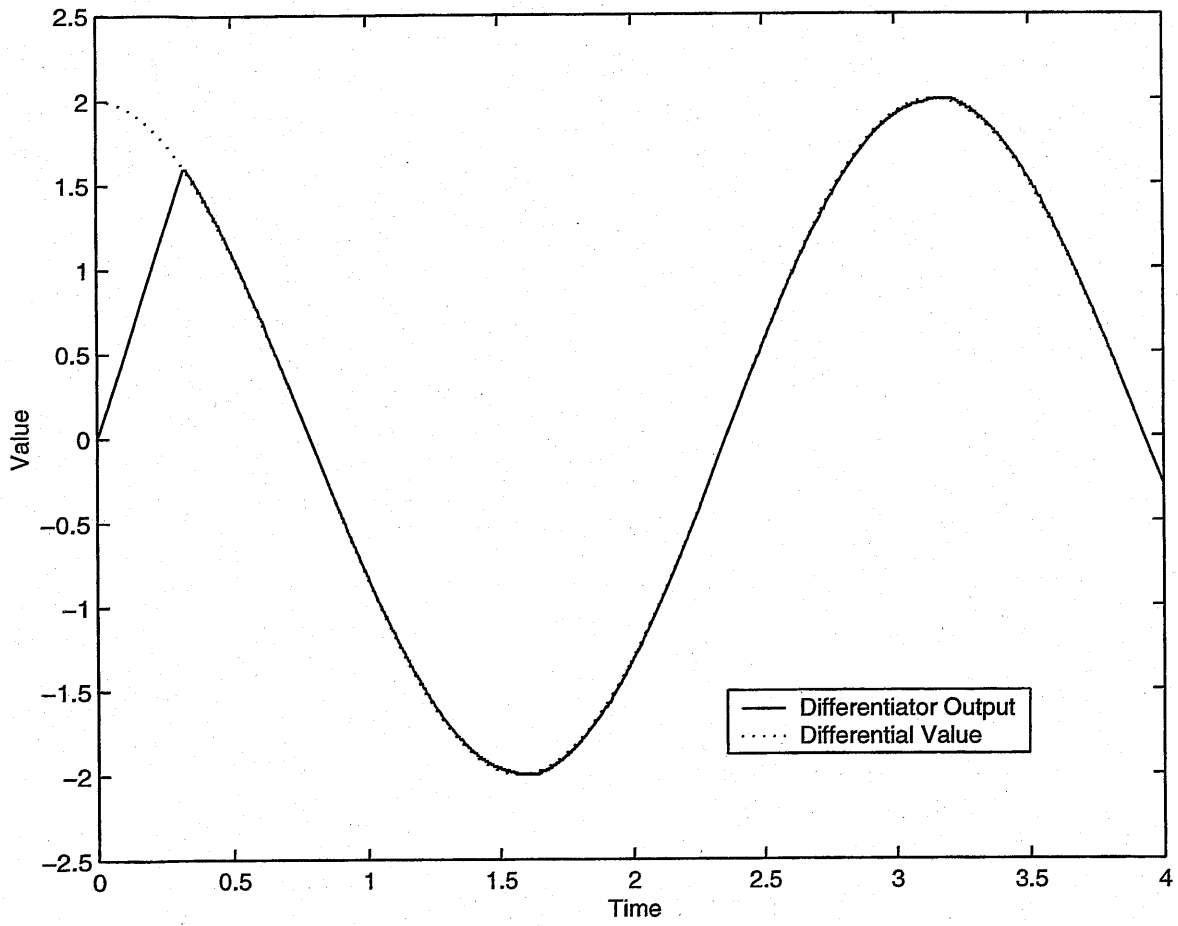


Fig. 3.1 Simulation Results: Example 1

### 3.10.3 厳密な2階微分器

2階微分値や滑らかな1階微分値を得るためには、2階微分器が必要である。2階微分器は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 - \lambda_1 |x_1 - f(t)|^{\frac{2}{3}} \operatorname{sgn}(x_1 - f(t)) \\
 \dot{x}_2 &= x_3 - \lambda_2 |x_1 - f(t)|^{\frac{1}{3}} \operatorname{sgn}(x_1 - f(t)) \\
 \dot{x}_3 &= \lambda_3 \operatorname{sgn}(x_1 - f(t)) \\
 y_1 &= x_2 \\
 y_2 &= x_3,
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

ここで、 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  は状態量であり滑らかな1階微分出力が $y_1$ 、2階の微分出力が $y_2$ 、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  は適当な正の定数とする。

次に、1階の厳密微分器と同様に誤差システムを構成する。 $\sigma_1 = x_1 - f(t), \sigma_2 = x_2 - f'(t), \sigma_3 = x_3 - f''(t)$  とおくと、式(3.112)は次式のようなになる。

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_1 &= \sigma_2 - \lambda_1 |\sigma_1|^{\frac{2}{3}} \operatorname{sgn}(\sigma_1) \\
 \dot{\sigma}_2 &= \sigma_3 - \lambda_2 |\sigma_1|^{\frac{1}{3}} \operatorname{sgn}(\sigma_1) \\
 \dot{\sigma}_3 &= -f'''(t) - \lambda_3 \operatorname{sgn}(\sigma_1).
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

システム(3.113)をLevantの方法で有限時間整定性を示すことは不可能である。しかし、システム(3.113)は拡大 $(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ に関して $-\frac{1}{3}$ 次の同次であるから、システムが漸近安定であれば有限時間で整定し、システム(3.112)は厳密な微分器として動作する。システム(3.113)が漸近安定となる条件を以下の定理に示す。

**定理 3.16.** 入力信号 $f(t)$ の3階微分は $-C \leq f'''(t) \leq C$  ( $C > 0$ )を満たし、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ かつ $a, b, d$ は以下の条件を満たすとする。

$$8a \left( \frac{2a}{3\lambda_2} + \frac{b\lambda_1}{3\lambda_2} \right) > 2b^2 + 2ad^2 + 3^{\frac{3}{4}} a^{\frac{1}{4}} \frac{b}{\lambda_1} \tag{3.114}$$

$$\begin{aligned}
& 27 \left( \frac{4}{3}a\lambda_1 - b\lambda_2 - \frac{\lambda_3 + C}{\lambda_1}b \right) \{4(\lambda_3 - C) + d\}^2 \\
& > 4 \left[ \frac{1}{4b} \left\{ 2 \left( \frac{2a}{3\lambda_2} + \frac{b\lambda_1}{3\lambda_2} \right) + 2d - \frac{b}{\lambda_1} \right\}^2 + d\lambda_2 \right]^3
\end{aligned} \tag{3.115}$$

$$\begin{aligned}
& 27 \left\{ \frac{4}{3}a\lambda_1 - b\lambda_2 - \frac{b}{\lambda_1}(\lambda_3 + C) \right\} \{d - 4(\lambda_3 + C)\}^2 \\
& > 4 \left[ \frac{1}{4b} \left\{ 2 \left( \frac{2a}{3\lambda_2} + \frac{b\lambda_1}{3\lambda_2} \right) - \frac{b}{\lambda_1} - 2d(\lambda_3 - C) \right\}^2 \right]^3.
\end{aligned} \tag{3.116}$$

このとき、システム (3.113) は有限時間で整定する。

*Proof.* 以下のような Lyapunov 関数候補を考える。

$$V = a|\sigma_1|^{\frac{4}{3}} - b|\sigma_1|^{\frac{2}{3}} \operatorname{sgn} \sigma_1 \cdot \sigma_2 + c|\sigma_2|^2 - d\sigma_2\sigma_3^2 \operatorname{sgn} \sigma_3 + \sigma_3^4 - e\sigma_1\sigma_3, \tag{3.117}$$

ただし、 $a, b, c, d, e > 0$  とする。ここで、次式が満たされると仮定する。

$$\begin{cases} r_1 a |\sigma_1|^{\frac{4}{3}} - b |\sigma_1|^{\frac{2}{3}} c_1 \sigma_2^2 > 0 \\ c_2 \sigma_2^2 - d \sigma_2 \sigma_3^2 \operatorname{sgn} \sigma_3 + r_1 \sigma_3^4 > 0 \\ r_2 a |\sigma_1|^{\frac{4}{3}} - e \sigma_1 \sigma_3 + r_2 \sigma_3^4 > 0, \end{cases} \tag{3.118}$$

ただし、

$$c_1 + c_2 = c, \quad r_1 + r_2 = 1 \tag{3.119}$$

である。このとき、 $V > 0$  となる。式 (3.118) が満たされる十分条件は

$$4c_1 > \frac{b^2}{r_1 a} \tag{3.120}$$

$$4c_2 > \frac{d^2}{r_1} \tag{3.121}$$

$$r_2 > \frac{3^{\frac{3}{4}} e}{8a^{\frac{3}{4}}}. \tag{3.122}$$

と成る. ただし, 式(3.122)は定理??を用いることで得られる. ここで, 式(3.120), 式(3.121)および  $c_1 + c_2 = c$  より,

$$4(c_1 + c_2) > \frac{b^2}{r_1 a} + \frac{d^2}{r_1} \quad (3.123)$$

$$r_1 > \frac{b^2}{4ac} + \frac{d^2}{4c} \quad (3.124)$$

が得られ, 式(3.124), 式(3.122)および  $r_1 + r_2 = 1$  より,

$$r_1 + r_2 > \frac{b^2}{4ac} + \frac{d^2}{4c} + \frac{3^{\frac{3}{4}} e}{8a^{\frac{3}{4}}} \quad (3.125)$$

$$8ac > 2b^2 + 2ad^2 + 3^{\frac{3}{4}} a^{\frac{1}{4}} e \quad (3.126)$$

が得られる. 逆に, もし係数  $a, b, c, d, e$  が式(3.126)を満たすならば,  $c_1, c_2, r_1, r_2$  は必ず存在する. したがって, もし係数  $a, b, c, d, e$  が式(3.126)を満たすならば,  $V$  は正定である.

一方,

$$\begin{aligned} \dot{V} = & - \left\{ \frac{4}{3} a \lambda_1 - b \lambda_2 - e (\lambda_3 + f'''(t)) \right\} |\sigma_1| \\ & + \left( \frac{4}{3} a + \frac{2}{3} b \lambda_1 - 2c \lambda_2 \right) |\sigma_1|^{\frac{1}{3}} \operatorname{sgn} \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ & + (k_1 e - b) |\sigma_1|^{\frac{2}{3}} \operatorname{sgn} \sigma_1 \cdot \sigma_3 - b |\sigma_1|^{-\frac{1}{2}} \sigma_2^2 \\ & + \left\{ 2c - \frac{b}{\lambda_1} + 2d (\lambda_3 + f'''(t)) \operatorname{sgn} \sigma_1 \operatorname{sgn} \sigma_3 \right\} \sigma_2 \sigma_3 \\ & - 4 (\lambda_3 + f'''(t)) \sigma^3 \operatorname{sgn} \sigma_1 - d |\sigma_3|^3 \\ & + d \lambda_2 |\sigma_1|^{\frac{1}{3}} \operatorname{sgn} \sigma_1 \cdot \sigma_3^2 \operatorname{sgn} \sigma_3. \end{aligned} \quad (3.127)$$

となる。もし、 $c = \frac{2a}{3\lambda_2} + \frac{b\lambda_1}{3\lambda_2}$  かつ  $e = \frac{b}{\lambda_1}$  であるならば、

$$\begin{aligned} \dot{V} = & - \left( \frac{4}{3}a\lambda_1 - b\lambda_2 - \frac{\lambda_3 + f'''(t)}{\lambda_1}b \right) |\sigma_1| - b|\sigma_1|^{-\frac{1}{2}}\sigma_2^2 \\ & + \left\{ 2c - \frac{b}{\lambda_1} + 2d(\lambda_3 + f'''(t)) \operatorname{sgn} \sigma_1 \operatorname{sgn} \sigma_3 \right\} \sigma_2\sigma_3 \\ & - 4(\lambda_3 + f'''(t))\sigma^3 \operatorname{sgn} \sigma_1 - d|\sigma_3|^3 \\ & + d\lambda_2|\sigma_1|^{\frac{1}{3}} \operatorname{sgn} \sigma_1 \cdot \sigma_3^2 \operatorname{sgn} \sigma_3. \end{aligned} \quad (3.128)$$

となる。

$\dot{V}$  が負となる条件を調べるために、4つの条件を定義し、それぞれに対して条件を調べる。すなわち、 $\sigma$ の符号がすべて同じか、1つの符号だけが異なるかで条件を分けた。

**Case 1:** すべての符号が同じ場合。

この場合では、式(3.128)は次式のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \dot{V} = & - \left( \frac{4}{3}a\lambda_1 - b\lambda_2 - \frac{\lambda_3 + f'''(t)}{\lambda_1}b \right) |\sigma_1| - b|\sigma_1|^{-\frac{1}{2}}\sigma_2^2 \\ & + \left\{ 2c - \frac{b}{\lambda_1} + 2d(\lambda_3 + f'''(t)) \right\} \sigma_2\sigma_3 \\ & - \{4(\lambda_3 + f'''(t)) + d\} |\sigma|^3 \\ & + d\lambda_2|\sigma_1|^{\frac{1}{3}} \operatorname{sgn} \sigma_1 \cdot \sigma_3^2 \operatorname{sgn} \sigma_3. \end{aligned} \quad (3.129)$$

式(3.129)は $\sigma_2, \sigma_2$ に関して凸であるから、極大点をもつ持ち、その点で最大値となる。そこで、 $\dot{V}$ の $\sigma_2$ に関する偏微分を求めると次式が得られる。

$$\frac{\partial \dot{V}}{\partial \sigma_2} = -2b|\sigma_1|^{-\frac{1}{2}}\sigma_2 + \left( 2c + 2d - \frac{b}{\lambda_1} \right) \sigma_3 \quad (3.130)$$

$\frac{\partial \dot{V}}{\partial \sigma_2} = 0$  であるとき,  $\sigma_2$  は最大となる. このときの  $\sigma_2$  は

$$\sigma_2 = \frac{1}{2b} \left( 2c + 2d - \frac{b}{\lambda_1} \right) |\sigma_1|^{\frac{1}{3}} \sigma_3 \quad (3.131)$$

となる. 以上で得られた  $\sigma_2$  を  $\dot{V}$  に代入すると,

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \left( \frac{4}{3} a \lambda_1 - b \lambda_2 - \frac{\lambda_3 + f'''(t)}{\lambda_1} b \right) |\sigma_1| \\ & \left\{ \frac{1}{4b} \left( 2c + 2d - \frac{b}{\lambda_1} \right)^2 + d \lambda_2 \right\} |\sigma_1|^{\frac{1}{3}} \sigma_3^2 \end{aligned} \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} & - 4(\lambda_3 + f'''(t)) + d |\sigma_3|^3 \\ \leq & - \left( \frac{4}{3} a \lambda_1 - b \lambda_2 - \frac{\lambda_3 + C}{\lambda_1} b \right) |\sigma_1| \\ & \left\{ \frac{1}{4b} \left( 2c + 2d - \frac{b}{\lambda_1} \right)^2 + d \lambda_2 \right\} |\sigma_1|^{\frac{1}{3}} \sigma_3^2 \\ & - 4(\lambda_3 - C) + d |\sigma_3|^3. \end{aligned} \quad (3.133)$$

となる. 定理 (2.3) より, もし

$$\begin{aligned} & 4 \left\{ \frac{1}{4b} \left( 2c + 2d - \frac{b}{\lambda_1} \right)^2 + d \lambda_2 \right\}^3 \\ & < 27 \left( \frac{4}{3} a \lambda_1 - b \lambda_2 - \frac{\lambda_3 + C}{\lambda_1} b \right) \{4(\lambda_3 - C) + d\}^2, \end{aligned} \quad (3.134)$$

であれば,  $\dot{V} < 0$ .

**Case 2:**  $\sigma_1$  の符号のみが違う場合

この場合では、式 (3.128) は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{V} = & - \left\{ \frac{4}{3}a\lambda_1 - b\lambda_2 - \frac{b}{\lambda_1}(\lambda_3 + f'''(t)) \right\} |\sigma_1| - b|\sigma_1|^{-\frac{1}{3}}x_2^2 \\ & + \left\{ 2c - \frac{b}{\lambda_1} - 2d(\lambda_3 + f'''(t)) \right\} \sigma_2\sigma_3 \\ & - \{d - 4(\lambda_3 + f'''(t))\} |\sigma_3|^3. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Case 1 と同様の議論により、 $\dot{V} < 0$  のための十分条件は以下のようになる。

$$\begin{aligned} & 4 \left[ \frac{1}{4b} \left\{ 2c - \frac{b}{\lambda_1} - 2d(\lambda_3 - C) \right\}^2 \right]^3 \\ & < 27 \left\{ \frac{4}{3}a\lambda_1 - b\lambda_2 - \frac{b}{\lambda_1}(\lambda_3 + C) \right\} \{d - 4(\lambda_3 + C)\}^2. \end{aligned} \quad (3.136)$$

**Case 3:**  $\sigma_2$  の符号のみが異なる場合

この場合は Case 1 に含まれる。

**Case 4:**  $\sigma_3$  の符号のみが異なる場合

この場合は Case 2 に含まれる。

式 (3.126), 式 (3.134), 式 (3.135),  $c = \frac{2a}{3\lambda_2} + \frac{b\lambda_1}{3\lambda_2}$ ,  $e = \frac{b}{\lambda_1}$  より, システム (3.113) が漸近安定となるための十分条件が得られた。□

**例 3.4.** ここでは、1 階微分器に対して考えた信号と同様の信号  $f(t) = \sin(2t)$  の 2 階微分を求める問題を考えよう。  $f'''(t) = -8\sin(2t)$  であるから、 $C = 8$  となる。したがって、 $\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 20, \lambda_3 = 20, a = 100, b = 50, c = 1$  に選べば、微分器は有限時間で整定する。シミュレーション結果を Fig. 3.4 および Fig. 3.4 に示す。1 階微分値、2 階微分値ともに正しく得ることができていることが確認できる。



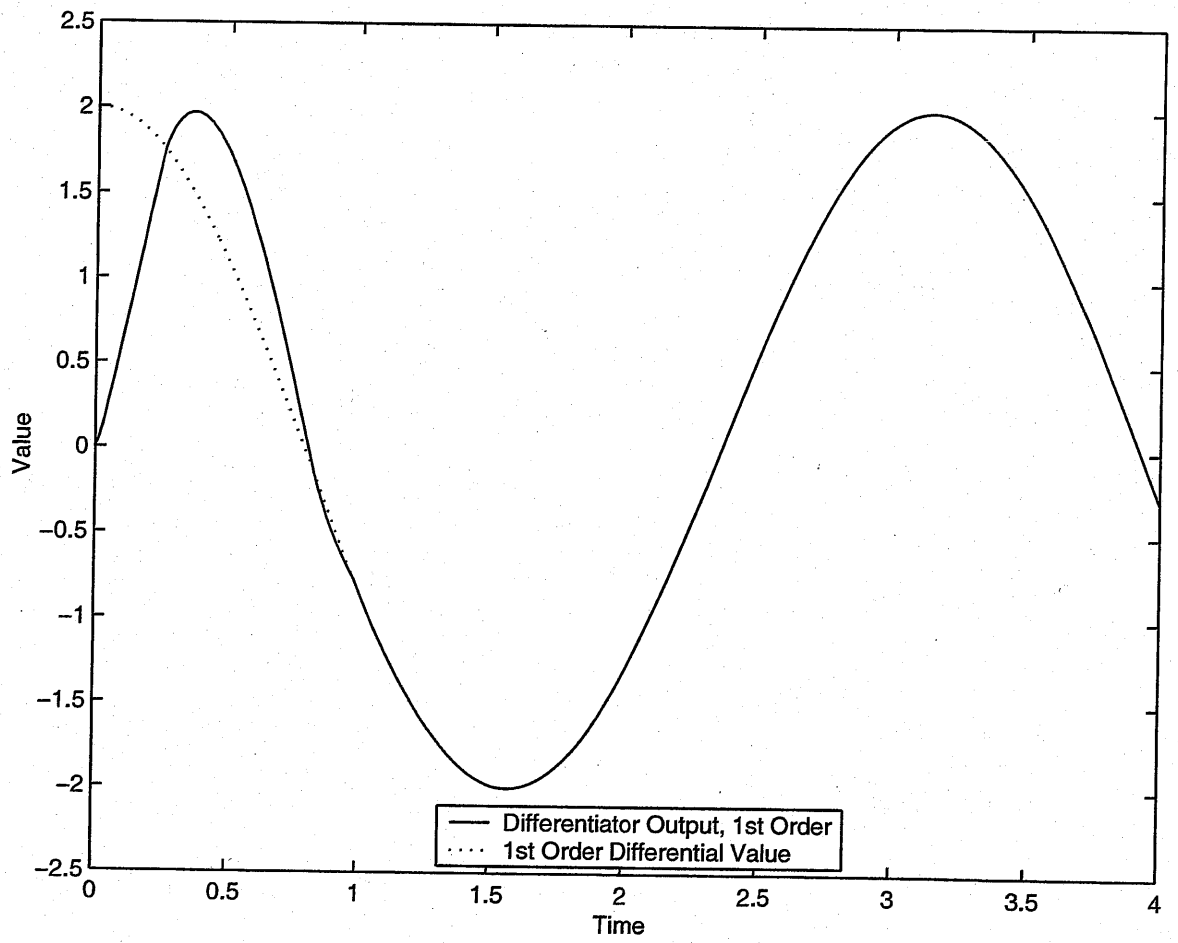


Fig. 3.2 Simulation Results: Example 3

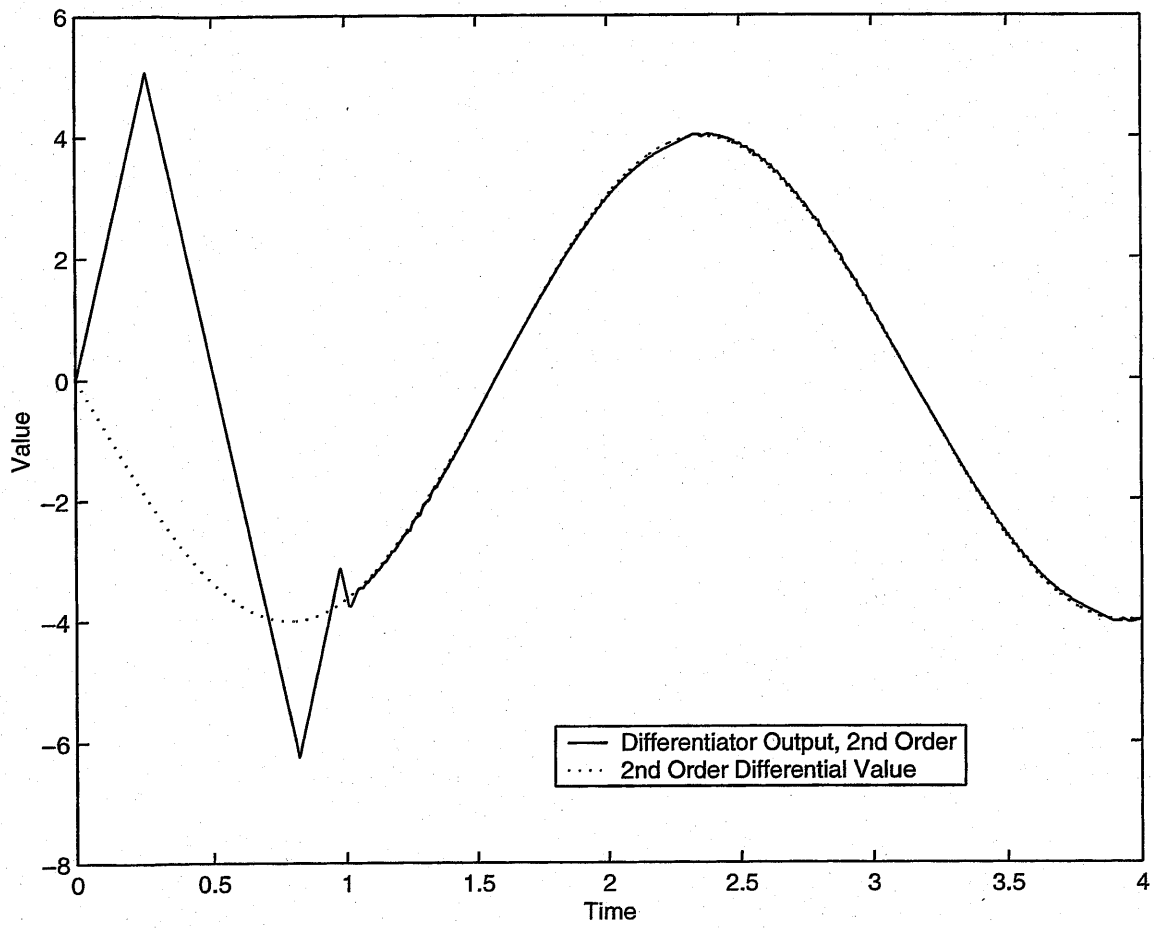


Fig. 3.3 Simulation Results: Example 3

### 3.11. 3章のまとめ

本章では，不連続な同次システムについて解析をおこなった．まず，ディファレンシャル・インクルージョンについて簡単に説明を行い，Lyapunov の逆定理に関して Clarke らのものと Rosier のものを整理しシンプルな定理 3.8 にまとめた．

さらに，不連続な同次システムに対して，ディファレンシャル・インクルージョンの概念を導入することにより，同次ディファレンシャル・インクルージョンが局所的に弱安定なときには任意の同次次数をもち任意の回数だけ微分可能である同次 Lyapunov 関数が存在することを示し，特に漸近安定である場合においては連続な同次システムの有する特性と同様の性質があることを明らかにした．

章の後半では，不連続な同次システムの代表例である高次スライディングモード制御と厳密微分器について安定性を検討した．

## 第4章 非ホロノミックシステムに対する同次有限時間整定制御

### 4.1. 非ホロノミックシステムとは

前章までに、同次システム、不連続な同次システムについて述べてきた。本章では、線形制御では達成できない制御則の設計問題として、非ホロノミックシステムに対する不連続制御器の設計を考える。

まず簡単に非ホロノミックシステムについて述べよう。非ホロノミックシステムとは、ある常微分方程式系の中に、非ホロノミックな拘束を含むシステムのことを言う。非ホロノミックな拘束とは、条件が不等式で表わされたり、ある状態変数（力学的には座標といったほうが正しい）の微分の間積分不可能な関係で与えられる拘束であるが、特に非ホロノミックシステムというときには、後者、すなわち、ある状態変数の微分の間積分不可能な関係式を持つシステムのことをいう。

具体的にどのようなシステムが非ホロノミックシステムかというと、自動車のような車輪を持った移動車両や宇宙ロボット、あるいは非駆動関節を有するマニピュレータなどが非ホロノミックシステムとして知られている。

非ホロノミックシステムの可制御性については未知の部分もあるが、対称アファインな状態方程式で表現可能なシステムについてはほぼ解明されている。このような非ホロノミックシステムは可制御ではあっても連続時不変状態フィードバックでは状態を平衡点に安定化できないことが知られており [38]、制御が困難なシステムの一つとしてとらえられている。

## 4.2. 非ホロノミックシステムに適用可能な解

非ホロノミックシステムに対して不連続な制御器を構成するとき、ディファレンシャル・インクルージョンの議論を用いると、すなわち Brockett[38] の意味で漸近安定化不可能である場合、Filippov の意味で漸近安定になることはないという問題が生じる [37]. これは、非ホロノミックシステムに対して不連続な制御器を設計するとき、分離面を持つように設計するのだが、Filippov の対応付けをする際に、分離面がすべて不安定平衡点となってしまい、分離面にとどまる解が存在してしまうことから大きな問題である。

これは、インクルージョンに対応づけられる際に生じる寄生解、すなわちある絶対連続な解で  $x(t_0) = x_0$  かつ  $\dot{x}(t_0) = f(x_0)$  を満たすものが存在するのにもかかわらず存在する他の解、の存在に顕著に現れている。本研究では、Filippov の解の集合  $S$  から寄生解の集合  $P$  を除いた集合を  $N$  と書き、実態解と呼び、次式のように定義する。

$$N = S \setminus P \quad (4.1)$$

しかし、このようにして定義した実態解  $N$  は区分連続程度の不連続なシステムに対してのみ有効である。そこで、この考えをさらに一般化した以下の Euler-Filippov の解を定義する。

**定義 4.1 (Euler-Filippov の解).** 微分方程式系

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.2)$$

を考える。ただし、 $f$  は Lebesgue 可測かつ局所有界であるとする。ある  $x(t)$  が以下の条件を満たすとき (4.2) の Euler-Filippov の解と呼ぶ。

1.  $x(0) = x_0$
2.  $x(t)$  は  $\dot{x} \in K(x)f(x)$  に対する Filippov の解。

3. ある  $x_\varepsilon$  に対する Filippov の解の集合を  $X_\varepsilon(t)$  と書き,

$$x_\varepsilon = x_0 + f(x)\varepsilon \quad (4.3)$$

であるとする. このとき,  $\varepsilon$  を 0 に近づけていったときの解の集合  $X_\varepsilon$  の中に  $x(t)$  が含まれる, すなわち

$$x(t) \in \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon(t) \quad (4.4)$$

が成立する.

□

このように Euler-Filippov の解を定義するとき, 以下の命題が成立する.

**命題 4.1.** 実態解は Euler-Filippov の解である. □

ただし, 本研究で扱うシステムは区分連続であるので, 実態解は Euler-Filippov の解となるため, Euler-Filippov の解のみを扱う.

### 4.3. 1 次のチェインドシステムに対する同次有限時間整定制御器

非ホロノミックシステムの中でもっとも研究が盛んに行われているシステムがチェインドシステム、あるいはチェインドフォームシステムと呼ばれるシステムである. このシステムに対するフィードバック制御として, 大きく分けると不連続な時不変状態フィードバックと時変の滑らかな状態フィードバックという 2 つのアプローチに基づいてさまざまな方法が提案されてきた.

前者の方法では, 不連続な時不変制御器は制御則の構成が困難である, 入力が無限大となるような初期状態をもつといった問題を抱えている. 一方, 後者の時変の滑らかな制御器は収束の遅さに悩まされてきた. この問題は近年 M'Closkey ら [29] による同次性の導入により改善されたが, この方法では原点において不連続になってしまい, 滑らかであるという時変の状態フィードバックの利点を失っており, 時変の制御器である必要はないと考える.

そこで、本論文ではチェインドシステムに対し時不変の不連続な同次制御器を設計することで、入力が発散するような特異点を持つことなく有限時間で整定する、構成が簡単な制御則を提案する。本制御則を用いることにより、収束速度を有限時間整定あるいは指数安定といったように選択が可能であることを示す。

### 4.3.1 対象システム

本節では、制御対象として以下のようなシステムを考える。

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= u_1 \\
 \dot{x}_2 &= u_2 \\
 \dot{x}_3 &= x_2 u_1 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= x_{n-1} u_1
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

このシステムは、一般的には単にチェインドシステムと呼ばれるが、本論文では4.4節において高次チェインドシステムを扱うため、特にシステム(4.5)を1次のチェインドシステムと呼ぶ。このような1次のチェインドシステムの状態変数の中で、特に部分状態  $x_2, \dots, x_n$  を考える事にする。ここで、 $u_1 = 1$  としたときシステムは以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= u_2 \\
 \dot{x}_3 &= x_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= x_{n-1}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

また、 $u_1 = -1$  の時には

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= u_2 \\
 \dot{x}_3 &= -x_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= -x_{n-1}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

となり、これらはそれぞれ線形の可制御なシステムである。このことから、1次のチェインドシステムの制御においては  $u_1$  が0にならなければ制御は非常に簡単である。一方、もし  $x_1$  以外の状態量が有限時間で整定できなければ、 $u_1$  は無限大時間まで常に値を持たなければならず  $x_1$  を整定させることが非常に困難となる。

ところが、有限時間内で  $x_1$  以外の状態量を原点に整定することができれば結局  $u_1$  が0となっても状態は原点から移動しないため特に問題は生じない。そのため、1次のチェインドシステムに対する制御則においては有限時間整定制御が非常に重要であると考えられる。

次項において実際に有限時間整定制御を1次のチェインドシステムに対して適用することによりシンプルに制御系が設計できることを示す。

#### 4.3.2 1次のチェインドシステムに対する同次有限時間整定制御則

提案する制御法の基本的なアイデアは次のようなものである。まず部分状態  $(x_2, \dots, x_n)$  を有限時間で整定させ、 $x_1$  はそれと同時にあるいは部分状態が整定した後に安定化する。この考え方により、部分状態が有限時間で整定するまで  $u_1$  を0にすることなく全状態を安定化させることができる。

次に制御則の概要を示す。提案する制御法では  $u_1$  は  $\text{sgn } x_1$  または  $-\text{sgn } x_1$  の値をとる。このため、 $x_1$  が0に収束するまで少なくとも  $|x_1|$  の時間がかかる。そこで、部分状態  $x_2, \dots, x_n$  が時間  $|x_1|$  以内で有限時間整定するときには  $u_1 = -\text{sgn } x_1$ 、それ以外の時には  $u_1 = \text{sgn } x_1$  とする。この方法によりすべての状態が原点に収束する。

言い換えれば、本手法は領域を2つに分割して制御することになる。それぞれの領域を次のように定義する。 $u_1 = \text{sgn } x_1$  となる領域を *Area A*、 $u_1 = -\text{sgn } x_1$  となる領域を *Area B* とする。このとき、各領域における制御目標は次のようにまとめることができる。

##### Area A

$u_1 = \text{sgn } x_1$  とし、 $u_2$  は部分状態  $(x_2, \dots, x_n)$  をある有限時間  $T_g < |x_1|$  で収束が保証できる領域に移動できるように選ぶ。



### Area B

$u_1 = -\text{sgn } x_1$  とし,  $u_2$  は  $(x_2, \dots, x_n)$  を有限時間  $T_g$  で整定させるものを選ぶ.

ここで, 有限時間整定制御として同次有限時間整定制御を用いるため, 収束時間保証関数  $T_g$  は既知である.

具体的には, システム (4.5) に対し入力  $u_1$  として

$$u_1 = \text{sgn}[T_s(x_1, \dots, x_n) - |x_1|] \text{sgn } x_1 \quad (4.8)$$

を考える. ただし, 関数  $T_s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は Area B において  $(x_2, \dots, x_n)$  が原点に整定するまでの保証時間関数であり, つねに状態が Area B に存在すると仮定した場合における収束時間保証関数  $T_g$  である. もっと正確に言うならば, 部分システム (4.6) に対する収束時間保証関数を  $T_{g,1}$ , 部分システム (4.7) に対する収束時間保証関数を  $T_{g,-1}$  としたとき  $T_s = T_{g,-\text{sgn } x_1}$  である.

この関数  $T_s$  を切り替え時間関数とよぶ.  $u_1$  の構成より Area B は集合  $\{x \mid |x_1| > T_s(x)\}$  と表現することが可能であり, 集合  $\{x \mid |x_1| = T_s(x)\}$  は Area A と Area B の境界を定める. 切り替え時間関数は正確には以下のような条件を満たす任意の関数となる.

**定義 4.2 (切り替え時間関数).** 関数  $T_s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は以下の条件を満たすとき切り替え時間関数と呼ぶ.

1.  $T_s$  は  $\text{sgn } x_1, x_2, \dots, x_n$  の関数であり, 任意の  $(x_2, \dots, x_n) \neq 0$  において  $T_s$  は連続かつ,  $T_s(\text{sgn } x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ .
2. すべての  $\varepsilon > \|x_2, \dots, x_n\|$  に対して  $\delta > T_s(\text{sgn } x_1, x_2, \dots, x_n)$  であるような  $\delta$  が存在する.
3.  $u_1 = -\text{sgn } x_1$  のとき, ある  $t_0$  において  $T_s((t_0)) = T_{s0}$  であるとするとき常に  $(x_2(t_0 + T_{s0}), \dots, x_n(t_0 + T_{s0})) = 0$  が成立する.
4.  $u_1 = -\text{sgn } x_1, x \neq 0$  のとき  $\dot{T}_s \leq -1$ .
5.  $T_s(\text{sgn } x_1, 0, \dots, 0) = 0$

□

ここで、式 (1.9) の  $\text{sgn}$  関数の定義を再掲する.

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases} \quad (4.9)$$

このように  $\text{sgn}$  関数を定義することにより  $x_1 = 0$  で入力が 0 となることを防いでいる.

この領域の移動 (入力の切り替え) に関しては以下の補題が成立する.

**補題 4.1.** システム (4.5) に対し  $u_1$  を式 (4.8) のように選んだとき  $T_s$  が  $x$  の軌道に沿って有界であれば  $u_1$  の切り替えは最大 1 回しか存在しない.  $\square$

*Proof.*  $x_1$  は  $T_s \geq |x_1|$  のとき狭義単調増加であるから、 $T_s$  が  $x$  の軌道に沿って有界であれば必ず  $T_s < |x_1|$  となるので切り替えは必ず 1 回存在する. また、 $T_s < |x_1|$  であるときには

$$\dot{x}_1 = -\text{sgn } x_1 \quad (4.10)$$

および  $T_s$  の定義より  $\dot{T}_s < |\dot{x}_1|$  であるから、切り替えは最大 1 回しか存在しない.  $\square$

ここで *Area A* においてシステム (4.5) は

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sgn } x_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 \text{sgn } x_1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= x_{n-1} \text{sgn } x_1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

と表現でき、*Area B* においては

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\text{sgn } x_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= -x_2 \text{sgn } x_1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -x_{n-1} \text{sgn } x_1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

と表現することができる。それぞれの領域における制御目標は、部分状態  $(x_2, \dots, x_n)$  を、Area Aにおいて有界に保つ、Area Bにおいて有限時間で整定させることである。これらの2つの制御目標を統一的に取り扱うために、新しい変数  $\xi$  を

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_1 \\ \xi_i &= x_i [\text{sgn } u_1]^{n-i} \quad (2 \leq i \leq n-1) \\ \xi_n &= x_n \\ v_2 &= [\text{sgn } u_1]^{n-2} u_2\end{aligned}\tag{4.13}$$

のように選ぶと次式のように統一して表現することができる。

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \text{sgn}[T_s(\text{sgn } \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - |\xi_1|] \text{sgn } \xi_1 \\ \dot{\xi}_2 &= v_2 \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_n &= \xi_{n-1}\end{aligned}\tag{4.14}$$

したがって、 $v_2$  を  $(\xi_2, \dots, \xi_n)$  が有限時間で整定するように構成すれば、Area A, Area Bにおける各目標を達成することができ、2つの領域における問題を1つにまとめることができた。このような変数  $\xi$  を用いたとき、Area AからArea Bへの切り替えの瞬間は考慮していないが、補題4.1より一度状態  $x$  がArea Bに移動するとArea Aに戻ることはないため、切り替えの瞬間にシステムが特異な挙動を示すことはない。

次に、システム(4.14)に対して同次有限時間整定制御器を設計した際における、切り替え時間関数の構成について述べる。システム(4.14)における  $v_2$  として利用する同次有限時間整定制御器は  $\xi$  に対して連続であるため常に収束時間保証関数  $T_g(\xi)$  は存在し、 $u_1$  が切り替わる瞬間および  $x=0$  を除いて常に

$$\dot{T}_g \leq -1\tag{4.15}$$

が成立する。ところが、 $u_1$  の切り替え点において  $\xi$  の状態にジャンプが生じるため、一般に  $T_g$  は不連続になり  $T_g$  がそのまま切り替え時間関数となるわけではな

い. しかし, 常にシステム (4.12) における  $T_g$ , すなわち

$$T_s = T_g(x_1, x_2[-\operatorname{sgn} x_1]^{n-2}, \dots, x_i[-\operatorname{sgn} x_1]^{n-i}, \dots, x_n) \quad (4.16)$$

は切り替え時間関数としての定義を満たす. また, このように構成した  $T_s$  は拡大  $\Delta_\varepsilon^{(r_2, \dots, r_n)}$  に関して  $-k$  次の同次であることが容易に確認できる.

したがって, このように  $\xi$  に対して有限時間で整定する拡大  $\Delta_\varepsilon^{(r_2, \dots, r_n)}$  に関して  $k < 0$  次の同次制御器  $v_2$  を設計したとき, もとのシステム (4.5) は  $\Delta_\varepsilon^{(-k, r_2, \dots, r_n)}$  に関して  $k$  次の同次となる. ゆえに *Area B* における Lyapunov 関数候補として

$$V_a = T_s^2 + x_1^2 \quad (4.17)$$

を考えると, 時間微分  $\dot{V}_a$  は負定であるため補題 2.4 よりシステム全体としても有限時間で整定することがわかる.

このように制御則を設計すると, 制御側は区分連続となり, Euler-Filippov の解を用いたとき, 明らかに以下の定理が成立する.

**定理 4.1.** 1 次のチェインドシステム (4.6) に対し, 入力として

$$u_1 = \operatorname{sgn}[T_s(x_1, \dots, x_n) - |x_1|] \operatorname{sgn} x_1 \quad (4.18)$$

$$u_2 = [\operatorname{sgn} u_1]^{n-2} v_2 \quad (4.19)$$

を考える. ただし,  $T_s$  は切り替え時間関数であり,  $v_2$  は (4.13) の変換で与えられたシステムに対する同次有限時間整定制御則であるとする.

このとき, システムの Euler-Filippov の解は有限時間で整定する.  $\square$

### 4.3.3 収束速度の設計

提案した制御器 (4.18) は原点において不連続なものであるため, 原点においてチャタリングが生じるという難点がある. そこで本項では前項で述べた同次性を基にこれらの問題を解決しつつ収束速度の設計を行う.

一般には, 特に局所的には, 有限時間整定を指数安定に含めることが多いが, 本論文では有限時間で整定しない指数安定を単に指数安定と呼び, 有限時間整定と区別して考えることとする.

一般に、ドリフト項のないシステムに対して次の定理が成立する。

**定理 4.2.** システム

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^m Y_i(y) w_i, \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (4.20)$$

に対して、入力

$$w_i = f_i(y) \quad (4.21)$$

を選んだとき、閉ループ系

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^m Y_i(y) f_i(y) \quad (4.22)$$

が漸近安定であるならば、正定関数  $\rho(y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  を用いて入力を

$$w_i = \rho(y) f_i(y) \quad (4.23)$$

としたときも、システムは漸近安定である。□

(証明の概要) システム (4.20) の Lyapunov 関数が存在するときは参考文献 [29] に解説がある。Lyapunov 関数の存在性がいえないときにおいても参考文献 [7] Lemma 2.4 より同様の結果を導くことができる。

前項までの結果より、システム (4.5) に同次有限時間整定制御器を設計することができた。上の定理 4.2 より入力に正定関数を掛けても安定性を損なわないので、同次システムに対して、以下の定理が成立する。

**定理 4.3.** システム (4.5) に対し、 $u_1, u_2$  を代入したシステムが  $\Delta_\varepsilon^{(-k, r_2, \dots, r_n)}$  に対して  $k$  ( $k < 0$ ) 次の同次であるとするとき、新たな入力として

$$\begin{aligned} u'_1 &= \|x\|_{\{r, p\}}^h u_1 \\ u'_2 &= \|x\|_{\{r, p\}}^h u_2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

を選ぶと

1.  $0 \leq h < -k$  のとき

システムは有限時間で整定する.

2.  $h = -k$  のとき

システムは指数安定になる.  $\square$

(証明の概要) 有限時間整定に関しては補題 2.4 から明らかである. 指数安定に関しては参考文献 [29] に説明がある.

また,  $h > -k$  の時には高次の収束になり, 原点から離れた領域では速い収束になるが, 原点近傍での収束は遅くなる. 有限時間整定システムは原点から離れた領域において収束が遅くなり, 原理上有限時間で  $x_1 = 0$  になることによりチャタリングが発生する. そこで, このように入力に同次ノルムを掛けることによりシステムを指数安定にすることによりこれらの問題を解消することができる.

#### 4.3.4 3状態のチェインドシステムに対する制御系設計

本項では前項までに述べた方法を実際に適用して制御器の設計を行う. ここではもっとも簡単な1次のチェインドシステムである, 3状態のチェインドシステムに対する設計問題を考える. 対象とするシステムを以下に示す.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1\end{aligned}\tag{4.25}$$

このシステムに対して 4.3.2 項で述べた手順で入力  $u_1, u_2$  を設計する. まず式 (4.8) を用いて入力  $u_1$  を

$$u_1 = \operatorname{sgn}[T_s(\operatorname{sgn}(x_1), x_2, x_3) - |x_1|] \operatorname{sgn} x_1\tag{4.26}$$

とし、式 (4.13) の変数変換を行う。

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= x_1 \\
 \xi_2 &= x_2 [\operatorname{sgn} u_1] \\
 \xi_3 &= x_3 \\
 v_2 &= [\operatorname{sgn} u_1] u_2
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

このとき、もとのシステム (4.25) は次式のように書きなおすことができる。

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= \operatorname{sgn}[T_s(\xi_2, \xi_3) - |\xi_1|] \operatorname{sgn} \xi_1 \\
 \dot{\xi}_2 &= v_2 \\
 \dot{\xi}_3 &= \xi_2
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

ここでは、式 (2.53) を参考にして  $v_2 = -k_1 |\xi_3|^{2q-1} \operatorname{sgn} \xi_3 - k_2 |\xi_2|^{(2q-1)/q} \operatorname{sgn} \xi_2$  ( $1/2 < q < 1$ ) の形の入力を考える。このとき部分システム

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_2 &= -k_1 |\xi_3|^{2q-1} \operatorname{sgn} \xi_3 - k_2 |\xi_2|^{\frac{2q-1}{q}} \operatorname{sgn} \xi_2 \\
 \dot{\xi}_3 &= \xi_2
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

は拡大  $\Delta_\varepsilon^{(q,1)}$  に対して  $q-1$  次の同次であるから、 $1/2 < q < 1$  のとき有限時間で整定する。ここで、部分システム (4.29) に対する Lyapunov 関数の候補として次式を選ぶ。

$$V = \frac{k_1}{q} |\xi_3|^{2q-1} + b \xi_3 |\xi_2|^{\frac{2q-1}{q}} \operatorname{sgn} \xi_2 + |\xi_2|^2
 \tag{4.30}$$

このとき Lyapunov 関数候補の微分は

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= |\xi_2|^{\frac{q-1}{q}} \left[ \frac{2q-1}{q} b k_1 |\xi_3|^{2q} - \frac{2q-1}{q} k_2 b \xi_3 |\xi_2|^{\frac{2q-1}{q}} \operatorname{sgn} \xi_2 \right. \\
 &\quad \left. - (2k_2 - b) |\xi_2|^2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

のように得られる。したがって、

$$k_1, k_2 > 0
 \tag{4.32}$$

および、補題 2.3 より  $b$  が条件

$$b < \left[ \left( \frac{k_2^{2q}}{k_1} \right)^{\frac{1}{2q-1}} \left( \frac{1}{2q} \right)^{\frac{2q}{2q-1}} \frac{(2q-1)^2}{q} + 1 \right]^{-1} 2k_2 \quad (4.33)$$

かつ

$$b < \left( \frac{2q}{2q-1} \right)^{\frac{2q-1}{2q}} (2k_1)^{\frac{1}{2q}} \quad (4.34)$$

を満たすとき  $V > 0, \dot{V} < 0$  となり、 $V$  はシステム (4.29) に関する Lyapunov 関数となる。このとき、状態  $x$  が常に Area  $B$  であると仮定することにより収束時間保証関数  $T_s$  を以下のように表現することができる。

$$T_s = c \left[ \frac{k_1}{r} |x_3|^{2q-1} + b x_3 |x_2|^{\frac{2q-1}{q}} \operatorname{sgn}(-x_2 \operatorname{sgn} x_1) + |x_2|^2 \right]^{\frac{1-q}{2q-1}} \quad (4.35)$$

ただし、 $b$  は式 (4.33), (4.34),  $c$  は式 (2.42) を満たすように選ぶ。

以上のように設計した制御器をまとめると以下ようになる。

$$\begin{aligned} u_1 &= \operatorname{sgn}[T_s(x_1, x_2, x_3) - |x_1|] \operatorname{sgn} x_1 \\ u_2 &= -k_1 |x_3|^{2q-1} \operatorname{sgn} x_3 \operatorname{sgn} u_1 - k_2 |x_2|^{\frac{2q-1}{q}} \operatorname{sgn} x_2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

明らかに入力  $u_1, u_2$  は入力が発散するような特異点を持たないことが確認できる。

ここまでで不連続な有限時間整定制御器を設計したが、さらに、4.3.3 項の議論を基にチャタリングを回避することができる指数安定な制御器を設計する。まず、式 (4.36) の制御器をシステム (4.25) に代入すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \operatorname{sgn}[T_s(x_1, x_2, x_3) - |x_1|] \operatorname{sgn} x_1 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 |x_3|^{2q-1} \operatorname{sgn} x_3 \operatorname{sgn} u_1 - k_2 |x_2|^{\frac{2q-1}{q}} \operatorname{sgn} x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 \operatorname{sgn}[T_s(x_1, x_2, x_3) - |x_1|] \operatorname{sgn} x_1 \end{aligned} \quad (4.37)$$



したがって、システム全体として、 $\Delta_\varepsilon^{(1-q, q, q)}$  に対して  $q-1$  次の同次である。したがって、入力を

$$\begin{aligned} u_1 &= \|x\|_{\{r,p\}}^{1-q} \operatorname{sgn}[T_s(x_1, x_2, x_3) - |x_1|] \operatorname{sgn} x_1 \\ u_2 &= \|x\|_{\{r,p\}}^{1-q} \left[ -k_1 |x_3|^{2q-1} \operatorname{sgn} x_3 \operatorname{sgn} u_1 \right. \\ &\quad \left. - k_2 |x_2|^{\frac{2q-1}{q}} \operatorname{sgn} x_2 \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

のように選ぶことにより指数安定制御器とすることができる。

#### 4.3.5 3状態のチェインドシステムに対する同次有限時間整定制御則のシミュレーション例

本章では3状態の1次のチェインドシステムに対し、4.3.4項で設計した制御器を用いてシミュレーションを行う。入力の各パラメータとしては、 $q = 11/20, k_1 = 1, k_2 = 1, b = 1, c = 10$  と選び、同次ノルムを

$$\|x\|_{\{r,2\}} = \left( |x_1|^{\frac{2}{1-q}} + |x_2|^{\frac{2}{q}} + |x_3|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.39)$$

とした。

Fig.4.1 に有限整定制御器の状態、Fig.4.2 に有限整定制御器の入力、Fig.4.3 に指数安定制御器の状態、Fig.4.4 に指数安定制御器の入力のシミュレーションの結果を示す。図より両制御器共に原点に全状態が収束していることが読み取れる。また、Fig.4.4 では実際にチャタリングを消去することができていることが確認できる。指数安定制御器のほうが収束が速いように見えるのは、原点より離れた領域においては指数安定制御器のほうが高速に収束するためである。実際に、指数安定制御器のほうが入力の最大値が大きいことが確認できる。

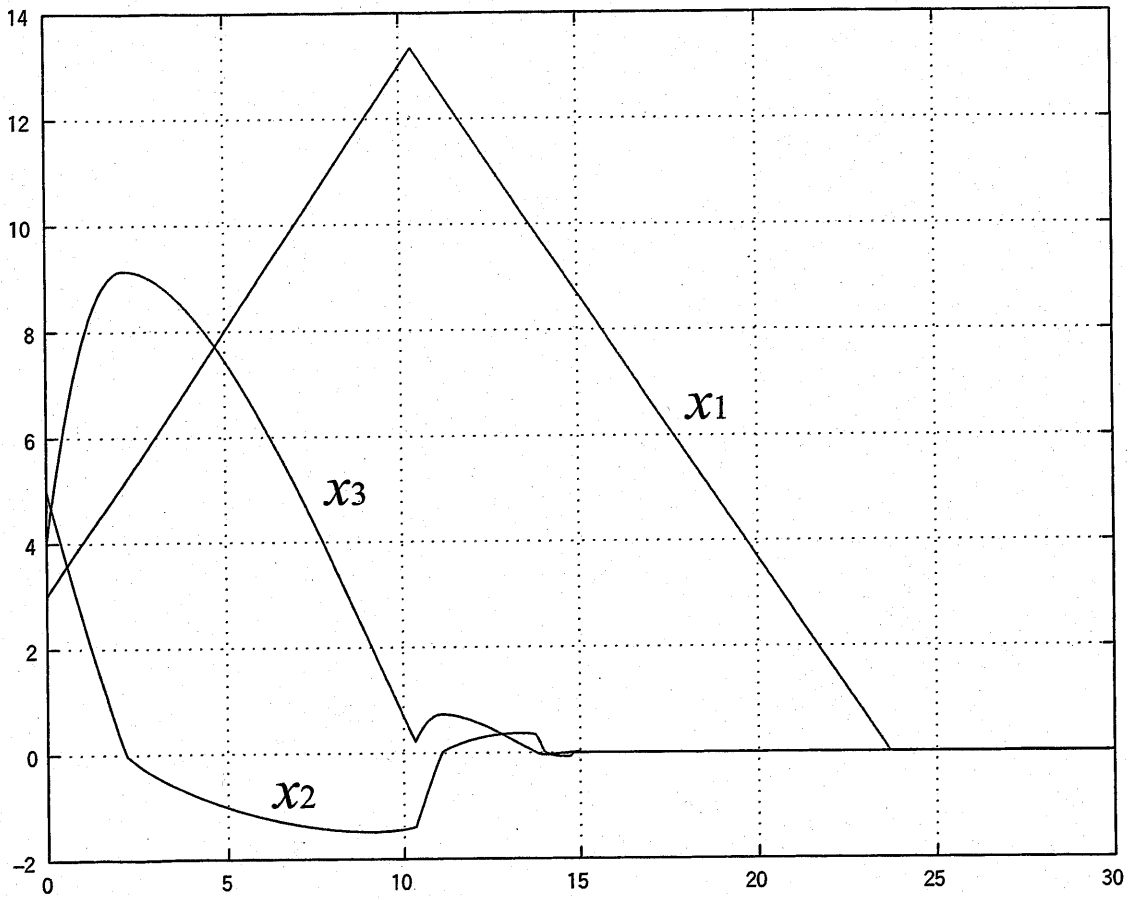


Fig. 4.1 Simulation Results - State: Finite-time Controller

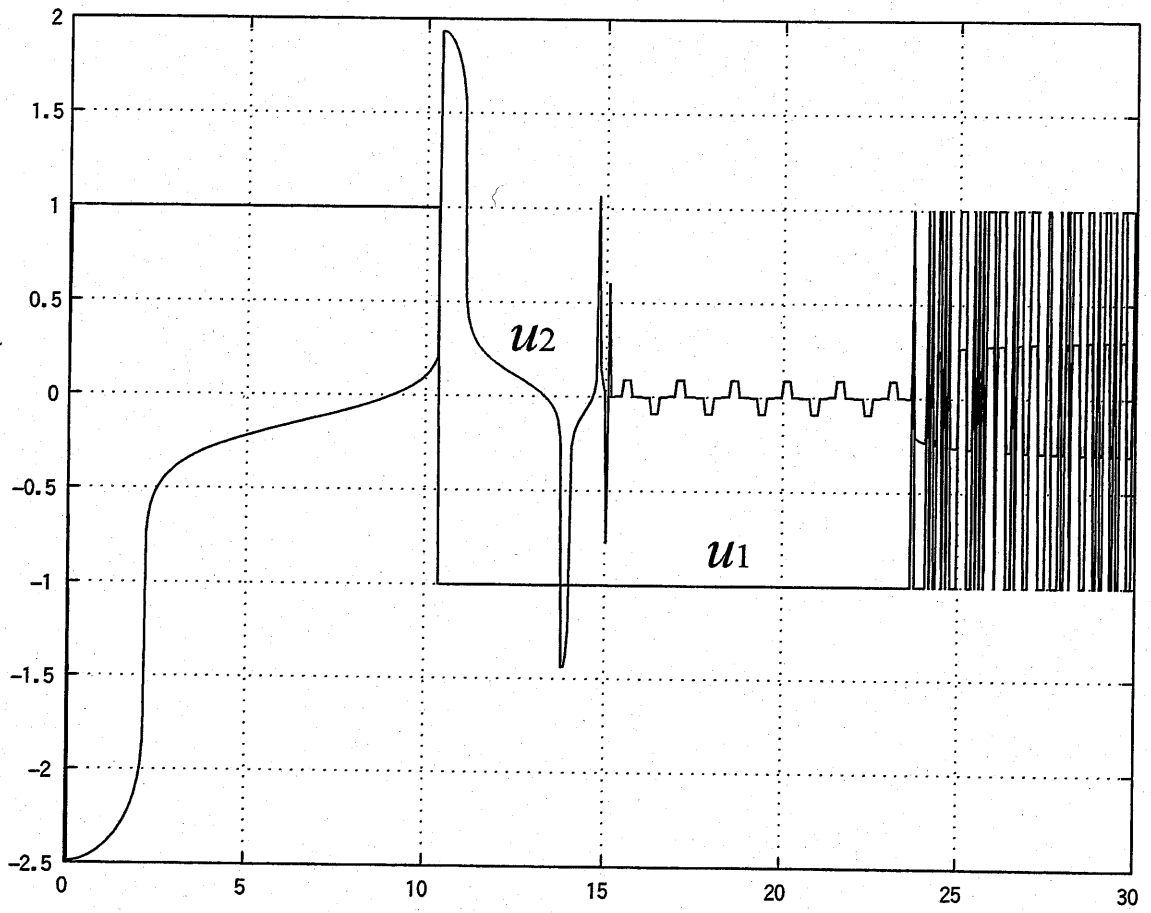


Fig. 4.2 Simulation Results - Input: Finite-time Controller

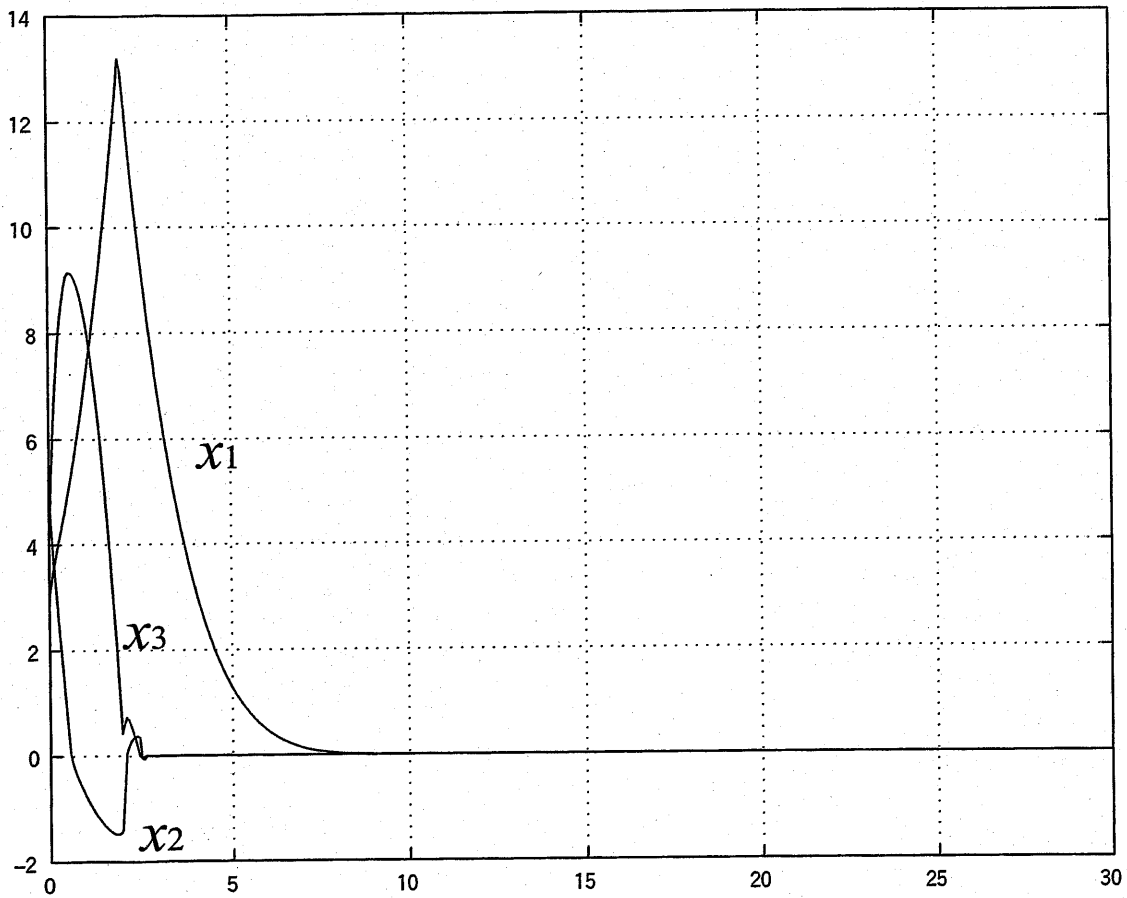


Fig. 4.3 Simulation Results - State: Exponentially-stable Controller

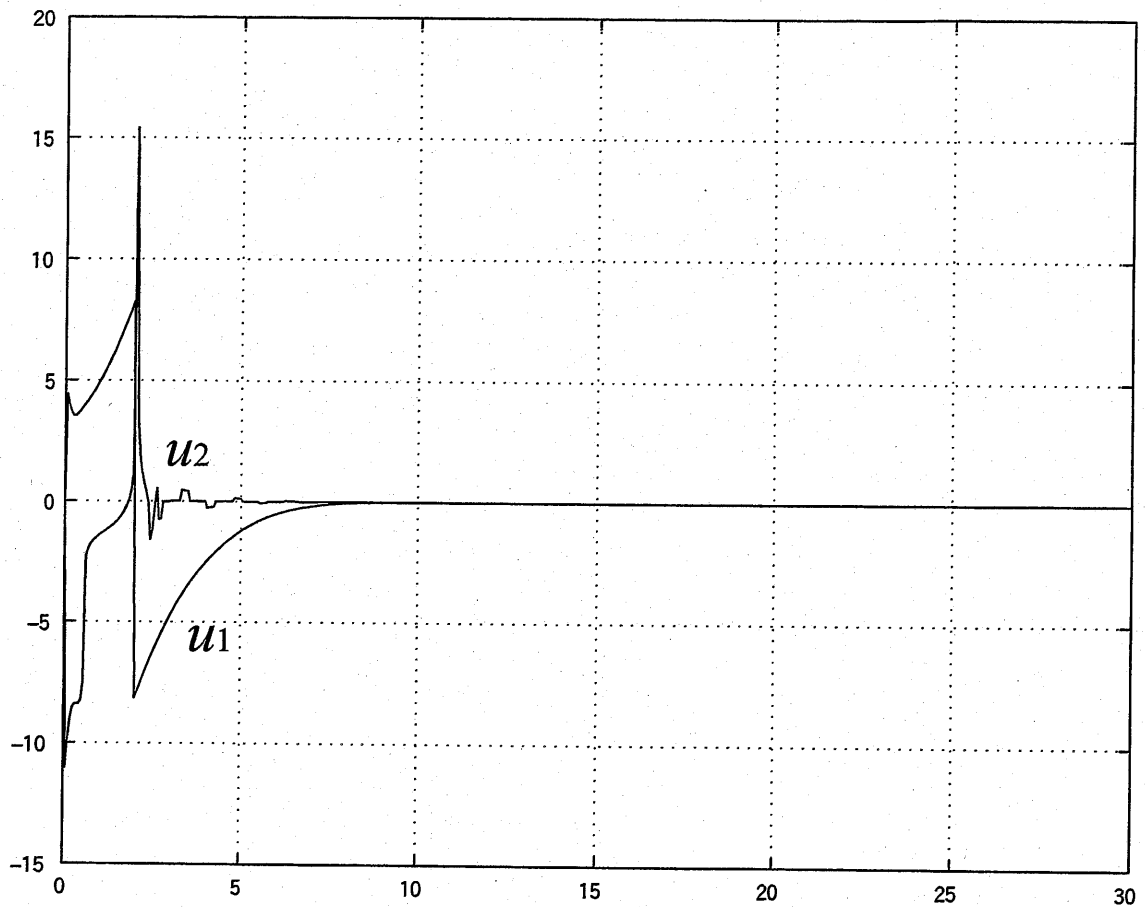


Fig. 4.4 Simulation Results - Input: Exponentially-stable Controller

#### 4.3.6 1次のチェインドシステムに対する同次有限時間整定制御のまとめ

可制御ではあるが、滑らかな時不変状態フィードバックでは状態を平衡点で安定化できないチェインドフォームシステムに対して、不連続な同次制御器を用いることにより安定化を実現する方法を示した。提案した方法は、入力が発散する特異点を持つことなく、しかも有限時間整定あるいは指数安定を選ぶことができ、収束速度を任意に設計することができる。3状態のチェインドシステムに対し実際

に制御器を設計し、コンピュータシミュレーションによりその有効性を確認した。

#### 4.4. 高次チェインドシステムに対する同次有限時間整定制御器

前節では、代表的な非ホロノミックシステムの1つである1次のチェインドシステムに対して不連続な時不変同次有限時間整定制御器を設計した。一方、劣駆動マニピュレータは1次のチェインドシステムに変換できないシステムとして知られている。この劣駆動マニピュレータのようなシステムを扱えるようにチェインドシステム概念を拡張した概念が、高次のチェインドシステムである。ところが、高次のチェインドシステムに対しては、あまり研究がなされていない。そこで、本節では前節で提案した1次のチェインドシステムに対する不連続な時不変同次有限時間整定制御器を高次のチェインドシステムに対して適用可能なように拡張する。

##### 4.4.1 高次のチェインドシステム

高次のチェインドシステムは以下のように表現されるシステムである。

$$\begin{aligned}y_1^{(p_1)} &= u_1 \\y_2^{(p_2)} &= u_2 \\y_3^{(p_3)} &= y_2 u_1 \\y_4^{(p_4)} &= y_3 u_1 \\&\vdots \\y_n^{(p_n)} &= y_{n-1} u_1\end{aligned}\tag{4.40}$$

ここで、 $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$  のとき、システム (4.40) はシステム (4.5) と一致する。この理由から、システム (4.5) を1次のチェインドシステムと呼ぶ。また、1次のチェインドシステムは高次のチェインドシステムの特殊な場合ということもできる。 $p_1, \dots, p_n$  さえ指定すれば高次のチェインドシステムは一意に表現で

きる。そのために、例えば  $p_1 = 2, p_2 = 1, p_3 = 1$  の高次チェインドシステムであれば、2-1-1次チェインドシステムというように、本論文では  $p_i$  の値を頭につけて高次チェインドシステムを指定する。

システム (4.40) は通常の状態空間表現においては以下のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{p_1-1} &= x_{p_1} \\
\dot{x}_{p_1} &= u_1 \\
\dot{x}_{p_1+1} &= x_{p_1+2} \\
&\vdots \\
\dot{x}_{p_1+p_n-1} &= x_{p_1+p_n} \\
\dot{x}_{p_1+p_n} &= x_{p_1+p_n+1}u_1 \\
\dot{x}_{p_1+p_n+1} &= x_{p_1+p_n+2} \\
&\vdots \\
\dot{x}_{p_1+p_n+p_{n-1}-1} &= x_{p_1+p_n+p_{n-1}} \\
\dot{x}_{p_1+p_n+p_{n-1}} &= x_{p_1+p_n+p_{n-1}+1}u_1 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{p_1+p_n+\dots+p_3+1} &= x_{p_1+p_n+\dots+p_3+2} \\
\dot{x}_{p_1+p_n+\dots+p_2-1} &= x_{p_1+p_n+\dots+p_2} \\
\dot{x}_{p_1+p_n+\dots+p_2} &= u_2
\end{aligned} \tag{4.41}$$

ここで、部分状態  $(x_1, \dots, x_{p_1})$  に対する部分システムは線形であり、ある定数  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して  $u_1 = \alpha$  の時には状態  $x$  から  $x_1, \dots, x_{p_1}$  を除いた部分状態  $(x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_n+\dots+p_2})$  に関するシステムは線形の可制御なシステムとなる。本研究ではチェインドシステムをこの2つの部分状態に分けて制御する。今後、部分状態  $(x_1, \dots, x_{p_1})$  に関するシステムを  $\Sigma_1$ 、部分状態  $(x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_n}, \dots, x_{p_1+p_n+\dots+p_2})$

に関するシステムを  $\Sigma_2$  とよぶ。また必要なときには、適当な  $\alpha_0 \in \mathbb{R}^+$  に対して、 $u_1 = \alpha_0$  における部分システム  $\Sigma_2$  を  $\Sigma_{2,\alpha_0}$ 、 $u_1 = -\alpha_0$  に対する部分システム  $\Sigma_2$  を  $\Sigma_{2,-\alpha_0}$  と書く。この定数入力を用いると部分システムが可制御になるという性質は、もし  $\alpha_0$  と  $-\alpha_0$  の2値入力で部分状態  $(x_1, \dots, x_{p_1})$  を安定化することが出来れば、前節で提案した同時有限時間整定制御を高次のチェインドシステムに対しても適用できる可能性があることを示唆している。

実際に、2値のみで安定化する手法は存在し、特によく知られているものに高次スライディングモード制御が挙げられる。

#### 4.4.2 高次チェインドシステムに対する制御

本項では高次スライディングモード制御および高次同時有限時間整定制御を用いて高次チェインドシステムに対する制御則を構成する。

まず基本的なアイデアを簡単に述べる。まずはじめに  $u_1$  を一定入力とし、部分システム  $\Sigma_2$  を有限時間で整定させる。それから、残りの部分システム  $\Sigma_1$  を原点に安定化する。この手法を用いることにより、部分システム  $\Sigma_2$  が原点に収束するまで  $u_1$  を0にすることなく全状態を安定化することができる。

次に、提案手法を解説していく。本研究では  $u_1$  として高次のスライディングモード制御器を用いる。3.8節で述べたように、 $p_1$  次の積分系に対する高次スライディングモード制御器は以下のようなになる。

$$u = -\alpha \operatorname{sgn}(\phi_{p_1-1,p_1}(x_1, x_2, \dots, x_{p_1})) \quad (4.42)$$

ここで、 $\alpha \in \mathbb{R}^+$  は上手に選んだ値である。このときシステムは漸近安定であり、状態  $x$  は必ずスライディング多様体  $\phi_{p_1-1,p_1}$  に収束する。このとき、以下のような性質を満たす収束時間下限関数が存在すると仮定する。

**定義 4.3 (収束時間下限関数).** システム(4.41)を考える。ここで、関数  $T_l: \mathbb{R}^{p_1} \rightarrow \mathbb{R}$  は以下の条件を満たすとき収束時間下限関数であるという。

1. 部分システム  $\Sigma_1$  がスライディング多様体上に存在するとき、すなわち  $x \in \{x | \phi_{p_1-1,p_1}(x) = 0\}$  であるとき、 $T_l = 0$ 。



2.  $T_l$  は  $x_1, \dots, x_{p_1}$  の関数であり, すべての  $\phi_{p_1-1, p_1}(x_1, \dots, x_{p_1}) \neq 0$  を満たす  $x$  に対して  $T_l$  は連続かつ  $T_l(x_1, \dots, x_{p_1}) > 0$ .
3. すべての  $\varepsilon > \|x_1, \dots, x_{p_1}\|$  に対し,  $\delta > T_l(x_1, \dots, x_{p_1})$  を満たす  $\delta$  が存在する.
4.  $u_1 = -\alpha \operatorname{sgn}(\phi_{p_1-1, p_1}(x_1, x_2, \dots, x_{p_1}))$  であるとき状態がスライディング多様体  $\phi_{p_1-1, p_1}$  に到達するまで  $\dot{T}_l \geq -1$ .

□

収束時間下限関数が常に存在することは証明できないが,  $p_1 = 1$  および 2 の場合における収束時間下限関数は  $|\phi_{p_1-1, p_1}|$  と表現できる.  $p_1 = 1$  の場合は明らかであり,  $p_1 = 2$  の場合は 4.4.3 項の例題内で解説する.

また, もし  $u_1$  として

$$u_1 = \alpha \operatorname{sgn}(\phi_{p_1-1, p_1}(x_1, x_2, \dots, x_{p_1})) \quad (4.43)$$

を用いた場合, システムが不安定となることは明らかである.

このように収束時間下限関数が存在する場合, 部分状態  $(x_1, \dots, x_{p_1})$  がスライディング多様体  $\phi_{p_1-1, p_1}$  に到達するまで少なくとも  $T_l$  の時間がかかることが保証できる. したがって, もし我々が部分システム  $\Sigma_2$  を  $T_l$  以内に原点に収束させることが可能であれば, その後部分システム  $\Sigma_1$  はスライディング多様体に拘束されるのですべての状態は原点に有限時間で収束する. この性質を用いて, もし部分システム  $\Sigma_2$  を時間  $T_l$  以内に収束させることが可能な場合には  $u_1 = -\alpha \operatorname{sgn}(\phi_{p_1-1, p_1})$  とし, そうではない場合には  $u_1 = \alpha \operatorname{sgn}(\phi_{p_1-1, p_1})$  とし,  $u_2$  はそれぞれの場合において対応する線形システムに対する同時有限時間整定制御則を用いる. この手法を用いることですべての状態  $x$  は原点に有限時間で整定する.

提案する手法は, 1 次のチェインドシステムに対する同次有限時間整定制御則と同様に, 状態空間を 2 つの領域に分割し, それぞれ異なる目的で制御を行うという手法である. 2 つの領域は前節と同様にそれぞれ *Area A* と *Area B* と呼ぶ. *Area A* は  $u_1 = \alpha \operatorname{sgn}(\phi_{p_1-1, p_1})$  となる領域であり, *Area B* は  $u_1 = -\alpha \operatorname{sgn}(\phi_{p_1-1, p_1})$  となる領域であり, *Area B* においては我々は部分システム  $\Sigma_2$  を時間  $T_u \leq T_l$  で収

束させることが可能である。ここで、関数  $T_u$  は収束時間上限関数であり、以下の条件を満たす常に正值をとる関数である。

**定義 4.4 (収束時間上限関数).** システム (4.41) を考える。また、 $u_1 = -\alpha \operatorname{sgn}(\phi_{p_1-1, p_1})$  および  $u_2$  は部分状態  $\Sigma_2$  を安定化する同次有限時間整定制御であると仮定する。このとき、関数  $T_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が以下の条件を満たすとき  $T_u$  は収束時間上限関数であるという。

1.  $T_u$  は連続でありすべての  $(\operatorname{sgn}(u_1), x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_n}, \dots, x_{p_1+p_n+\dots+p_2})$  に対し  $T_u(\operatorname{sgn}(u_1), x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+\dots+p_n}, \dots, x_{p_1+\dots+p_n+\dots+p_2}) > 0$ .
2.  $\|x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_n}, \dots, x_{p_1+p_n+\dots+p_2}\| < \varepsilon$  であるようなすべての  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  に対して、 $T_u(\operatorname{sgn}(u_1), x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_n}, \dots, x_{p_1+p_n+\dots+p_2}) < \delta$  であるような  $\delta \in \mathbb{R}^+$  が存在する。
3. 時刻  $t_0$  において  $T_u(\operatorname{sgn} u_1(t_0), x_{p_1+1}(t_0), \dots, x_{p_1+p_n}(t_0), \dots, x_{p_1+p_n+\dots+p_2}(t_0)) = T_{u_0}$  であるとき、 $(x_{p_1+1}(t_0+T_{u_0}), \dots, x_{p_1+p_n}(t_0+T_{u_0}), \dots, x_{p_1+p_n+\dots+p_2}(t_0+T_{u_0})) = 0$  が成立する。
4.  $T_u(\operatorname{sgn}(u_1), x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_n}, \dots, x_{p_1+p_n+\dots+p_2}) < T_l$  の領域においては、 $\dot{T}_b \leq -1$ .

□

これは、前節の収束時間上限関数の拡張である。簡単な解釈を行うと、本研究で用いる同次有限時間整定制御則は Lyapunov 関数が既知であるため、前節と同様の手法により収束時間保証関数も簡単に求まり、これを一般に  $T_g$  と書く。ここで、システム  $\Sigma_{2,\alpha}$  に対する収束時間保証関数を  $T_{g,\alpha}$ 、システム  $\Sigma_{2,-\alpha}$  に対する収束時間保証関数を  $T_{g,-\alpha}$  と表わすことにする。このとき、収束時間上限関数  $T_u$  は以下のように表現することができる。

$$T_u = T_{g,-\alpha \operatorname{sgn} \phi_{p_1-1, p_1}} \quad (4.44)$$

結局、我々は高次チェインドシステムに対し以下のような入力を得ることがで

きる。

$$u_1 = \alpha \operatorname{sgn}[T_u - T_l] \operatorname{sgn}(\phi_{p_1-1, p_1}) \quad (4.45)$$

$$u_2 = [\alpha \operatorname{sgn} u_1]^{n-2} v \quad (4.46)$$

ただし  $v$  は  $p_2 + \dots + p_n$  次の積分系に対する同次有限時間整定制御器とする。

このように入力を構成するとき以下の補題が成立する。

**補題 4.2.** システム (4.41) に対し入力として (4.45) 式を代入したシステムを考える。状態  $x$  が常に  $AreaA$  に存在する場合、 $T_u$  は 0 に収束すると仮定する。このとき、 $u_1$  はスライディング多様体に到達するまでに多くとも 1 回の切り替えしか行わない。

証明は補題 4.1 と同様にして行うことができるのでここでは割愛する。すなわち、 $Area A$  から  $AreaB$  への移動は一回しかありえず、しかもその逆は存在しないことが保証できる。

したがって、入力 (4.45) を用いたときにおける  $u_1$  の切り替え時に領域の切り替えが無限に続くような特異な挙動は発生せず、提案手法により状態  $x$  を任意の状態から原点に安定化することができる。

#### 4.4.3 2-1-1 次チェインドシステムに対する制御則

本章では提案手法の有効性を確認するため、以下のようなもっとも簡単な高次チェインドシステムである  $p_1 = 2, p_2 = 1, p_3 = 1$  の高次チェインドシステム、2-1-1 次チェインドシステムに対する制御則を構成する。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 u_1 \\ \dot{x}_4 &= u_2 \end{aligned} \quad (4.47)$$

ここで,  $u_1$  は値として  $\alpha$  または  $-\alpha$  しかとらないと仮定して座標変換

$$\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \xi_3 = x_3, \xi_4 = \alpha x_4 \operatorname{sgn} u_1 \quad (4.48)$$

$$v_1 = u_1, v_2 = \alpha u_2 \operatorname{sgn} u_1 \quad (4.49)$$

を行うと,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= v_1 \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 &= v_2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

が得られる.

$p_1 = 2$  に対応する高次スライディングモード制御器は以下のようなになる.

$$v_1 = -\alpha \operatorname{sgn}(\xi_1^{\frac{1}{2}(\bar{s})} + \xi_2) \quad (4.51)$$

ここで, この  $v_1$  は拘束面

$$\xi_1^{\frac{1}{2}(\bar{s})} + \xi_2 = 0 \quad (4.52)$$

において入力切り替わるが, この面は以下の多様体

$$\xi_1 + \xi_2^{2(\bar{s})} = 0 \quad (4.53)$$

と等価なものである. したがって,

$$\operatorname{sgn}(\xi_1^{\frac{1}{2}(\bar{s})} + \xi_2) = \operatorname{sgn}(\xi_1 + \xi_2^{2(\bar{s})}) \quad (4.54)$$

が成立するから, ここで, Lyapunov 関数候補として

$$V_2 = S^2 = (\xi_1 + \xi_2^{2(\bar{s})})^2 \quad (4.55)$$

とすると,

$$\dot{V}_2 = 2Sx_2 - 4\alpha|\xi_2||S| \quad (4.56)$$

が成立する。したがって、 $\alpha > 1/2$  の時準負定であり、LaSalle の定理より一様に拘束面に収束する。ところが、この式は  $|\xi_2|$  を含むため制御則の切り替えの判定には不向きである。そこで、次の関数  $F_d$  を考える。

$$F_d = |s| = \left| \xi_1^{\frac{1}{2}(\bar{s})} + \xi_2 \right| \quad (4.57)$$

このとき、

$$\dot{F}_d = \frac{|s|}{|\xi_1|^{\frac{1}{2}}} - \text{sgn } \xi_1 \text{sgn } s - \alpha \geq -\alpha - 1 \quad (4.58)$$

となる。したがって、この関数は実は  $-\alpha - 1$  より速い速度で収束することはない。したがって、収束時間下限関数  $T_l$  は以下のように得られた。

$$T_l = \frac{1}{\alpha + 1} F_d \quad (4.59)$$

また、2 次の同次有限時間制御器は次のようになる。

$$v_2 = -l_2 \left( \xi_4^{\frac{1-k}{1+k}(\bar{s})} + l_1^{\frac{1-k}{1+k}} \xi_3^{(1-k)(\bar{s})} \right)^{\frac{1+2k}{1-k}(\bar{s})} \quad (4.60)$$

また、Lyapunov 関数は以下のように得られる。

$$V = \frac{1-k}{2} |\xi_4|^{\frac{2}{1+k}} + l_1^{\frac{1-k}{1+k}} \xi_3^{(1-k)(\bar{s})} \cdot \xi_4 + \left( \frac{1-k}{2} l_1^{\frac{2}{1+k}} + 1 \right) \xi_3^2 \quad (4.61)$$

したがって、収束時間保証関数  $T_g$  は

$$T_g = cV^{\frac{k}{2}} \quad (4.62)$$

となり、収束時間上限関数  $T_u$  は

$$T_u = T_{g, -\alpha \text{sgn } \phi_{1,2}} \quad (4.63)$$

のように得られた。

結局、 $u_1$  を以下のように構成することができた。

$$u_1 = \alpha \operatorname{sgn}(T_u - T_l) \operatorname{sgn}(x_1^{\frac{1}{2}(\bar{s})} + x_2) \quad (4.64)$$

まとめると、2-1-1次チェインドシステムに対する安定化制御器として以下のような入力

$$u_1 = \alpha \operatorname{sgn}(T_u - T_l) \operatorname{sgn}(x_1^{\frac{1}{2}(\bar{s})} + x_2) \quad (4.65)$$

$$u_2 = -l_2 \left( x_4^{\frac{1-k}{1+k}(\bar{s})} \operatorname{sgn} u_1 + l_1^{\frac{1-k}{1+k}} x_3^{(1-k)(\bar{s})} \right)^{\frac{1+2k}{1-k}(\bar{s})} \operatorname{sgn} u_1 \quad (4.66)$$

が得られた。この制御器は実際に入力が発散するような特異点を持たないことが確認できる。

この制御器を用いたときのシミュレーション結果は以下のとおりである。すべての状態量が原点に有限時間で収束していることが確認できる。

#### 4.4.4 高次のチェインドシステムに対する同次有限時間整定制御のまとめ

本節では、前節で提案した1次のチェインドシステムに対する不連続な同次有限時間整定制御器を拡張し、従来困難とされていた高次チェインドシステムに対し不連続な制御器の提案を行った。提案手法は一切のフィードフォワード要素を含まず、しかも入力が発散する特異点も存在しない。

さらに、もっとも簡単な高次チェインドシステムに対して実際に制御則を設計し、コンピュータシミュレーションによりその有効性を確認することが出来た。

### 4.5. マルチジェネレータを有する非ホロノミックシステムに対する有限時間整定制御器

本節では、マルチジェネレータを有する非ホロノミックシステムの安定化問題を扱う。ねこひねり問題 [40] や、平板ではさんだ球の操りなどは、非ホロノミッ

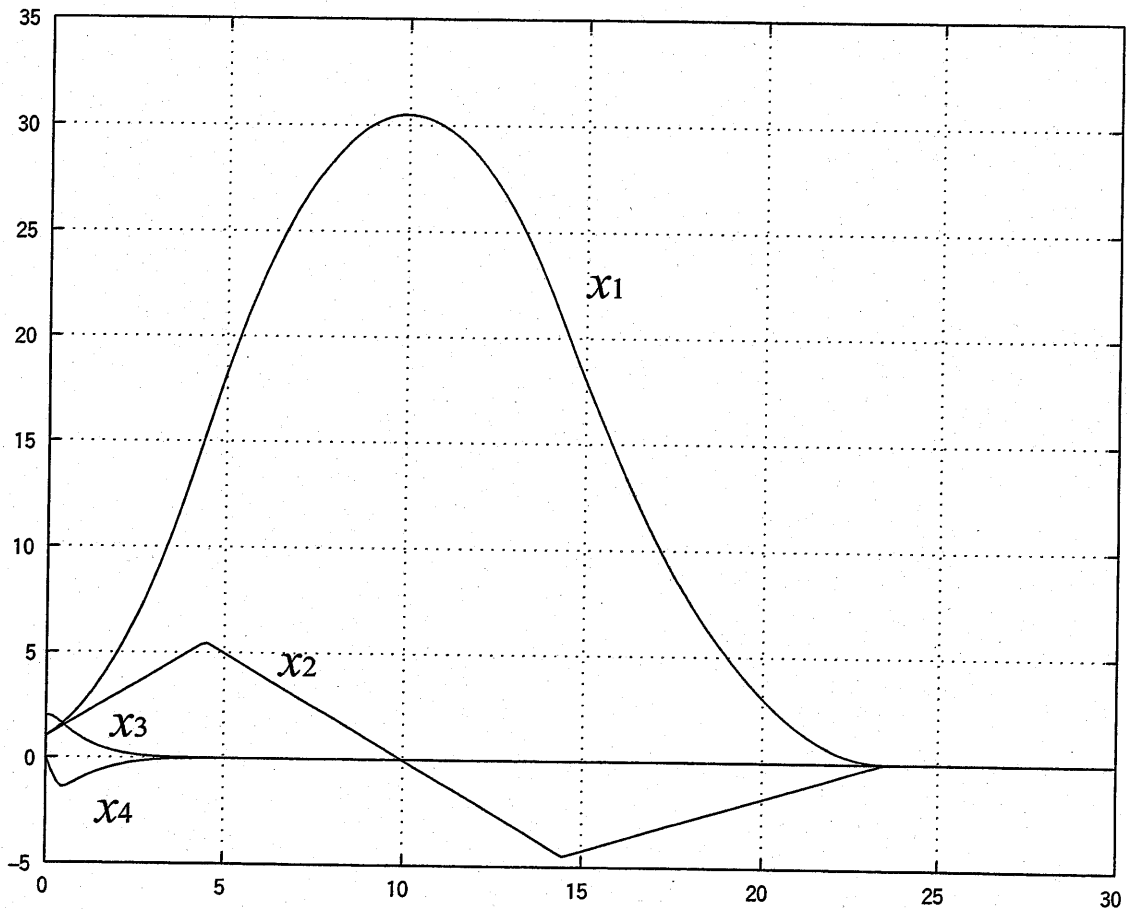


Fig. 4.5 Simulation Results: State

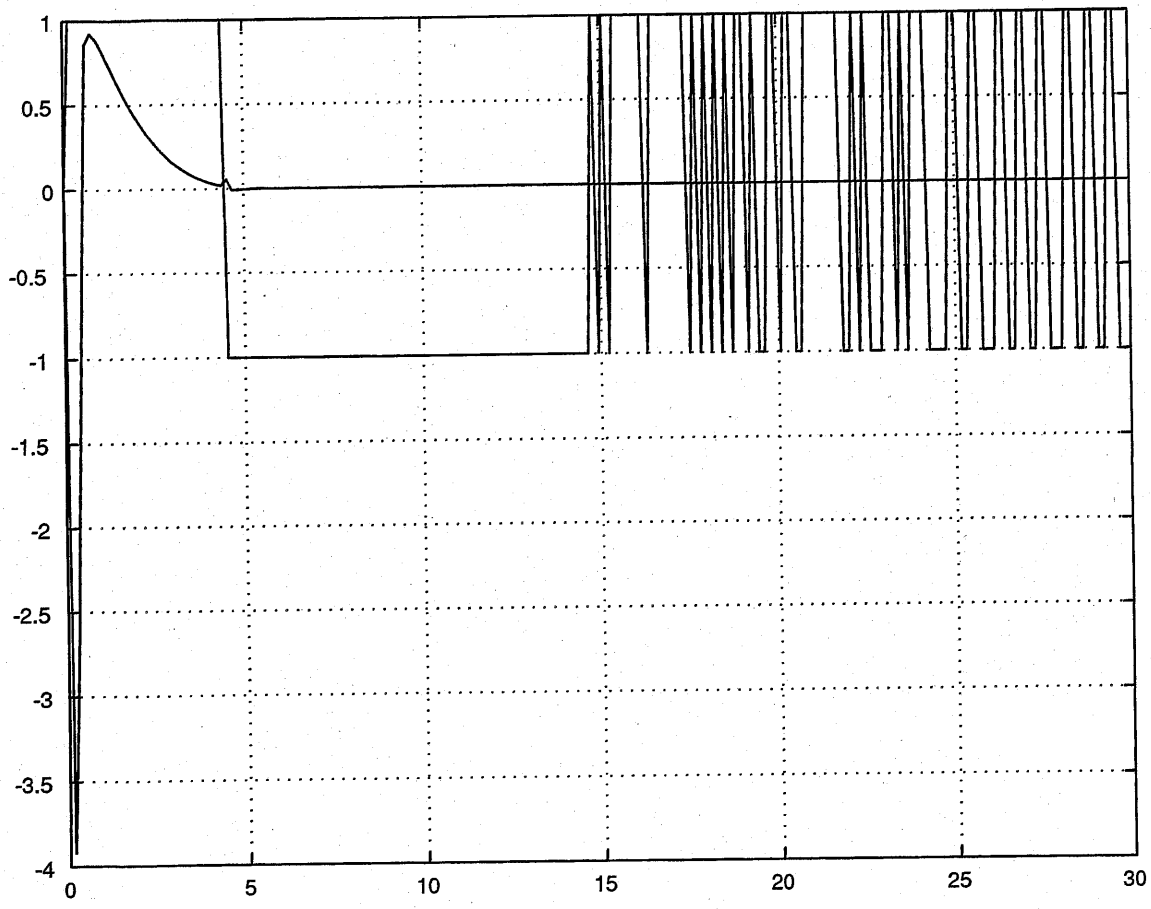


Fig. 4.6 Simulation Results: Input



クシステムの中でもとりわけ安定化が困難なシステムとして知られている。このようなシステムは、マルチジェネレータ非ホロノミックシステムと呼ばれ、シングルジェネレータシステムと制御 Lie 代数の構造が異なることが知られている。

このマルチジェネレータシステムに対しては、まだあまり研究がされておらず、数少ない制御手法が提案されているだけである。

しかし、提案されている手法には問題が残されている。不変多様体の考え方をを用いた切り替え制御では無限回の制御則の切り替えが必要であり、Lyapunov 関数を用いた制御則は高次のシステムへと拡張することができない。また、両手法ともに、安定性の保証はできていない。

そこで、これらの問題を解決するために、本節では不変多様体の考えを用いた時不変不連続制御器を提案する。提案手法では、有限回の切り替えでシステムは有限時間で整定する。ただし、測度 0 の集合上でのみ定義される入力を用いているため、微分方程式の解としてはいかなるものも適用できないことに注意しなくてはならない。

#### 4.5.1 First-Order System

最初に、最も簡単なマルチジェネレータ非ホロノミックシステムである 6 状態 3 入力の First-Order-System(FOS) を考えよう。このシステムは次式で与えられる。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

ここで、 $x = [x_1, x_2, \dots, x_6]^T$  である。

このシステム (4.67) が First-Order-System, すなわち 1 次システムと呼ばれる理由について少し述べよう。システム (4.67) を次式のように書き直す。

$$\dot{x} = g_1(x_2, x_3)u_1 + g_2(x_3)u_2 + g_3u_3 \quad (4.68)$$

ここで,  $g_1 = (1, 0, 0, x_2, x_3, 0)^T$ ,  $g_2 = (0, 1, 0, 0, 0, x_3)^T$ ,  $g_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$  である. このとき,  $x_2, x_3 \neq 0$  であれば

$$\text{span}\{g_1, g_2, g_3, [g_1, g_2], [g_1, g_3], [g_2, g_3]\} = \mathbb{R}^6 \quad (4.69)$$

であり,  $g_i$  の 1 次の Lie かつこ積まででディストリビューションが構成される. このため, First-Order-System と呼ばれる.

このシステムは,  $u_1 = 0$  であれば  $x_1, x_4, x_5$  は動かないという性質を持つ. この性質を利用してシステムを安定化しよう. まず, Step 1 で  $x_1, x_4, x_5$  を安定化する. それから, Step 2 で残りの状態量を安定化する. この手法により, 全状態量を安定化することができる.

Step 1 および Step 2 では, 前節までに述べたチェインドシステムに対する同次有限時間整定制御を用いる. 各ステップでの制御則は以下のようなものである.

Step 1a:

状態変数  $x_2, x_3, x_4, x_5$  を時間  $T_{s1} + T_{s2} < |x_1|$  以内に有限時間整定できる領域に移動させる. ただし,  $T_{s1}$  および  $T_{s2}$  はそれぞれ 3 次のチェインドシステムに対する切り替え時間保証関数である

Step 1b:

$u_1 = -\text{sgn } x_1$  として,  $u_2, u_3$  は状態変数  $x_2, x_3, x_4, x_5$  を有限時間  $|x_1|$  以内に整定させる. ここで,  $u_1 = -\text{sgn } x_1$  のとき,

$$\frac{d}{dt}(T_{s1} + T_{s2}) \leq -1 \quad (4.70)$$

であることに注意しよう.

Step 2a:

$u_1 = 0$  として, 状態変数  $x_3, x_6$  を時間  $T_{s3} < |x_2|$  以内に有限時間整定できる領域に移動させる. ただし,  $T_{s3}$  は 3 次のチェインドシステムに対する切り替え時間保証関数である.

Step 2b:

$u_1 = 0, u_2 = -\text{sgn } x_2$  とし,  $u_3$  は状態変数  $x_3, x_6$  を有限時間  $x_2$  以内に整定させる.

これらの Step によりすべての状態量を原点に安定化することができる.

議論は6状態3入力のFOSに限定して行ったが、岩谷ら[41]と同様の手法により、一般のFOSに対して適用可能である。

#### 4.5.2 6状態3入力のFOSに対する制御器の設計

本節では、前節で述べた制御器を具体的に設計する。本節では、チェインドシステムに対する同次有限時間整定制御を用いることにより、各ステップのaとbをまとめて設計する。

Step1

チェインドシステムに対する同次有限時間整定制御を用いて、 $u_1, u_2, u_3$ を以下のように設計する。

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \text{sgn}[T_{s1}(\text{sgn } x_1, x_2, x_4) \\
 &\quad + T_{s2}(\text{sgn } x_1, x_3, x_5)] \text{sgn } x_1 \\
 u_2 &= -k_1|x_4|^{2r-1} \text{sgn } x_4 \text{sgn } u_1 \\
 &\quad - k_2|x_2|^{\frac{2r-1}{r}} \text{sgn } x_2 \\
 u_3 &= -k_1|x_5|^{2r-1} \text{sgn } x_5 \text{sgn } u_1 \\
 &\quad - k_2|x_3|^{\frac{2r-1}{r}} \text{sgn } x_3,
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 T_{s1} &= c \left[ \frac{k_1}{r} |x_4|^{2r-1} \right. \\
 &\quad \left. + bx_4|x_2|^{\frac{2r-1}{r}} \text{sgn}(-x_2 \text{sgn } x_1) + |x_2|^2 \right]^{\frac{1-r}{2r-1}}
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
 T_{s2} &= c \left[ \frac{k_1}{r} |x_5|^{2r-1} \right. \\
 &\quad \left. + bx_5|x_3|^{\frac{2r-1}{r}} \text{sgn}(-x_3 \text{sgn } x_1) + |x_3|^2 \right]^{\frac{1-r}{2r-1}},
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

ただし、 $k_1, k_2 > 0$ であり、 $b$ は次の2つの条件を満たす。

$$b < \left[ \left( \frac{k_2^{2r}}{k_1} \right)^{\frac{1}{2r-1}} \left( \frac{1}{2r} \right)^{\frac{2r}{2r-1}} \frac{(2r-1)^2}{r} + 1 \right]^{-1} 2k_2 \tag{4.74}$$

$$b < \left( \frac{2r}{2r-1} \right)^{\frac{2r-1}{2r}} (2k_1)^{\frac{1}{2r}}. \quad (4.75)$$

このとき、状態変数  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  は有限時間で原点に収束する。

Step 2

Step 1 と同様に設計すると、

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= \operatorname{sgn}[T_{s3}(\operatorname{sgn} x_2, x_3, x_6)] \operatorname{sgn} x_1 \\ u_3 &= -k_1 |x_6|^{2r-1} \operatorname{sgn} x_6 \operatorname{sgn} u_2 - k_2 |x_3|^{\frac{2r-1}{r}} \operatorname{sgn} x_3, \end{aligned} \quad (4.76)$$

が得られた。ここで、 $k_1, k_2$  は Step 1 と同様であり、 $T_{s3}$  は  $T_{s1}$  や  $T_{s2}$  と同じ関数である。

このようにして、すべての状態量を原点に有限時間整定させる制御則を構築することができた。

このようにして設計した制御則の有効性をコンピュータシミュレーションにより検証する。Fig. 4.7 に提案した制御則を用いた際の状態量の変化を示し、Fig. 4.8 に入力の変化を示す。

### 4.5.3 5 状態 2 入力の 2 つのジェネレータを有する非ホロノミックシステムに対する制御

本節では、5 状態 2 入力の 2 つのジェネレータを有する非ホロノミックシステムに対する安定化問題を扱う。このシステムは安定化制御則を構築することがもつとも困難なシステムの 1 つとして知られている。このシステムは次式で表現される。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_2 & -x_1 \\ x_3 & 0 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (4.77)$$

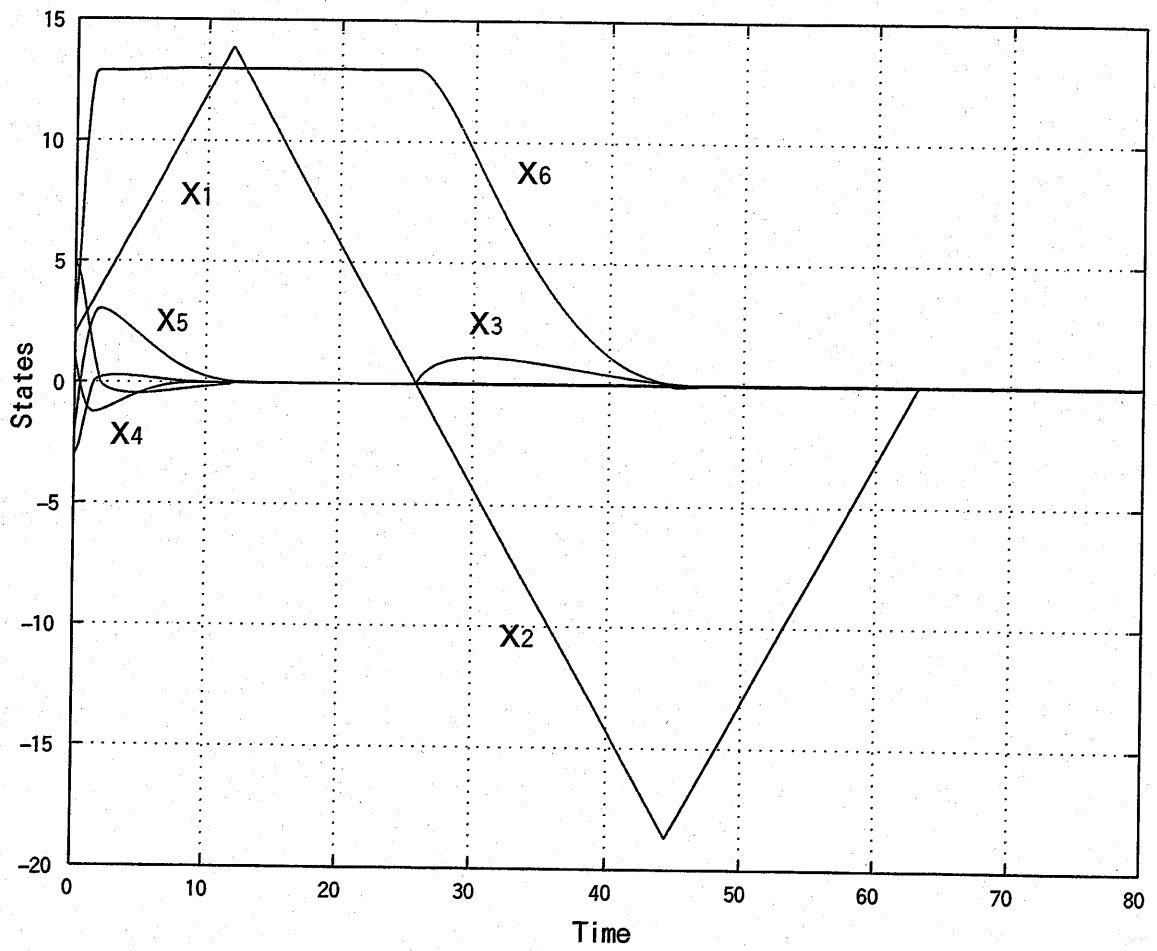


Fig. 4.7 Simulation Results: First-Order System

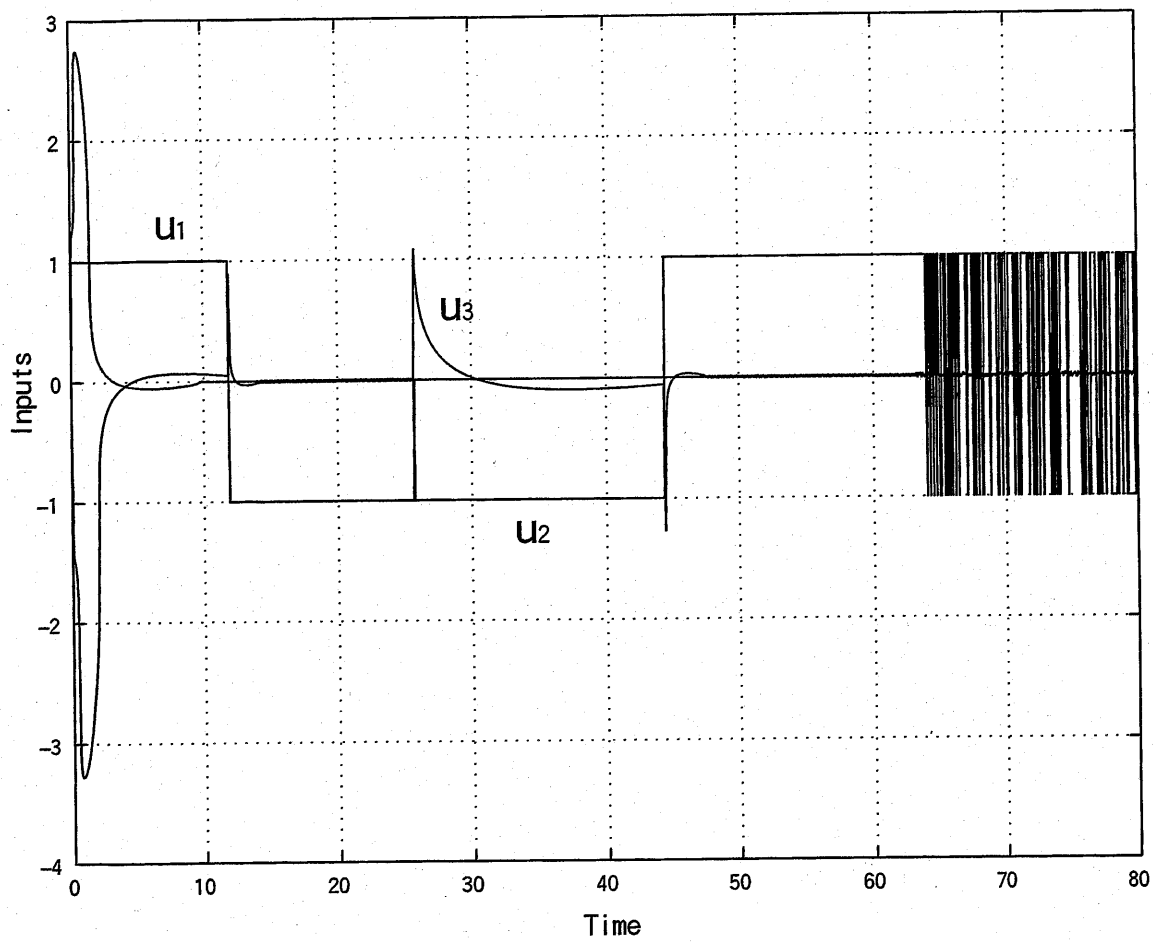


Fig. 4.8 Simulation Results: First-Order System

ただし,  $x = [x_1, x_2, \dots, x_5]^T$ .

$x_3 = 0$  の場合には, いかなる入力を用いても  $x_4, x_5$  を動かすことはできない. 以下で述べる制御則の基本的なアイデアはこの性質に基づく.

具体的には, 2つに分かれる. Step 1 では, 状態変数  $x_3, x_4, x_5$  を 0 に収束させる. それから, Step 2 で  $x_1, x_2$  を 0 に収束させる. しかし,  $x_3, x_4, x_5$  を 0 に収束させるのは難しいので, Step 1 を Step 1a から Step 1d に分ける. 各 Step の具体的な内容は以下で述べる.

Step 1a

$$u_1 = -\frac{x_2(x_3 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})}{(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.78)$$

$$u_2 = \frac{x_1(x_3 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})}{(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.79)$$

のように選ぶ. ここで, もし  $x_1, x_2 \neq 0$  であるならば,

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = 0 \quad (4.80)$$

$$\frac{d}{dt}(x_3 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) = -\frac{x_3 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.81)$$

となり,  $x_3$  は有限時間で  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  に収束する.

Step 1b

$$u_1 = -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad (4.82)$$

$$u_2 = -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \quad (4.83)$$

のように選ぶ. このとき,  $x_1, x_2$  は有限時間で 0 に収束し,  $x_3$  は Step 1b の初期値を保つ.

Step 1c

以下のような補助変数  $\xi$  を考える.

$$\xi = \frac{1}{2}x_3^2 - x_2x_4 + x_1x_5. \quad (4.84)$$

Then,

$$\dot{\xi} = x_5 u_1 - x_4 u_2. \quad (4.85)$$

ここで,  $x_4, x_5 = 0$  のとき

$$x_3 = \xi = 0 \quad (4.86)$$

である. もし,  $|x_5| > |x_4|$  であるならば,

$$u_1 = -|\xi|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn} x_5 \quad (4.87)$$

$$u_2 = 0, \quad (4.88)$$

のように選び, そうでないならば,

$$u_1 = 0 \quad (4.89)$$

$$u_2 = |\xi|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn} x_4. \quad (4.90)$$

とする. このとき,  $\xi$  の時間微分はそれぞれ

$$\dot{\xi} = -|x_5| |\xi|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} \xi \quad (4.91)$$

および

$$\dot{\xi} = -|x_4| |\xi|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} \xi \quad (4.92)$$

となる.  $|x_5|$  または  $|x_4|$  のどちらかはこの Step で値が保たれることに注意しよう.

十分な時間が経過すると,  $\xi$  は 0 に整定する. また,  $x_3$  は Step 1c の初期値を保つことに注意する.

Step 1d

$$u_1 = -\frac{x_4 \operatorname{sgn} x_3}{\sqrt{x_4^2 + x_5^2}} \quad (4.93)$$

$$u_2 = -\frac{x_5 \operatorname{sgn} x_3}{\sqrt{x_4^2 + x_5^2}}. \quad (4.94)$$



のように選ぶ。このとき、 $x_4, x_5$  は $\xi = 0$ を保ちながら原点に有限時間で整定する。

これらの手順によって $x_3, x_4, x_5$  は原点に収束する。

Step 2

$$u_1 = -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad (4.95)$$

$$u_2 = -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \quad (4.96)$$

のように選ぶ。十分な時間が経過するとき、すべての状態量は原点に整定する。

提案した制御器をコンピュータシミュレーションを用いて有効性を確認する。

Fig.4.5.3, Fig.4.5.3 にシミュレーション結果を示す。

## 4.6. 4章のまとめ

本章では、チェインドシステムに対して同次有限時間整定制御則を提案し、コンピュータシミュレーションによりその有効性を確認した。

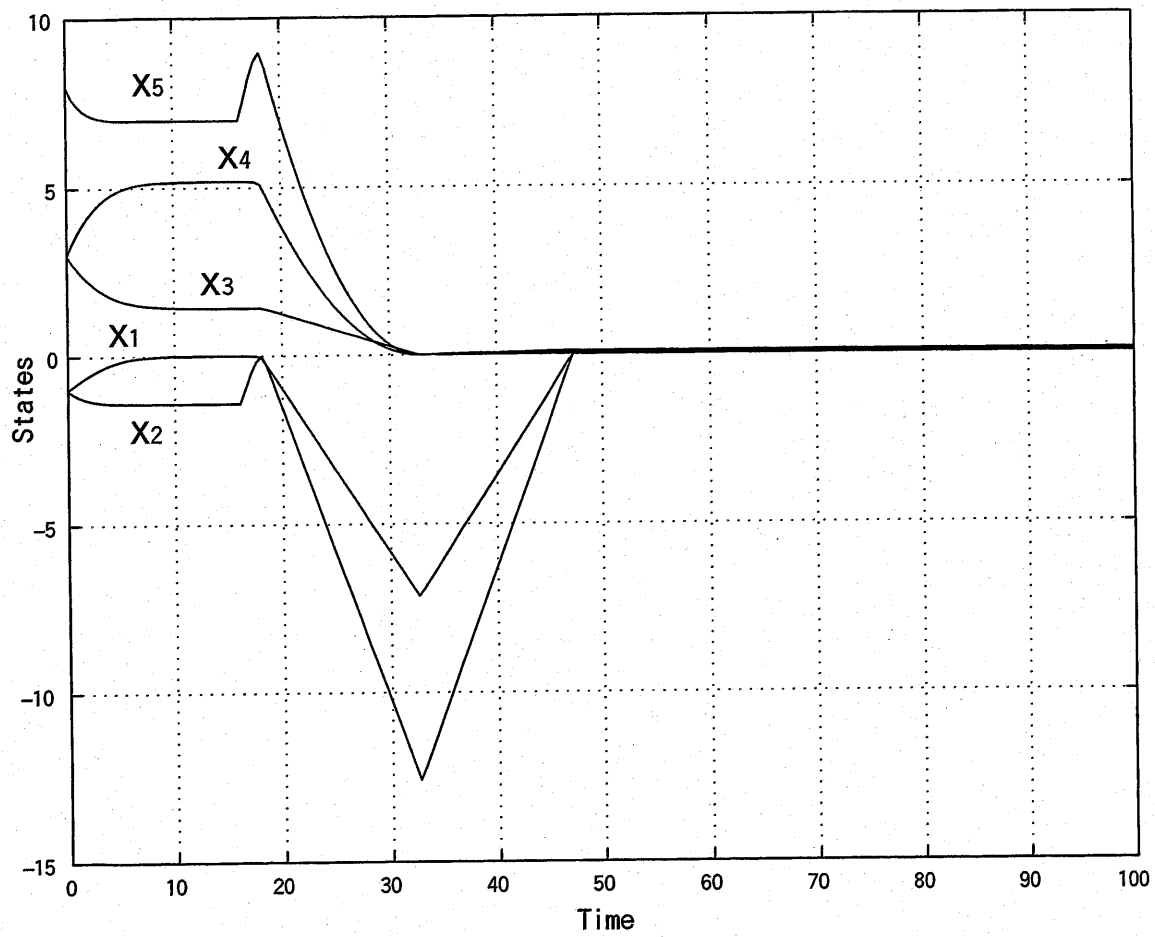


Fig. 4.9 Simulation Results: five variables system with two generators

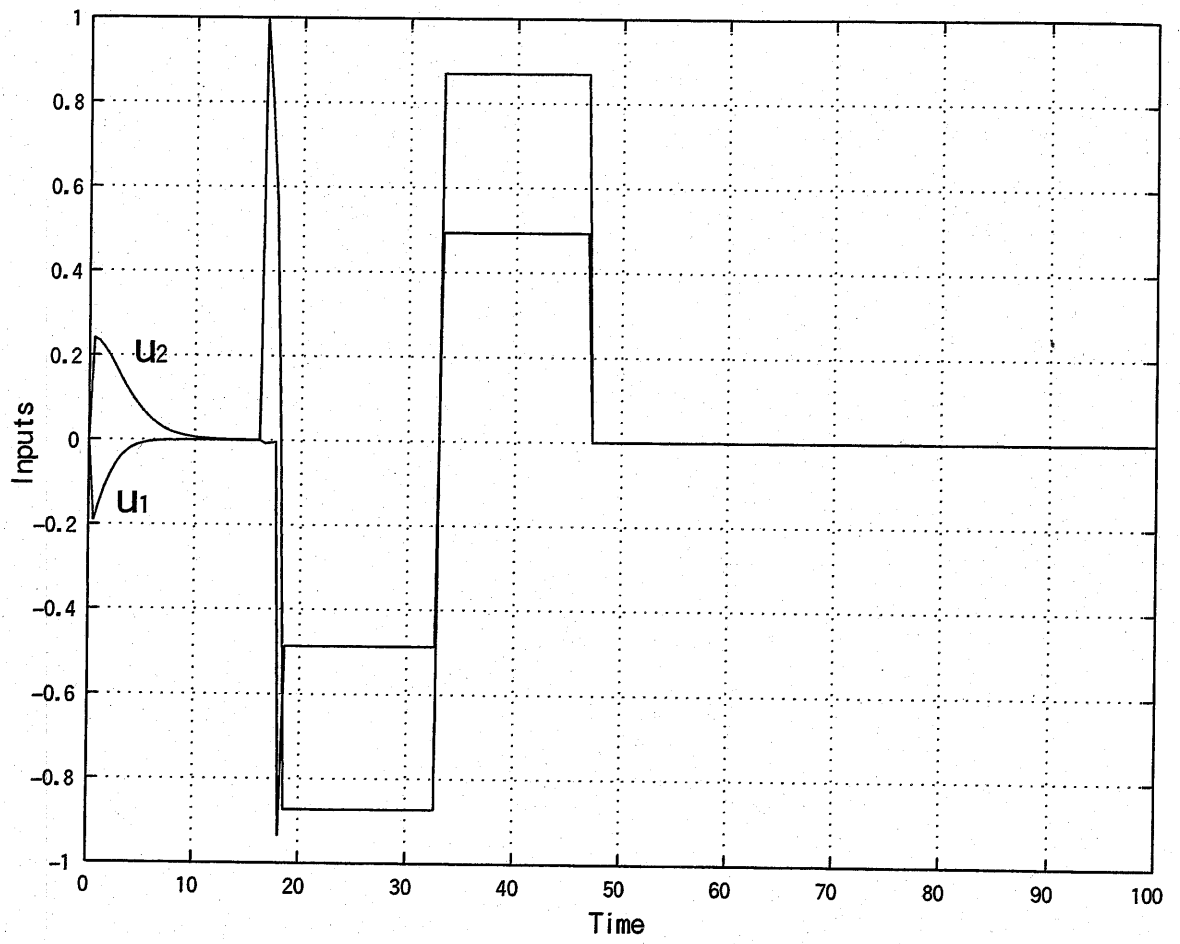


Fig. 4.10 Simulation Results: five variables system with two generators

## 第5章 結論と今後の展望

### 5.1. 本論文の結論

同次システムは、近年制御理論において非常に重要な役割を果たしているシステムである。同次システムは非線形システムではあるが、線形システムと同様に、局所的な性質が大域的な性質と一致するという非常に良い性質をもっているうえに、線形システムにはない、有限時間整定制御器が構成できる、あるいは制御器を設計することが非常に困難なシステムとして知られている非ホロノミックシステムに対する制御則の設計にも適用可能などといった良い性質を持っている。

同次システムには不連続なものも数多く存在する。例えば、スライディングモード制御器のロバスト性を維持しながら有限整定性を有する高次スライディングモード制御器や、特定の条件下で厳密に信号の微分を求めることが可能な厳密微分器などが不連続な同次システムである。ところが、不連続な同次システムについてはほとんど研究がなされてこなかった。また、非ホロノミックシステムに対する時不変同次制御器についてはこれまで議論がされていなかった。

本論文では、最初に基本的な概念である連続な同次システムの持つ性質について説明し、同次性の非常に有用な応用例である同次有限時間整定制御について考察した。

不連続なシステムに対する Lyapunov の定理の逆定理は Clarke らのものと Rosier のものの2種類が知られているが、仮定がことなっているため利用しにくいものであった。これに対し、本論文ではこれら2種類の Lyapunov の定理の逆定理の仮定を整理し、一つにまとめた定理を導いた。平衡点の性質は制御理論において非常に重要であるが、本論文ではディファレンシャル・インクルージョンの平衡点に関して議論を行った。同次システムの中には不連続な同次システムも数多く

存在しているが、本論文では、同次ディファレンシャル・インクルージョンを新たに提案し、同次ディファレンシャル・インクルージョンに対する Lyapunov の定理の逆定理を与え証明した。さらに、同次 Lyapunov 関数を用い漸近安定なディファレンシャル・インクルージョンの収束性能と同次ディファレンシャル・インクルージョンのロバスト性を明らかにした。続いて、不連続な同次システムの代表例である高次スライディングモード制御器と厳密微分器について安定性の解析を行った。

非ホロノミックシステムは、連続な時不変状態フィードバックでは安定化できないことが知られている制御器の構成が難しいシステムである。本論文では、そのような非ホロノミックシステムに対し新たに時不変の不連続同次制御器を提案した。まず、代表的な非ホロノミックシステムである1次のチェインドシステムに対して、有限時間で整定し、制御入力が無限大に発散する特異点を持たず、収束速度の設定が可能な不連続時不変同次制御器を提案した。さらに、高次のチェインドシステムに対して、1次のチェインドシステムに対する同次制御則を拡張し、有限時間で整定し、制御入力が無限大に発散しない不連続時不変同次制御器を提案した。最後に、マルチジェネレータの非ホロノミックシステムに対し、不連続な時不変同次有限時間整定制御器を設計し、安定性を証明した。本論文で提案する手法は、これまで提案されている手法と異なり、有限時間で整定し、制御則の構築が簡単で、制御入力が無限大に発散する特異点を持たないという優れた性質を持つものであり、同次性の有用性を確認することができた。

## 5.2. 今後の展望

前章で述べたように、本論文では不連続な同次システムに対してさまざまな検討を行った。しかし、ディファレンシャル・インクルージョンを用いて非ホロノミックシステムに対して議論することはできない。したがって、新たな解の概念を生み出す必要がある。また、その際における同次 Lyapunov 関数が存在するかどうかも非常に大きな問題である。

また、本論文では1階、2階の厳密微分器に対して安定性を保証したが、一般

的な厳密微分器の安定性の保証は出来ていない。これは今後の課題である。

非ホロミックシステムに対する制御としては、0でない測度の切り替え領域を有するマルチジェネレータシステムに対する制御則が大きな問題として残されている。

## 謝辞

本研究を進めるに当たって、研究方針の指導など、非常に熱心に指導していただいた、西谷教授に深く感謝いたします。

また、疑問点に対して的確な指示をいただき、また非線形制御に関するご指導をいただきました山下助教授に深く感謝いたします。

最後に、公私ともどもお世話になりました西谷研究室の皆様に深く感謝いたします。

## 参考文献

- [1] A. Bacciotti, L. Rosier: Liapunov Functions and Stability in Control Theory, *Lecture Notes in Control and Information Sciences 267*, Springer, (2001).
- [2] S. P. Bhat, D. S. Bernstein: Finite-time stability of homogeneous systems, *Proc. of ACC*, 2513/2514 (1997).
- [3] S. P. Bhat, D. S. Bernstein: Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators, *IEEE trans. Auto. Contr.*, **43**, 678/682 (1998).
- [4] S. P. Bhat, D. S. Bernstein: Finite-time stability of continuous autonomous systems, *SIAM J. Contr. Opti.*, **38-3**, 751/766 (2000).
- [5] F. H. Clarke: Optimization and Nonsmooth Analysis, *Classics in Applied Mathematics 5*, SIAM, (1990).
- [6] F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski: Nonsmooth Analysis and Control Theory, Springer, (1998).
- [7] F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern: Asymptotic stability and smooth Lyapunov functions, *J. of Differential Equations*, **149**, 69/114 (1998).
- [8] W. P. Dayawansa, C. F. Martin, S. Samelson: Asymptotic stabilization of a generic class of three dimensional homogeneous quadratic systems, *Systems and Control Letters*, **24**, 115/123 (1995).
- [9] A. F. Filippov: Differential equations with discontinuous right-hand side, *Amer. Math. Soc. Translations Ser. 2*, **42**, 199/231 (1964).
- [10] A. F. Filippov: Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side, *SIAM J. Contr.*, **5**, 609/621 (1967).
- [11] V. T. Haimo: Finite time controllers, *SIAM J. Contr. and Opti.*, **24-4**, 760/770 (1986).



- [12] H. Hermes: Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls, *Differential Equations, Stability and Control* (S. Elaydi ed.), Dekker, 249/260 (1991).
- [13] Y. Hong, J. Huang, Y. Xu: On an output feedback finite-time stabilization problem, *Proc. of 38th CDC*, 1302/1307 (1999).
- [14] Y. Hong:  $H_\infty$  control, stabilization, and input-output stability of nonlinear systems with homogeneous properties, *Automatica*, **37-6**, 819/829 (2001).
- [15] Y. Hong, J. Huang, Y. Xu: On an output feedback finite-time stabilization problem, *IEEE Trans. on Auto. Contr.*, **46-2**, 305/309 (2001).
- [16] Y. Hong: Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems, *Sys. Contr. Lett.*, **46**, 231-236 (2002).
- [17] M. Jankovic: Adaptive nonlinear output feedback tracking with a partial high-gain observer and backstepping, *IEEE Trans. on Auto. Contr.*, **42-1**, 106-113.
- [18] M. Kawski: *Contr.-Theory and Advanced Tech.*, **6-4**, 497-516.
- [19] M. Kawski: *IFAC NOLCOS95*, 147/152 (1995).
- [20] H. Kiyota, M. Sampei: On a control for a class of nonholonomic systems with drift using time-state control form, *37th IEEE CDC*, TP14-6 (1998).
- [21] J. Kurzweil: On the inversion of Ljapunov's second theorem on stability of motion, *AMS Translations Series 2*, **24**, 19/77 (1963).
- [22] J-B. Pomet: Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift, *Systems and Control Letters*, **18**, 147/158 (1992).

- [23] B. E. Paden, S. S. Sastry: A calculus for computing Fillipov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators, *IEEE trans. on Circuits and Systems*, **34-1**, 73/82 (1987).
- [24] L. Rosier: Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field, *Systems & Control Letters*, **19**, 467/473 (1992).
- [25] L. Rosier: Smooth Lyapunov functions for discontinuous stable systems, *Set-Valued Analysis*, **7**, 375/405 (1999).
- [26] L. Rosier, E. D. Sontag: Remarks regarding the gap between continuous, Lipschitz, and differentiable storage functions for dissipation inequalities appearing in  $H_\infty$  control, *Systems and Control Letters*, **41**, 237-249 (2000).
- [27] L. P. Rothschild, E. M. Stein: Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, *Acta Math.*, **137**, 247/320 (1976).
- [28] R. Sepulchre, D. Aeyels: Homogeneous Lyapunov functions and necessary conditions for stabilization, *Math. Control Signals Systems*, **9**, 34/58 (1996).
- [29] R. T. M'Closkey, R. M. Murray: Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback, *IEEE trans. on Auto. Contr.*, **45-5**, 614/628 (1997).
- [30] A. Levant: Universal SISO sliding-mode controllers with finite-time convergence, *IEEE trans. on Auto. Contr.*, **46-9**, 1447/1451 (2001).
- [31] G. Bartolini, A. Levant, A. Pisano, E. Usai: Higher-order sliding modes for the output-feedback control of nonlinear uncertain systems, *Variable Structure Systems: Towards the 21st Century* (X. Yu and J. Xu eds.), Springer, 83/108 (2002).
- [32] G. V. Smirnov: Introduction to the Theory of Differential Inclusions, *Graduate studies in mathematics 41*, AMS, (2001).

- [33] W. L. Xu, W. Huo: Variable structure exponential stabilization of chained systems based on the extended nonholonomic integrator, *Systems and Control Letters*, **41**, 225/235 (2000).
- [34] X. Yu, Z. Man: Model reference adaptive control systems with terminal sliding modes, *Int. J. Control*, **64-6**, 1165/1176 (1996).
- [35] 清田, 三平: 時間軸状態制御系によるドリフト項をもたない非ホロノミックシステムの安定化, システム制御情報学会論文誌, **12-11**, 647-654 (1999).
- [36] 小林, 井村, 吉川: 二つの非駆動関節を持つ平面4自由度マニピュレータの可制御性日本ロボット学会誌, **17-6**, 811/817 (1999).
- [37] F. Ceragioli: Some remarks on stabilization by means of discontinuous feedbacks, *Sys. and Contr. Lett.*, **45**, 271/281 (2002).
- [38] R. W. Brockett: Asymptotic stability and feedback stabilization, in *Differential Geometric Control Theory*, R. W. Brockett, R. S. Millman, H. J. Sussman Eds.
- [39] H. K. Khalil: Nonlinear systems third edition, Printice Hall (2002).
- [40] 浦久保, 土屋, 多田: ねこの宙返りの制御 (拡張リャプノフ法の適用), 第30回制御理論シンポジウム, 51/56 (2001).
- [41] 岩谷, 石川, 原: 一次の可制御構造を持つ対称アフィン系のフィードバック制御, 第30回制御理論シンポジウム, 1/6 (2001).

## 付録

### A. 研究業績

#### 学術誌掲載論文

1. 美多 勉, 玄 相昊, 中村 文一, 南 澤権: 初期角運動量を有する劣駆動浮遊機械系の最短時間制御解の導出と解析, 計測自動制御学会論文集, Vol. 38 No. 8, 668/676 (2000).
2. 中村 文一, 山下 裕, 西谷 紘一: 同次ディファレンシャル・インクルージョンに対する Lyapunov 関数, 計測自動制御学会論文集, Vol. 39 No. 4, 365/374 (2003).
3. 中村 文一, 山下 裕, 西谷 紘一: チェインドシステムに対する同次有限時間整定制御, 計測自動制御学会論文集 (掲載決定).

#### 国際会議発表論文

1. H. Nakamura, Y. Yamashita, H. Nishitani: Stabilization of nonholonomic systems using homogeneous finite-time control technique, IFAC World Congress 2002, Barcelona, T-Tu-E08-5, 1/6 (2002).
2. H. Nakamura, Y. Yamashita, H. Nishitani: Smooth Lyapunov functions for homogeneous differential inclusions, SICE Annual Conference 2002, Osaka, 1871/1876 (2002).
3. H. Nakamura, Y. Yamashita, H. Nishitani: Discontinuous finite-time control of multi-generator nonholonomic systems, SICE Annual Conference 2002, Osaka, 1877/1882 (2002).
4. H. Nakamura, Y. Yamashita, H. Nishitani: Finite-time stabilization of the high-order chained system, American Control Conference 2003 (to appear).
5. H. Nakamura, Y. Yamashita, H. Nishitani: Lyapunov functions for homogeneous differential inclusions, Conference on Decision and Control 2003 (submitted).

6. H. Nakamura, Y. Yamashita, H. Nishitani, H. Yamamoto: Discontinuous control of nonholonomic systems using nondifferentiable Lyapunov functions, SICE Annual Conference 2003, Fukui (to appear).

## 国内学会口頭発表

1. 中村 文一, 美多 勉: 初期角運動量を持つ浮遊機械系のノンホロノミック制御, 第22回 DST シンポジウム, 宇都宮, 255/260 (1999).
2. 玄 相昊, 美多 勉, 中村 文一, 南澤 謹: 初期角運動量を有するジャンピングロボットの最短時間制御, 第5回ロボティクス・シンポジア, 神戸, 13B3 (2000).
3. 中村 文一, 山下 裕, 西谷 紘一: 同次ベクトル場を利用した厳密な微分器の拡張, 第33回計測自動制御学会北海道支部学術講演会, 札幌, 85/86 (2001).
4. 中村 文一, 山下 裕, 西谷 紘一: 同次有限時間整定制御を用いた非ホロノミック制御, 第30回制御理論シンポジウム, 別府, 311/316 (2001).
5. 中村 文一, 山下 裕, 西谷 紘一: 高次チェインドシステムに対する同次有限時間整定制御, 第31回制御理論シンポジウム, 葉山, 19/24 (2002).
6. 中村 文一, 山下 裕, 西谷 紘一: 車両系に対する同次有限時間整定制御, 第45回自動制御連合講演会, 札幌, 573/574 (2002).
7. 中村 文一, 山下 裕, 西谷 紘一: 同次ディファレンシャル・インクルージョンに対する同次 Lyapunov 関数を用いたロバスト性の解析, 第35回計測自動制御学会北海道支部学術講演会, 札幌, 81/82 (2003).